

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЧ-ИЗЛУЧЕНИЯ С ПОТОКОМ ПЛАЗМЫ В УСЛОВИЯХ ГИБРИДНОГО РЕЗОНАНСА

И. С. Абрамов, Е. Д. Господчиков, А. Г. Шалашов*

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 15 января 2019 г.,
после переработки 28 февраля 2019 г.
Принята к публикации 1 марта 2019 г.

Предложена простая модель квазиодномерного стационарного потока неравновесной плазмы, распространяющегося вдоль оси открытой магнитной ловушки и поддерживаемого высокочастотным электромагнитным полем. Модель позволяет качественно исследовать возможные режимы течения плазмы в присутствии наведенного внутреннего высокочастотного поля, усиленного вследствие геометрического резонанса с потоком плазмы, а также определить основные особенности и ключевые характеристики нелинейного поглощения энергии внешнего поля.

DOI: 10.1134/S0044451019090165

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования взаимного влияния высокочастотного поля и плазмы посредством усредненной пондеромоторной силы берут свое начало в классических работах [1–4]. В дальнейшем тема получила развитие в области исследований взаимодействия лазерного излучения с веществом и приложениях, связанных с плазменным ускорением частиц [5–9]. Акцент в основном был сделан на анализе эффектов нелинейного взаимодействия высокочастотного поля с неограниченной прозрачной плазмой: самофокусировки и дефокусировки этого поля, организации самоподдерживающихся волноведущих каналов, возбуждения плазменных кильватерных волн и др.

Наряду с лазерами, для создания и поддержания плазмы используются мощные источники СВЧ-излучения. При помощи них удается создать стационарную неравновесную плазму, в которой температура электронов существенно превосходит температуру ионов. Это создает благоприятные условия для эффективной ионизации и возбуждения ионов электронным ударом, что открывает возможность использования данной плазмы в широком спектре приложений [10, 11]. Для микроволнового разряда возникает задача о взаимодействии высокочастотно-

го поля с плазменным образованием, характерные размеры которого могут быть сравнимыми с длиной волны поддерживающего излучения. Описание подобных объектов требует учета эффектов, связанных с влиянием границы плазмы, т. е. в первую очередь геометрических (поверхностных плазмонных) резонансов, в окрестности которых высокочастотное поле внутри плазмы значительно усиливается [12]. В таких условиях интенсивность поля внутри плазмы может оказываться достаточной для того, чтобы усредненная пондеромоторная сила, действующая на частицы плазмы, существенно влияла на плотность среды. Это приводит нас к самосогласованной задаче о нелинейном взаимодействии высокочастотного поля и плазмы — усиление поля зависит от динамики среды, которая, в свою очередь, зависит от величины пондеромоторной силы в области усиления поля. Специфика этого процесса состоит именно в резонансной зависимости пондеромоторной силы от параметров плазмы, что делает его крайне чувствительным к неоднородностям пространственного распределения параметров.

Одним из важных частных случаев взаимодействия микроволн с компактным плотным плазменным образованием является СВЧ-разряд, который необходим для приложений, связанных с разработкой источников жесткого УФ-излучения и ионов высокой кратности, и который, по сути, может быть рассмотрен как направленный поток плазмы переменного сечения [13–16]. Помимо пондеромоторной си-

* E-mail: abramov@appl.sci-nnov.ru

лы неоднородность плазмы здесь определяется также динамикой потока, поэтому для корректного построения теории нелинейного поглощения поддерживающего поля в условиях СВЧ-разряда такого типа принципиальным является согласованное описание газодинамики течения и динамики резонансного электрического поля, наводимого внутри разряда.

В настоящей работе предложена простая модель квазиодномерного стационарного потока плазмы, распространяющегося вдоль оси открытой магнитной ловушки и поддерживаемого внешним высокочастотным полем. Модель позволяет качественно исследовать возможные режимы течения плазмы в присутствии резонансно усиленного внутреннего высокочастотного поля, определить основные особенности и ключевые характеристики нелинейного поглощения СВЧ-излучения.

2. РАССЕЯНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ПОЛЯ НА ОДНОРОДНОМ ПЛАЗМЕННОМ ЦИЛИНДРЕ

Рассмотрим вспомогательную задачу о рассеянии падающей монохроматической электромагнитной волны на однородном плазменном цилиндре радиусом a , помещенном во внешнее однородное статическое магнитное поле (рис. 1а). Это стандартная задача теории дифракции, решения которой для произвольного соотношения между длиной волны и поперечным размером цилиндра в виде разложения по цилиндрическим гармоникам хорошо известны как для изотропного [17,18], так и для анизотропного [12,19] диэлектрического отклика. В случае, когда диаметр цилиндра много меньше длины волны, эта задача может быть решена в квазистатическом приближении [18,20]. В этом приближении вариацией падающего поля на внешней границе цилиндра можно пренебречь.

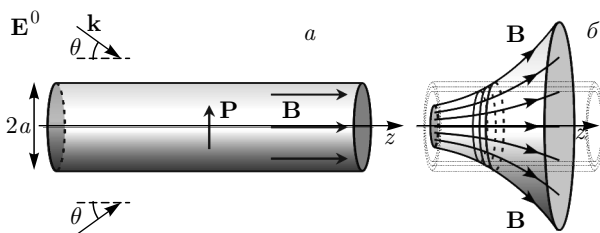


Рис. 1. Пояснение к модели нелинейного взаимодействия высокочастотного поля с плазменным образованием

Будем считать, что зависимость от координаты z гармоническая и волна падает на плазменный цилиндр под определенным углом θ к его оси. Допустим также, что размер цилиндра много меньше длины волны внутри плазмы, поэтому поле внутри цилиндра будем считать однородным по поперечной координате. Таким образом, поле внутри и снаружи цилиндра может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^{int} &= \mathbf{E}^{int} \exp(ik_0 z \cos \theta - i\omega t), \\ \tilde{\mathbf{E}}^{out} &= \mathbf{E}^{out} \exp(ik_0 z \cos \theta - i\omega t), \end{aligned}$$

где \mathbf{E}^{int} и \mathbf{E}^{out} — комплексные амплитуды поля соответственно внутри и снаружи цилиндра.

Когда внешнее магнитное поле направлено вдоль образующей цилиндра, возникает дополнительное упрощение, связанное с тем, что ось гиротропии диэлектрического отклика совпадает с осью цилиндра. При этом задачи о возбуждении колебаний плазмы высокочастотным полем \mathbf{E} , параллельным оси цилиндра и перпендикулярным ей, могут рассматриваться независимо. Также известно, что резонансное усиление поля при рассеянии на цилиндрическом объекте, много меньшем длины волны, возможно только для поперечного по отношению к оси цилиндра падающего поля [20]. Это усиление связано с возбуждением в системе электродипольного резонанса. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением только поперечной компоненты падающего поля. Такое описание падающей на цилиндр волны эквивалентно разложению падающего поля по цилиндрическим волнам и учету только цилиндрических волн (TE и TM) с азимутальным номером $m = 1$ [18].

При выполнении перечисленных выше условий поле вне цилиндра может быть записано как

$$\mathbf{E}^{out} = \mathbf{E}^0 + \pi a^2 \left(\frac{4(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}_\perp)\mathbf{r}_\perp}{r^4} - \frac{2\mathbf{P}}{r^2} + i\pi \tilde{k}^2 \mathbf{P} \right), \quad (1)$$

где \mathbf{E}^0 — комплексная амплитуда поля падающей волны, \mathbf{P} — комплексная амплитуда вектора поляризации, $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ — перпендикулярная оси цилиндра составляющая радиус-вектора, $\tilde{k}^2 = k_0^2 (1 + \cos^2 \theta) / 2$. Последний член в правой части (1) описывает влияние радиационных поправок на рассеяние волны (радиационное трение¹⁾) [20,21].

¹⁾ Данный член может быть получен при разложении поля, излучаемого дипольной нитью, по малому параметру $k_0 a \ll 1$ до соответствующего порядка. При этом следует пренебречь компонентами рассеянного поля порядка $k_0^2 a^2 \ln(k_0 a)$, находящимися в фазе с наведенной поляризацией, поскольку они лишь мало смещают положение дипольного резонанса.

При отсутствии диссипации именно он ограничивает величину поля внутри цилиндра в резонансе.

Наведенная поляризация определяется полем \mathbf{E}^{int} , возбуждаемым внутри цилиндра:

$$\mathbf{P} = \hat{\chi} \mathbf{E}^{int}, \quad \hat{\chi} = \frac{1}{4\pi}(\hat{\varepsilon} - 1),$$

где $\hat{\chi}$ и $\hat{\varepsilon}$ — тензоры диэлектрической восприимчивости и проницаемости соответственно. Сшивая тангенциальные компоненты напряженности и нормальные компоненты индукции внешнего и внутреннего электрических полей на границе плазменного цилиндра, получаем

$$(1 + (2\pi - i\pi^2 \tilde{k}^2 a^2) \hat{\chi}) \mathbf{E}^{int} = \mathbf{E}^0. \quad (2)$$

С точностью до замены тензора $\hat{\chi}$ на скалярную поляризуемость χ полученный результат эквивалентен случаю дипольного рассеяния поперечно поляризованной по отношению к оси изотропного диэлектрического цилиндра волны.

Для стиковых компонент электрического поля

$$\begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \\ E_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_x + iE_y)/\sqrt{2} \\ (E_x - iE_y)/\sqrt{2} \\ E_z \end{pmatrix}, \quad (3)$$

тензор диэлектрической восприимчивости холодной плазмы во внешнем однородном магнитном поле будет диагональным:

$$P_{\pm} = \frac{\varepsilon_{\pm} - 1}{4\pi} E_{\pm}^{int}, \quad P_{\parallel} = \frac{\varepsilon_{\parallel} - 1}{4\pi} E_{\parallel}^{int}, \quad (4)$$

где ε_{\pm} и ε_{\parallel} определяются выражениями

$$\varepsilon_{\pm} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_B + i\nu)},$$

$$\varepsilon_{\parallel} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}.$$

Здесь ω_p — электронная плазменная частота, ω_B — электронная циклотронная частота, ν — эффективная частота соударений электронов. Вообще говоря, в ε_{\pm} есть также слагаемые, связанные с наличием ионной компоненты, но для СВЧ-разряда соответствующие ионные частоты малы по сравнению с частотой излучения, поэтому указанными слагаемыми можно пренебречь.

Используя соотношения (2) и (4), получаем выражение для интенсивности поля внутри плазменного цилиндра:

$$\frac{|E_{\pm}^{int}|^2}{|E_{\pm}^0|^2} = \frac{4\omega^2(\nu^2 + (\omega \pm \omega_B)^2)}{4(\nu\omega + \pi\tilde{k}^2 a^2 \omega_p^2/4)^2 + (\omega_p^2 - 2\omega(\omega \pm \omega_B))^2}. \quad (5)$$

Видно, что в данном случае при выполнении условий

$$|\omega_p^2 - 2\omega(\omega \pm \omega_B)| \sim (\nu\omega + \omega_p^2 \tilde{k}^2 a^2/4) \ll \omega_p^2 \quad (6)$$

происходит резкое усиление поля. Отвечающий этим условиям резонанс

$$\omega = \Omega_{\pm} \equiv \frac{1}{2} \left(\sqrt{2\omega_p^2 + \omega_B^2} \mp \omega_B \right) \quad (7)$$

представляет собой геометрический резонанс с плазменным цилиндром. В обозначениях Стикса это соответствует $\varepsilon_{\pm}(\omega) = -1$ при $\nu \rightarrow 0$. В дальнейшем термин «резонансный» в работе применяется по отношению к величинам в окрестности этого резонанса.

Из выражения (5) видно, что в окрестности циклотронного резонанса $\omega = \omega_B$ резонансная компонента поля E_- , вращающаяся в ту же сторону, что и электроны, принимает наименьшее значение $|E_-^{int}| \sim \nu^2 \omega^2 |E^0|^2 / \omega_p^4$, т. е. не проникает в достаточно плотную плазму.

Определим энергетические характеристики излучения — объемные плотности мощности экстинкции q^e , поглощения q^a и рассеяния $q^s = q^e - q^a$. Экстинкция и поглощение излучения определяются формулами [22]

$$q^e = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E}^0),$$

$$q^a = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{j}^* \cdot \mathbf{E}^{int}),$$

где $\mathbf{j} = \partial \mathbf{P} / \partial t = -i\omega \hat{\chi} \mathbf{E}^{int}$. Пользуясь этими соотношениями, а также соотношениями (2) и (4), находим

$$q_{\pm}^a = \frac{8\nu\omega^2 \omega_p^2 W_{\pm}^0}{4(\nu\omega + \pi\tilde{k}^2 a^2 \omega_p^2/4)^2 + (\omega_p^2 - 2\omega(\omega \pm \omega_B))^2}, \quad (8)$$

$$q_{\pm}^s = \frac{2\pi\tilde{k}^2 a^2 \omega \omega_p^4 W_{\pm}^0}{4(\nu\omega + \pi\tilde{k}^2 a^2 \omega_p^2/4)^2 + (\omega_p^2 - 2\omega(\omega \pm \omega_B))^2}, \quad (9)$$

где $W_{\pm}^0 = |E_{\pm}^0|^2 / 16\pi$ — средняя плотность энергии стиковых компонент поля падающей волны. Очевидно, что в формулы для энергетических характеристик входит тот же резонансный множитель, что и в выражение для интенсивности (5), т. е. геометрический резонанс (7) определяет также эффективность поглощения и рассеяния энергии падающего поля. Если в разложении поля падающей волны по стиковым компонентам (3) присутствуют обе циркулярные компоненты, то соответствующие энергетические характеристики должны складываться.

Вообще говоря, поглощение мощности падающей на столб плазмы волны может происходить не только за счет столкновений электронов и ионов, но также за счет генерации плазменных волн вследствие

неоднородности плазмы поперек оси z . При этом сам эффект геометрического резонанса является грубым [20], поэтому в нашей постановке поглощение, связанное с генерацией плазменных волн, можно качественно учесть переопределением эффективной частоты соударений ν . Один из возможных способов заключается в подборе такой ν , чтобы добротность по поглощению Q_{\pm} принимала заданное значение (известное, например, из численного моделирования). В терминах нашей статьи добротность по поглощению может быть представлена в виде

$$Q_{\pm} = \frac{\Omega_{\pm} W_{\pm}^{int}}{q_{\pm}^a} \approx \frac{\Omega_{\pm} (\Omega_{\pm} \pm \omega_B)^2}{2\nu\omega_p^2},$$

где $W_{\pm}^{int} = |E_{\pm}^{int}|^2/16\pi$ — плотность энергии электрического поля в плазме. Таким образом, приведенное соотношение может выступать в качестве уравнения для ν . Далее мы не будем конкретизировать природу мнимой добавки к частоте излучения, а ν будем считать внешним параметром задачи.

3. МОДИФИКАЦИЯ ПОТОКА ПЛАЗМЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОНДЕРОМОТОРНОЙ СИЛЫ

Рассмотрим уравнения стационарного течения однократно ионизованной плазмы вдоль магнитного поля в гидродинамическом приближении [23, 24]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{e,i}}{\partial t} + \text{div}(n_{e,i} \mathbf{u}_{e,i}) &= 0, \\ m_{e,i} n_{e,i} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_{e,i}}{\partial t} + (\mathbf{u}_{e,i}, \nabla) \mathbf{u}_{e,i} \right) + \\ &+ \nabla(n_{e,i} T_{e,i}) = \mathbf{f}_{e,i}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $n_{e,i}$ — концентрации электронной и ионной компонент плазмы, $\mathbf{u}_{e,i}$ — направленные скорости компонент, $p_{e,i}$ — давления компонент, $\mathbf{f}_{e,i}$ — объемная плотность внешней силы, действующей на электроны или ионы, $m_{e,i}$ — массы электронов и ионов.

На масштабах изменения всех интересующих нас газодинамических характеристик плазма удовлетворяет условию квазинейтральности: концентрации и скорости направленного движения электронов и ионов $n_{e,i}$ и $\mathbf{u}_{e,i}$ плазмы совпадают и равны соответственно n и \mathbf{u} . При рассмотрении потока плазмы, распространяющегося в приосевой области открытой магнитной ловушки, силу, действующую на компоненты плазмы со стороны внешнего магнитного поля, можно приближенно учесть, рассматривая поток как течение сплошной среды вдоль трубки переменного поперечного сечения:

$$S(z) = S_0 B_0 / B(z),$$

где $B(z)$ — значение индукции магнитного поля на оси ловушки z . Индексом «0» будем отмечать значения физических величин в магнитной пробке — максимуме внешнего магнитного поля. В условиях резонансного поглощения энергии высокочастотного поля электронами будем считать, что их температура значительно превосходит температуру ионной компоненты, $T_e \gg T_i$. Высокая температура электронов приводит к высокой электронной теплопроводности, что позволяет считать температуру электронов не изменяющейся вдоль потока. В этих приближениях, усредняя характеристики потока по переменному поперечному сечению $S(z)$, для стационарного течения плазмы получаем квазиодномерные уравнения баланса для потоков частиц и импульса, аналогичные используемым в работах [13–15]:

$$\frac{d}{dz} (Snu) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dz} (Sm_i nu^2) + S \frac{d}{dz} (nT_e) = S \langle f_z \rangle, \quad (12)$$

где $\langle f_z \rangle$ — проекция на ось z плотности усредненной силы, действующей на электроны плазмы со стороны высокочастотного поля (пандеромоторной силы). Соответствующей силой, действующей на ионы, мы пренебрегаем в силу разницы в массах электронов и ионов. По этой же причине в (12) мы пренебрегаем потоком направленного импульса электронов по сравнению с потоком импульса ионов. Давление ионов пренебрежимо мало по сравнению с давлением электронов в силу разницы в температурах компонент. При переходе к одножидкостной модели слагаемые, соответствующие силам, действующим со стороны поля разделения зарядов, взаимно сокращаются в силу условия квазинейтральности.

Пандеромоторная сила может быть представлена в виде [8]

$$\langle f_z \rangle = -n \frac{d\Phi}{dz}.$$

Здесь Φ — потенциал усредненной силы, действующей на уединенный электрон во внешнем высокочастотном электромагнитном поле в присутствии постоянного магнитного поля [25],

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{e^2}{4m_e\omega} \times \\ &\times \left(\frac{|E_z^{int}|^2}{\omega} + \frac{|E_-^{int}|^2}{\omega - \omega_B(z)} + \frac{|E_+^{int}|^2}{\omega + \omega_B(z)} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где e — заряд электрона. Поскольку резонансно усиления продольной компоненты электрического

го поля не происходит, первым слагаемым в потенциале (13) будем пренебрегать.

В данной работе мы рассмотрим случай, когда характерные масштабы продольной неоднородности плазмы l много больше масштабов поперечной неоднородности и длины волны грейского поля,

$$a \ll 2\pi/k_0 \ll l. \quad (14)$$

В этих условиях можно считать, что локальное высокочастотное электрическое поле \mathbf{E}^{int} определяется соотношением (1), в котором вместо \tilde{k}^2 стоит дифференциальный оператор

$$\tilde{k}^2 \rightarrow \frac{1}{2} \left[k_0^2 + \left(k_z - i \frac{d}{dz} \right)^2 \right] \approx \tilde{k}^2 - ik_0 \cos \vartheta \frac{d}{dz}.$$

Уравнение (2) для внутреннего поля при этом переписывается в виде

$$\left(1 + \left(2\pi - i\pi^2 a^2 \hat{\chi} \left(\tilde{k}^2 - ik_0 \cos \vartheta \frac{d}{dz} \right) \right) \right) \mathbf{E}^{int} = \mathbf{E}^0.$$

Учитывая выражение (4) для стиковых компонент поляризации плазмы, можно убедиться, что производной по координате можно пренебречь при выполнении условия (14), в котором продольный масштаб неоднородности определен как

$$l \sim \max \left((\nu/\omega) L_{pl}, (k_0 a)^2 L_{pl} \right).$$

Здесь $L_{pl} \sim (d \ln B/dz)^{-1}$ — совпадающие по порядку величины масштабы неоднородности внешнего магнитного поля и концентрации плазмы. Физический смысл получившегося условия вполне понятен — для электродинамической задачи масштаб неоднородности определяется размером области резонансного усиления поля, которая определяется либо диссипацией ($\propto \nu$), либо рассеянием ($\propto (k_0 a)^2$). Если эта область велика по сравнению с длиной волны, то для определения внутреннего поля мы можем пользоваться «локальным» выражением (5), в котором a , ω_p и ω_B зависят от координаты z :

$$a = \sqrt{\frac{S(z)}{\pi}}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2}{m_e} n(z)}, \quad \omega_B = \frac{S_0 \omega_{B0}}{S(z)}. \quad (15)$$

То есть при рассмотрении электродинамической части задачи неоднородный поток плазмы может рассматриваться как набор однородных цилиндрических объектов с параметрами, распределенными в соответствии с решениями гидродинамических

уравнений (см. рис. 1б). Это главное допущение, лежащее в основе рассматриваемой ниже модели.

Подставляя (15) в условия геометрического резонанса (7), определим значение «резонансной концентрации»

$$n_{res}^{\pm}(z) = \frac{m_e \omega^2}{2\pi e^2} \left(1 \pm \frac{\omega_B(z)}{\omega} \right), \quad (16)$$

где индексы « \pm » соответствуют циркулярным компонентам E_+ и E_- . Разница между двумя резонансными концентрациями для различных стиковых компонент в большинстве случаев будет превосходить максимально возможный разброс концентрации плазмы в ловушке²⁾. Поэтому наличие геометрического резонанса с одной из циркулярных компонент поля гарантирует отсутствие резонанса с другой. Для определенности в дальнейшем будем рассматривать поле падающей волны, содержащее только компоненту E_+ , отвечающую большему значению резонансной концентрации. Тогда с учетом (5) потенциал пондеромоторной силы Φ , действующей на электроны, может быть записан в виде

$$\Phi = \frac{e^2 (E^0)^2}{m_e} \times \frac{\omega(\omega + \omega_B)}{4(\nu\omega + \pi \tilde{k}^2 a^2 \omega_p^2/4)^2 + (\omega_p^2 - 2\omega(\omega + \omega_B))^2}.$$

Это выражение получено в приближении $\nu \ll \omega + \omega_B$; в противном случае в силу условия (6) резонансное усиление поля не проявляется.

4. БАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Если температура электронов не зависит от координаты, система уравнений (11), (12) может быть сведена к двум первым интегралам:

$$Snu = S_0 n_0 c, \quad \frac{u^2}{2c^2} - \ln \left(\frac{uS}{cS_0} \right) + w(\phi - \phi_0) = \frac{1}{2}, \quad (17)$$

где $c = \sqrt{T_e/m_i}$ — скорость «изотермического» ионного звука, $w = E_0^2/8\pi n_0 m_i c^2$ — приведенная плотность энергии поля падающей волны,

²⁾ Разность $\Delta n = (\sqrt{\epsilon} - 1)n_0$ между концентрациями плазмы в минимуме и максимуме магнитного поля может быть оценена из условия, что максимально возможная вариация направленной скорости ионов в дозвуковом режиме (внутри магнитной ловушки) не может превышать скорость ионного звука. Комбинируя это с соотношением (16), получаем $(n_{res}^+ - n_{res}^-)/\Delta n \gtrsim 6\omega\omega_B/\omega_p^2$.

$\phi = 8\pi n_0 \Phi / E_0^2$ — приведенный безразмерный потенциал усредненной пондеромоторной силы,

$$\phi = \frac{2\tilde{\omega}_p^2(1 + \tilde{\omega}_B)}{4(\tilde{\nu} + \pi\tilde{k}^2 a^2 \tilde{\omega}_p^2 / 4)^2 + (\tilde{\omega}_p^2 - 2(1 + \tilde{\omega}_B))^2} \frac{n_0}{n}, \quad (18)$$

где $\tilde{\omega}_p = \omega_p / \omega$, $\tilde{\omega}_B = \omega_B / \omega$, $\tilde{\nu} = \nu / \omega$ — электронная плазменная, электронная циклотронная и столкновительная частоты, нормированные на частоту излучения.

Константы интегрирования в уравнениях (17) выбраны в соответствии с известным граничным условием равенства скорости потока и скорости звука в максимуме магнитного поля: $u_0 = c$. Данное условие справедливо в случае, если зависимость скорости потока от координаты содержит гладкий переход через звуковой барьер [15, 26]. Здесь мы предполагаем, что плазма создается источником, расположенным в окрестности одной из магнитных пробок, и изначально не имеет направленной скорости, приобретая ее только в результате установления стационарного течения. В этом случае установившееся внутри ловушки течение будет дозвуковым, а вне ее — сверхзвуковым.

С физической точки зрения первое соотношение в (17) представляет собой закон сохранения потока частиц при распространении вдоль z , а второе — эффективный закон Бернулли. Нелинейное взаимодействие поля и потока в (17) определяется слагаемым, пропорциональным параметру w . Выбирая вид пространственной зависимости $\tilde{\omega}_B(z)$ и значение нормированной плазменной частоты в максимуме магнитного поля $\tilde{\omega}_p(0)$, в рамках модели мы однозначно определяем и положения геометрического резонанса, отвечающего условию (7). В линейном приближении координаты сечений, в которых реализуется геометрический резонанс, определяются из уравнения

$$n_{res}(z_{res}) = n_{lin}(z_{res}), \quad (19)$$

где $n_{res}(z)$ задается формулой (16), а $n_{lin}(z)$ — решение системы базовых уравнений (17) при $w = 0$.

Далее мы приведем качественный анализ возможных течений плазмы в условиях нелинейного взаимодействия с внешним высокочастотным полем.

5. НЕПРЕРЫВНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Выберем параметры задачи таким образом, чтобы а) выполнялись условия (6), обеспечивающие существенное усиление резонансного поля, и б) условие резонанса (19) выполнялось внутри ловушки.

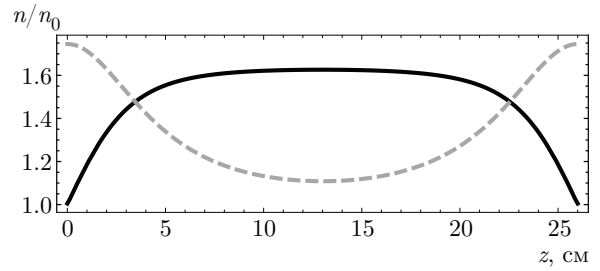


Рис. 2. Распределения плотности плазмы $n(z)$ (сплошная линия) и резонансной плотности n_{res} (штриховая линия) в линейном режиме поглощения ($w = 0$). Длина ловушки $L = 26$ см, пробочное отношение $R = 3.7$, $\tilde{\omega}_{B0} = 1$, $\tilde{\omega}_{p0} = 1.5$, $\tilde{\nu} = 0.001$, $\tilde{k}a = 0.05$

Для определенности зададим следующий модельный профиль внешнего магнитного поля:

$$B(z) = \frac{B_0}{(R - 1) \sin^2(\pi z / L) + 1},$$

где L — длина ловушки, R — пробочное отношение. Рассмотрим модификацию течения плазмы в зависимости от значения приведенной плотности энергии поля падающей волны w при фиксированных остальных параметрах.

Случай $w = 0$. Пример решения системы (17) относительно концентрации плазмы в отсутствие высокочастотного электромагнитного поля изображен на рис. 2. В дозвуковом потоке концентрация максимальна в центре ловушки и монотонно уменьшается с удалением от него. Резонансная концентрация, напротив, минимальна в центре и максимальна в точках максимума внешнего магнитного поля.

Случай $w < w_1^$.* При конечной энергии поля, пока w достаточно мало, влияние внешнего высокочастотного поля на характеристики плазмы носит локальный характер. Этот случай проиллюстрирован на рис. 3, где приведены характерные зависимости от координаты z для плотности плазмы и линейной плотности мощности поглощения. Далее будем характеризовать этот случай как режим слабой нелинейности. Увеличение w выше некоторого порогового значения w_1^* приводит к тому, что вблизи резонанса возникает сингулярность, связанная с появлением неоднозначности в решении системы (17). Появляющаяся особенность нарушает введенное предположение о параметрической зависимости характеристик поля от координаты вдоль направления потока. При этом уравнения (17) более не допускают непрерывных решений, но решения с разрывом газодинамических характеристик формально остаются возможными.

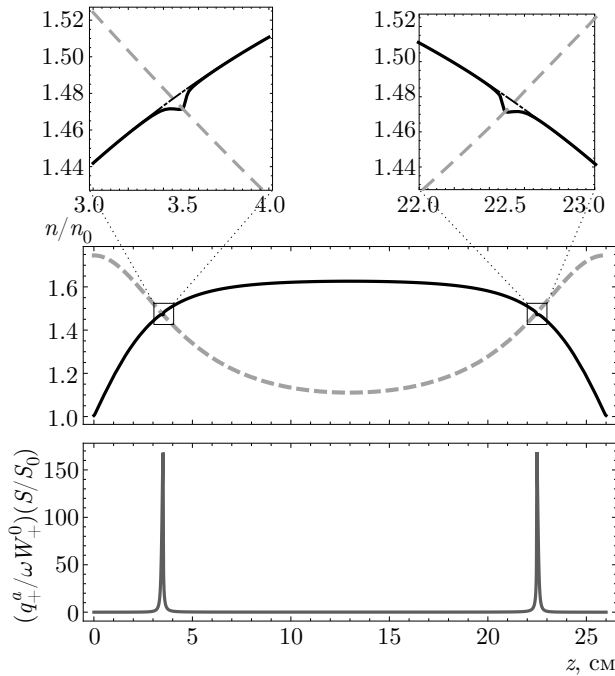


Рис. 3. Распределения плотности плазмы $n(z)$, резонансной плотности $n_{res}(z)$ и линейной плотности мощности поглощения $q_+^a(z)S(z)$. Приведенная плотность энергии поля падающей волны $w = 1.5 \cdot 10^{-7}$. Прочие параметры такие же, как на рис. 2. Для сравнения тонкой штрихпунктирной линией показана зависимость $n(z)$ в случае $w = 0$

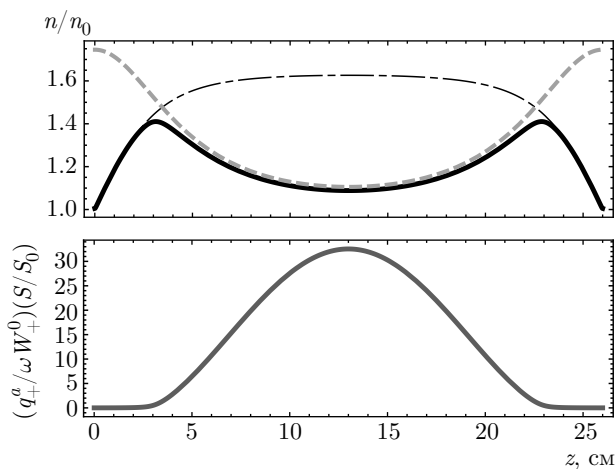


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но при $w = 1.5 \cdot 10^{-4}$

Случай $w > w_2^*$. Однако при дальнейшем увеличении параметра w выше определенного уровня w_2^* решение системы (17) снова оказывается однозначным. Этот случай будем называть режимом сильной нелинейности. Характерные зависимости плотности плазмы и мощности поглощения приведены на рис. 4. Резонанс в пределе сильной нелинейно-

сти перестает быть локализованным, так как поддерживающее электромагнитное излучение посредством пондеромоторной силы препятствует увеличению концентрации плазмы в центре ловушки выше резонансного уровня. В результате существует протяженный участок потока, характеризующийся увеличенным значением поглощаемой мощности.

6. ТЕЧЕНИЯ С РАЗРЫВАМИ

Можно предположить, что при медленном включении высокочастотного поля должен существовать непрерывный по приведенной плотности энергии w переход между пределами слабой и сильной нелинейности. Возникновение сингулярности нарушает исходные приближения модели в области, которая мала по сравнению как с характерными масштабами магнитной конфигурации, так и с длиной волны излучения. Если допустить возможность разрыва плотности плазмы n и скорости потока u в этой области, то уже в рамках рассматриваемой постановки задачи удастся однозначно восстановить стационарные течения для произвольной приведенной плотности энергии поля падающей волны. Конечно, в реальной ситуации в указанной области реализуется непрерывный переход между значениями характеристик плазмы до и после разрыва, однако, вследствие малости по сравнению с длиной волны, эта область не сможет обеспечить значимый вклад в поглощение.

Для того чтобы определить, где именно должны располагаться соответствующие поверхности разрыва, рассмотрим уравнения баланса энергии для электронов и ионов плазмы [23]:

$$n_{e,i} \frac{dU_{e,i}}{dt} + p_{e,i} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{div} \mathbf{Q}_{e,i} = q_{e,i} + q_{e,i}^{**}, \quad (20)$$

$$n_{e,i} T_{e,i} \frac{ds_{e,i}}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{Q}_{e,i} = q_{e,i}, \quad (21)$$

где $U_{e,i}$ — внутренняя энергия, $s_{e,i}$ — энтропия, $T_{e,i}$ — температура, $\mathbf{Q}_{e,i}$ — плотность потока тепла, $q_{e,i}$ и $q_{e,i}^{**}$ — плотности количества теплоты и нетепловой энергии, сообщаемых в единицу времени электронной и ионной фракциям, соответственно.

Для ионов сообщаемое им тепло за счет q_i и $\operatorname{div} \mathbf{Q}_i$, а следовательно, и изменение энтропии, отсутствует. Используя уравнения (10) и (21), исключим q_e и \mathbf{Q}_e из уравнения (20) для электронов, затем сложим результат с уравнением (20) для ионов. В итоге в приближении постоянной температуры электронов получаем соотношение

$$dU = -p_e dv + T_e ds + (q_e^{**} + q_i^{**}) dt, \quad (22)$$

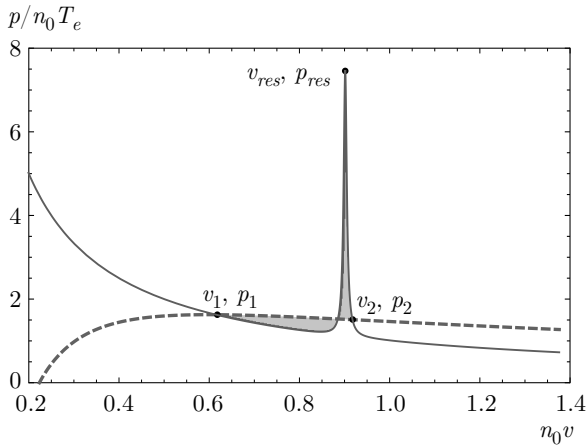


Рис. 5. Реальная изотерма (штриховая линия) и изотерма уравнения состояния вблизи резонанса (сплошная линия). Приведенная энергия поля $w = 1.4 \cdot 10^{-4}$. Прочие параметры такие же, как на рис. 2

где $v = 1/n$ — удельный объем плазмы, U — суммарная внутренняя энергия электронов и ионов плазмы. В последнее слагаемое в (22), отвечающее за нетепловую мощность, вклад вносит только работа пондеромоторной силы, действующей на электроны (работа электрического поля разделения зарядов сокращается при суммировании вкладов от электронов и ионов). Таким образом, $(q_e^{**} + q_i^{**}) dt = n\Phi_e dv$. В результате уравнение (22) примет стандартный вид основного термодинамического соотношения:

$$T_e ds = dU + (p_e + n\Phi_e) dv.$$

Выражение перед dv можно рассматривать как новое эффективное давление

$$P \equiv n(T_e + \Phi_e) = m_i c^2 v^{-1} (1 + w\phi(v)), \quad (23)$$

где $\phi(v)$ задается формулой (18). В соответствии с терминологией [27], выражение (23) определяет изотерму уравнения состояния. Пример такой изотермы представлен на рис. 5 (сплошная линия). Нетрудно заметить, что в изотермическом процессе в окрестности геометрического резонанса зависимость эффективного давления от удельного объема $\mathcal{P}(v)$, вообще говоря, немонотонна. Наличие неустойчивой возрастающей ветки говорит о том, что возможен скачок (фазовый переход) с одной убывающей ветки на другую.

В случае классического газа Ван дер Ваальса это приводит к тому, что неустойчивый участок на изотерме $\mathcal{P}(v)$ заменяется формальным решением $\mathcal{P} =$

$= \text{const}$, отвечающим одновременному существованию в системе двух фаз [27]. В нашем случае пространственно-неоднородной системы изобарический участок реальной изотермы следует модифицировать так, чтобы обеспечить выполнение соотношений (17). А именно, исключая $w\phi$ с помощью (23), эффективный закон Бернулли можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \left(n_0 v \frac{S_0}{S} \right)^2 - \ln(n_0 v) + \frac{v\mathcal{P}}{m_i c^2} - w\phi_0 = \frac{3}{2}. \quad (24)$$

Одновременное выполнение условий (23) и (24) определяет точки бинодали v_1 и v_2 , в которых реализуется состояние с одной фазой, см. рис. 5. Значения работы среды при переходе из начального состояния в конечное по изотерме уравнения состояния (23) и реальной изотерме (24), обозначенным ниже как $\mathcal{P}_{(23)}$ и $\mathcal{P}_{(24)}$, должны совпадать:

$$\int_{v_1}^{v_2} \mathcal{P}_{(23)}(v) dv = \int_{v_1}^{v_2} \mathcal{P}_{(24)}(v) dv. \quad (25)$$

Здесь v_1 и v_2 определяются как корни уравнения $\mathcal{P}_{(23)}(v) = \mathcal{P}_{(24)}(v)$. Выполнение условия (25) возможно лишь при определенном значении пространственной координаты z , от которой подынтегральные выражения и границы интегрирования зависят параметрически. Таким образом, интегральное условие (25) аналогично хорошо известному условию равенства площадей для фазового перехода в реальном газе (правило фаз Максвелла), однако в неоднородной задаче оно определяет не точки бинодали v_1 и v_2 , а положение в пространстве области, в которой происходит обсуждаемый фазовый переход.

Далее будем предполагать, что если для заданных внешних параметров стационарное течение возможно в принципе и условие (25) может быть выполнено в объеме разряда, то «фазовый переход» обязательно произойдет. Рассмотрение возможности установления метастабильных состояний для потока плазмы является отдельной задачей, которая останется за рамками данной работы. Таким образом, построенная теория позволяет описать любое течение, промежуточное по отношению к пределам сильной и слабой нелинейности, т. е. течение при $w_1^* < w < w_2^*$. Переход от слабой нелинейности к сильной проиллюстрирован на рис. 6. В режиме сильной нелинейности при $w > w_2^*$ условие равенства площадей (25) невозможно удовлетворить ни в одной точке пространства, поэтому решения уравнений (17) не содержат сингулярностей.

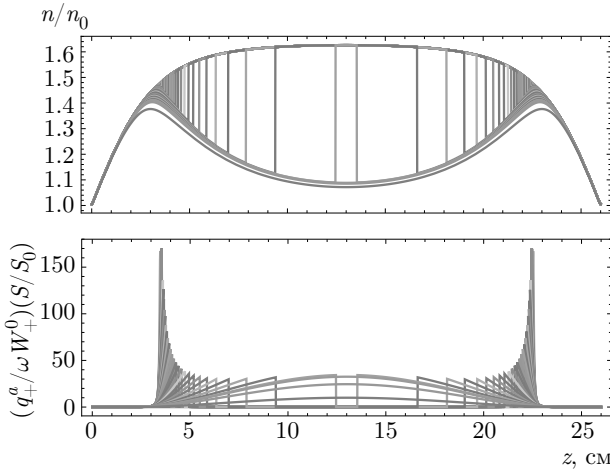


Рис. 6. Плотность плазмы и линейная плотность мощности поглощения при вариации приведенной плотности энергии падающего излучения w от 0 до $5 \cdot 10^{-4}$. Увеличению плотности энергии соответствует смещение разрыва к центру. Прочие параметры такие же, как на рис. 2

7. БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОЛЯ

Формализм эффективных фазовых переходов позволяет также установить значения плотности электромагнитной энергии w_1^* и w_2^* в падающей волне, при которых происходит переход к предельным случаям слабой и сильной нелинейности.

Граница режима слабой нелинейности w_1^* может быть определена как минимальное значение w , при котором возникает возрастающий участок изотермы уравнения состояния $\mathcal{P}_{(23)}(v)$. Смене монотонности изотермы предшествует возникновение точки перегиба в окрестности геометрического резонанса (19), т. е.

$$\begin{aligned} d\mathcal{P}_{(23)}(v)/dv &= 0 \\ d^2\mathcal{P}_{(23)}(v)/dv^2 &= 0 \end{aligned} \quad \text{при } z = z_{res}. \quad (26)$$

Отсюда, пользуясь выражениями (18) и (23), получим минимальное значение w , при котором возможно выполнение условия (26):

$$w_1^* \approx \frac{64}{3\sqrt{3}} \frac{n_0^2}{n_{res}^2} \left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\omega}_p^2(0)} + \frac{\pi(\tilde{k}a)^2 n_{res}}{4n_0} \right)^3, \quad (27)$$

где n_{res} — резонансная концентрация плазмы в точке z_{res} . Для приведенных в этой работе примеров численных расчетов наша аналитическая оценка плотности энергии w_1^* обеспечивает относительную точность не менее 10%.

Граница режима сильной нелинейности w_2^* есть наибольшее значение w , при котором течение все

еще разрывно. Для нашей модели магнитного поля (ловушка с магнитными пробками) эта граница может быть определена как значение w , при котором разрыв происходит точно в минимуме магнитного поля (в центре ловушки), см. рис. 6. В интересующем нас случае сильного резонансного усиления высокочастотного поля, когда выполнены условия (6), интеграл по изотерме уравнения состояния $\mathcal{P}_{(23)}(v)$ в законе равенства площадей (25) можно упростить, воспользовавшись тем, что $w\phi(v)$ есть функция с резким максимумом в окрестности v_{res} , см. рис. 5. В этом случае интеграл в левой части закона равенства площадей (25) можно разбить на два:

$$\int_{v_1}^{v_2} \mathcal{P}_{(23)}(v) dv \approx T_e \int_{v_1}^{v_{res}} \frac{dv}{v} + \frac{T_e}{v_{res}} \int_{-\infty}^{\infty} w\phi(v) dv.$$

В случае большого перепада магнитного поля, $S/S_0 \gg 1$, реальная изотерма близка к константе, $\mathcal{P}_{(24)}(v) \approx \text{const}$ (как в пространственно-однородной системе). В сделанных предположениях удастся вычислить все интегралы в законе равенства площадей и получить алгебраическое уравнение для w_2^* . Его решение в случае, когда разрыв происходит в минимуме магнитного поля, можно представить как

$$\begin{aligned} w_2^* &\approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\omega}_p^2(0)} + \frac{\pi(\tilde{k}a)^2 n_{res}^*}{4n_0} \right) \psi_2(\xi), \\ \psi_2(\xi) &= 2(\xi - \ln(\xi + 1)), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\xi = \sqrt{\tilde{\epsilon}n_0/n_{res}^*} - 1$, n_{res}^* — резонансная концентрация в минимуме магнитного поля. Функция $\psi_2(\xi) \approx \xi^2$ упрощается для не слишком больших ξ . Результаты сравнения полученной аналитической оценки с данными численного моделирования обсуждаются в следующем разделе.

8. МОЩНОСТЬ ПОГЛОЩЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОМ РЕЖИМЕ

Применим разработанную модель для исследования зависимости поглощенной мощности СВЧ-излучения от параметров течения. Наиболее интересной в данном случае является зависимость поглощаемой мощности от приведенной плотности энергии w вводимого в плазму излучения.

На рис. 7 изображены зависимости поглощенной мощности высокочастотного поля от w в условиях резонансного поглощения для различных положений линейного резонанса (см. вставку) и фиксиро-

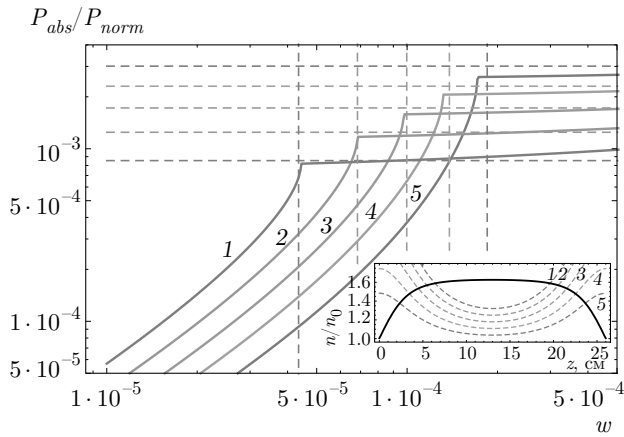


Рис. 7. Зависимости мощности поглощения от приведенной плотности энергии поля w для различных значений $\tilde{\omega}_{B0} = 1.9$ (1), 1.6 (2), 1.3 (3), 1.0 (4), 0.7 (5). Штриховыми линиями показаны полученные аналитически оценки бифуркационных значений плотности энергии w_2^* (28) и мощности поглощения P_{abs}^* (32). На вставке изображена плотность плазмы в пределе $w = 0$ и резонансная плотность плазмы при указанных значениях $\tilde{\omega}_{B0}$ (нумерация кривых в соответствии с основным рисунком). Остальные параметры такие же, как на рис. 2. Мощность нормирована на $P_{norm} = \omega n_0 T_e S_0 L/2$

рованных отношений частоты соударений к частоте поля падающей волны $\tilde{\nu}$ и длины волны излучения к поперечному размеру потока $\tilde{k}a$. В линейном режиме полная мощность поглощения линейна по w (квадратична по амплитуде падающего поля). В нелинейном режиме поглощаемая мощность растет быстрее, чем w ! Этот эффект можно объяснить следующим образом. С увеличением амплитуды поля область, где усредненная пондеромоторная сила препятствует увеличению концентрации выше резонансного уровня, увеличивается; при этом во всей этой области поле становится резонансно усиленным. За счет расширения области резонансного взаимодействия поглощаемая мощность растет с увеличением амплитуды поля быстрее, чем в линейном режиме. Из численных расчетов видно, что зависимость эффективно насыщается (рост поглощения становится более медленным) с переходом в режим сильной нелинейности при $w \approx w_2^*$. В этой точке область резонансного взаимодействия высокочастотного поля с потоком занимает весь объем, заключенный между геометрическими резонансами (19).

Критическое значение мощности P_{abs}^* , при котором происходит излом на графиках рис. 7, можно оценить из следующих физических соображений. Предположим, что при $w = w_2^*$ высокочастотное по-

ле присутствует только в центральной области разряда, заключенной между геометрическими резонансами. В этой области концентрация плазмы примерно равна своему резонансному значению, а вне ее концентрация не возмущена, т. е.

$$n(z) \approx \begin{cases} n_{res}(z) & \text{при } \underline{z}_{res} < z < \bar{z}_{res}, \\ n_{lin}(z) & \text{при } z < \underline{z}_{res} \text{ или } z > \bar{z}_{res}, \end{cases} \quad (29)$$

где \underline{z}_{res} и \bar{z}_{res} определяются из условия непрерывной сшивки решений, которое совпадает с (19). Такая зависимость концентрации плазмы от координаты обеспечивается за счет действия пондеромоторной силы, соответствующий ей потенциал $\phi(z)$ в области резонансного усиления $\underline{z}_{res} < z < \bar{z}_{res}$ можно найти из эффективного закона Бернулли

$$w(\phi - \phi_0) = \ln \left(\frac{\sqrt{\epsilon} n_0}{n_{res}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{n_0 S_0}{n_{res} S} \right)^2. \quad (30)$$

С методической целью отметим, что распределение резонансно усиленного электромагнитного поля, обеспечивающее распределение концентрации (29), на самом деле устанавливается за счет малой отстройки $|n - n_{res}| \ll n$. При выводе формулы (30) из «нерезонансного» закона Бернулли этой отстройкой мы можем пренебречь, а саму величину отстройки можно определить в рамках теории возмущений, приравняв потенциал, найденный из «электродинамического» определения (18), потенциалу (30).

Пользуясь определениями (8) и (18), через потенциал пондеромоторной силы можно выразить полную мощность поглощения P_{abs}^* :

$$P_{abs}^* = \frac{4\tilde{\nu}}{\tilde{\omega}_{p0}^2} \omega n_0 T_e \int_{\underline{z}_{res}}^{\bar{z}_{res}} w(\phi - \phi_0) S(z) dz.$$

В интересующем нас диапазоне параметров значение этого интеграла можно оценить, оставив при его подсчете лишь первое (ведущее) слагаемое в выражении для потенциала (30), пренебрегая вариацией поперечного сечения плазмы в области резонансного взаимодействия и предполагая квадратичную зависимость резонансной плотности плазмы от координаты:

$$n_{res}(z) = \bar{n} - \frac{(z - \underline{z}_{res})(z - \bar{z}_{res})}{(L_{res}/2)^2} (n_{res}^* - \bar{n}). \quad (31)$$

Здесь n_{res}^* — резонансная концентрация в минимуме магнитного поля; \bar{n} — концентрация на границах резонансной области, для оценок можно связать эту величину с плотностью плазмы в максимумах магнитного поля, $\bar{n} \approx \sqrt{\epsilon} n_0$; $L_{res} = \bar{z}_{res} - \underline{z}_{res}$ — длина резонансной области (см. рис. 8). В результате

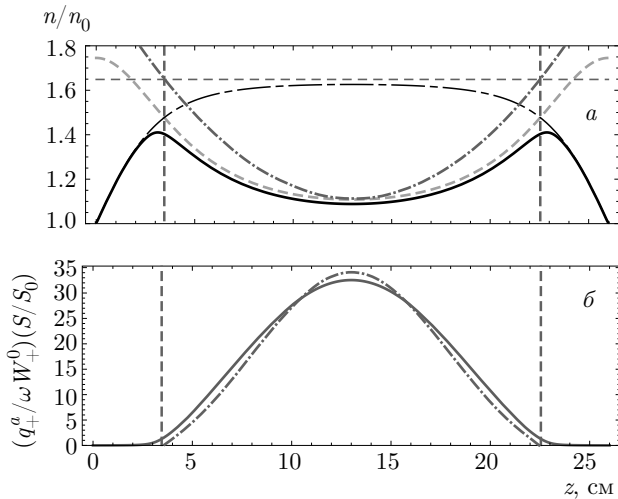


Рис. 8. а) Плотность плазмы (сплошная линия), плотность плазмы в линейном приближении (тонкая штрихпунктирная линия), резонансная плотность (штриховая линия) и приближенная квадратичная зависимость плотности плазмы (31) (штрихпунктирная линия) от координаты вдоль потока. Вертикальными линиями отмечены положения линейного резонанса z_{res} и z_{res}^* . Горизонтальная линия: $\bar{n} = \sqrt{\epsilon}n_0$. б) Нормированная линейная плотность мощности поглощения, полученная в результате моделирования (сплошная линия) и ее приближенное значение $8\tilde{\nu}S \ln(\sqrt{\epsilon}n_0/n_{res})/\tilde{\omega}_{p0}^2 S_0$ (штрихпунктирная линия). Параметр $w = 1.5 \cdot 10^{-4}$; прочие параметры такие же, как на рис. 2

сделанных упрощений выражение для критической мощности поглощения принимает достаточно простую форму:

$$P_{abs}^* \approx \frac{8\tilde{\nu}}{\tilde{\omega}_{p0}^2} \omega n_0 T_e V_{res} \psi_1(\xi), \tag{32}$$

$$\psi_1(\xi) = \left(\sqrt{\xi} - \arctg \sqrt{\xi} \right) / \sqrt{\xi} \approx \xi,$$

где $V_{res} = RS_0L_{res}$ — эффективный объем области резонансного взаимодействия, $\xi = \sqrt{\epsilon}n_0/n_{res}^* - 1$. Как и следует ожидать, мощность поглощения возрастает прямо пропорционально увеличению объема области взаимодействия и тем больше, чем ниже резонансная концентрация в центре ловушки; зависимость от частоты соударений линейная. Значения w_2^* и P_{abs}^* , полученные согласно формулам (28) и (32), отмечены на рис. 7 горизонтальными и вертикальными линиями. Видно неплохое соответствие результатам моделирования.

Обсуждаемый в этом разделе эффект увеличения области резонансного взаимодействия за счет подстройки плотности плазмы к резонансному значению может оказаться существенным в экспери-

ментах по достижению высоких кратностей ионизации в СВЧ-разрядах. Так, например, при поддержании плазмы излучением с частотой 37.5 ГГц для значений плотности плазмы близких к экспериментальным [28] и при схожей магнитной конфигурации ожидаемая мощность поглощения может отличаться от ее значения без учета нелинейных эффектов более чем на 10% уже для $w > 0.003$. Температура электронов в подобных экспериментах оценивается в 10–50 эВ. Если считать поглощение столкновительным, то получится, что для указанного влияния нелинейных эффектов достаточно амплитуд высокочастотного поля в области 2–5 кВ/см. Поля с такой напряженностью доступны для современных микроволновых генераторов и реализуются в плазменном эксперименте.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе разработанной теории можно сделать вывод о том, что резонансный нагрев потока плазмы малого диаметра происходит на геометрическом резонансе $\omega_p^2 = 2\omega(\omega \pm \omega_B)$ или, в терминологии Стикса, при $\epsilon_{\pm} = -1$. Эффективность этого нагрева определяется в основном объемом области резонансного взаимодействия, увеличивающимся с увеличением амплитуды поля за счет подстройки концентрации плазмы к резонансному значению в результате действия усредненной пондеромоторной силы.

В работе мы рассмотрели простейшую качественную задачу о потоке плазмы с фиксированной (однократной) кратностью ионизации без учета радиационных потерь. Однако «электродинамическая» часть задачи не зависит от этих особенностей. Поэтому наш формализм допускает прямое обобщение на случай плазменного потока более сложного (переменного) ионного состава с потерями на линейчатое излучение, актуальный в контексте оптимизации современных экспериментов. Анализ влияния давления высокочастотного поля падающей волны на баланс ионизации и возбуждения ионов электронным ударом в неравновесном потоке многозарядной плазмы, опирающийся на развиваемую авторами теорию [15, 16], требует отдельного рассмотрения.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 17-02-00173, 18-32-00419). И. С. Абрамов благодарит за персональную поддержку Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант № 18-1-5-12-1).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Gaponov and M. A. Miller, *Sov. Phys. JETP* **34**, 242 (1958).
2. H. A. H. Boot, S. A. Self, and R. B. R. Shersby-Harvie, *Int. J. Electron.* **4**, 434 (1958).
3. L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* **12**, 1008 (1961).
4. Y. B. Fainberg and V. D. Shapiro, *Beam-Plasma Interaction*, Ukrain. Acad. Sci., Kiev (1965).
5. Л. М. Горбунов, *УФН* **109**, 631 (1973).
6. V. A. Kozlov, A. G. Litvak, and E. V. Suvorov, *Sov. Phys. JETP* **49**, 75 (1979).
7. T. Tajima and J. M. Dawson, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 267 (1979).
8. А. Г. Литвак, в сб. *Вопросы теории плазмы*, вып. 10, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1980), с. 164.
9. D. Farina and S. V. Bulanov, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5289 (2001).
10. R. Geller, *Electron Cyclotron Resonance Ion Sources and ECR Plasmas*, Inst. Sci. Nucleaires, Grenoble (1996).
11. A. G. Shalashov et al., *Appl. Phys. Lett.* **113**, 153502 (2018).
12. P. E. Vandenplas, *Electron Waves and Resonances in Bounded Plasmas*, Intersci. Publ., London (1968).
13. И. С. Абрамов, Е. Д. Господчиков, А. Г. Шалашов, *Изв. вузов. Радиофизика* **58**, 1022 (2015).
14. А. Г. Шалашов, И. С. Абрамов, С. В. Голубев, Е. Д. Господчиков, *ЖЭТФ* **150**, 254 (2016).
15. I. S. Abramov, E. D. Gospodchikov, and A. G. Shalashov, *Phys. Plasmas* **24**, 073511 (2017).
16. I. S. Abramov, E. D. Gospodchikov, and A. G. Shalashov, *Phys. Rev. Appl.* **10**, 034065 (2018).
17. С. Солимено, Б. Крозиньяни, П. Ди Порто, *Дифракция и волноводное распространение оптического излучения*, Мир, Москва (1989).
18. Р. Б. Ваганов, Б. З. Каценеленбаум, *Основы теории дифракции*, Наука, Москва (1982).
19. A. K. Ram and K. Hizanidis, *Phys. Plasmas* **23**, 022504 (2016).
20. В. Б. Гильденбург, Ю. М. Жидко, И. Г. Кондратьев, М. А. Миллер, *Изв. вузов. Радиофизика* **10**, 1358 (1967).
21. Л. К. Рыжова, П. И. Якименко, *Изв. вузов. Радиофизика* **10**, 666 (1967).
22. М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, Наука, Москва (1973).
23. С. И. Брагинский, в сб. *Вопросы теории плазмы*, вып. 1, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1963).
24. Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*, Наука, Москва (1970).
25. R. Klima and V. A. Petrzilka, *IPP CAS Research Report IPPCZ-220* (1978).
26. V. E. Semenov, A. N. Smirnov, and A. V. Turlapov, *Fusion Technol.* **35**, 398 (1999).
27. А. Н. Матвеев, *Молекулярная физика*, Высшая школа, Москва (1981).
28. N. I. Chkhalo, N. N. Salashchenko, S. V. Golubev et al., *J. Micro/Nanolithography, MEMS, and MOEMS* **11**, 021123 (2012).