

АМПЛИТУДНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОБЪЕМНО-ЦЕНТРИРОВАННОЙ КУБИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ

*О. С. Ваулина**

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук
125412, Москва, Россия*

*Московский физико-технический институт
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 5 апреля 2019 г.,
после переработки 5 апреля 2019 г.
Принята к публикации 23 апреля 2019 г.

Выполнены исследования условий формирования амплитудных неустойчивостей в трехмерных системах Юкавы, состоящих из девяти заряженных частиц в объемно-центрированной кубической (ОЦК) ячейке. Для поиска критерия формирования амплитудной неустойчивости использовался аналитический подход, основанный на определении точки перегиба потенциальной энергии системы при отклонении частиц от своего равновесного положения. Приведено сравнение полученных результатов с критериями плавления для протяженных ОЦК-решеток.

DOI: 10.1134/S0044451019090207

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросы о формировании различных неустойчивостей в неидеальных средах вызывают постоянный интерес в различных областях науки и техники [1–9]. Небольшое изменение управляющих параметров в изначально равновесных системах способно вызвать существенное изменение их физических характеристик за счет развития диссипативных и/или дисперсионных неустойчивостей [7–14]. Кроме того, системы взаимодействующих частиц могут терять устойчивость с ростом амплитуды их отклонений от изначально равновесных позиций (за счет развития амплитудной неустойчивости), например, при увеличении температуры частиц.

Большинство методов для поиска критериев формирования различных неустойчивостей в неидеальных средах опирается либо на анализ линеаризованных уравнений движения взаимодействующих частиц, либо на поиск минимума потенциальной энергии системы [10–20]. Первый из подходов ограничен необходимым условием малости отклонения (смещения) частиц от их равновесного

положения, второй же является более фундаментальным и зачастую используется для определения критериев плавления и условий формирования различных кристаллических решеток [11, 17–20].

Невозможность корректного применения линеаризованных уравнений движения для описания нелинейных процессов (возникающих, например, с ростом температуры частиц) привела к широкому использованию разнообразных феноменологических критериев в теории плавления кристаллических решеток: критерия Лидемана, критерия Хансена и т. д. [1, 2, 20, 21]. Однако использование таких критериев для малоразмерных кластерных систем зачастую не является возможным [20, 22].

В настоящей работе для анализа условий изменения физических характеристик объемно-центрированных кубических (ОЦК) кластеров с ростом температуры частиц исследовалась их амплитудная устойчивость, т. е. устойчивость к любым (а не только к малым) отклонениям частиц от их равновесного положения. Данный подход основан на поиске точки перегиба потенциальной энергии системы с ростом смещений взаимодействующих частиц и ранее успешно использовался для систем Юкавы из двух частиц [23], а также для двумерных гексагональных кластеров, состоящих из семи заряженных частиц [24, 25].

* E-mail: olga.vaulina@bk.ru

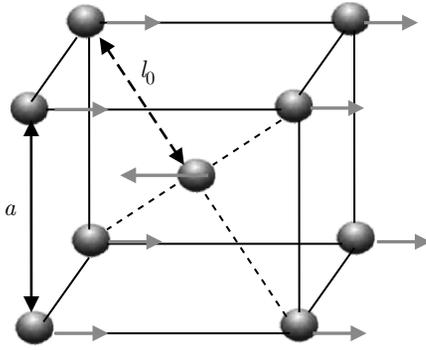


Рис. 1. Иллюстрация положения частиц в трехмерной объемно-центрированной кубической ячейке. Здесь a — шаг ОЦК-решетки, l_0 — наиболее вероятное межчастичное расстояние

Расчеты проводились для трехмерных систем, представляющих собой ОЦК-ячейку из девяти заряженных частиц, взаимодействующих с экранированным кулоновским потенциалом (типа Юкавы): $\varphi = Q \exp(-l/\lambda)/l$, где Q — заряд частиц, l — расстояние между двумя частицами, λ — длина экранирования. Найдена величина параметра $\Gamma_0 = Q^2/Tl_0$ вблизи линии формирования амплитудной неустойчивости; здесь T — температура частиц в энергетических единицах, $l_0 = \sqrt{3}a/2$ — наиболее вероятное межчастичное расстояние, a — шаг решетки (см. рис. 1). Здесь и далее под температурой частиц принимается средняя кинетическая энергия их стохастического движения [1–3].

Выполнено сравнение полученных результатов с кулоновским параметром неидеальности, $\Gamma = Q^2/Tl_p$ ($\Gamma \equiv \Gamma_0 l_0/l_p$), определяющим критерий плавления ОЦК-решетки для систем Юкавы [26–28]:

$$\Gamma_m \cong C \frac{\exp(\kappa)}{1 + \kappa + \kappa^2/2}, \quad (1)$$

где $\lambda = l_p/\lambda$ — параметр экранирования, а $l_p = (3\sqrt{3}/4)^{-1/3}l_0$ — среднее межчастичное расстояние для кристаллических систем с ОЦК-решеткой. Величина коэффициента C несколько различается в зависимости от способа, выбранного для идентификации фазового перехода, а также от величины параметра экранирования κ и варьируется в пределах приблизительно от 98 до 114 [26–34]. При этом $C \approx 104 \pm 6$ для $\kappa < 6$ и несколько растет при $\kappa \rightarrow \kappa = 6.9$, т.е. при приближении к точке формирования полиморфного фазового перехода ОЦК-структуры в гранецентрированную кубическую (ГЦК) решетку [29, 30].

2. УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ АМПЛИТУДНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ОЦК-ЯЧЕЙКЕ

Для исследования амплитудной устойчивости ОЦК-ячейки, состоящей из девяти частиц, взаимодействующих с экранированным кулоновским потенциалом, анализировалось изменение ее потенциальной энергии при отклонениях частиц от их равновесного положения. Расчеты выполнялись в широком диапазоне параметров экранирования $\kappa = l_p/\lambda$ (от $\kappa = 0$ до $\kappa = 8$). Рассматривались две задачи: 1) отклонение центральной частицы ячейки при неподвижных частицах на периферии; 2) взаимные отклонения всех девяти частиц ячейки (см. рис. 1). Отметим, что здесь мы приводим результаты только для смещений частиц в ортогональном направлении к грани ячейки, поскольку все другие варианты смещений дают большую глубину потенциальной ямы при приращении потенциальной энергии в анализируемых системах и, соответственно, требуют большей тепловой энергии для разрушения ОЦК-ячейки и не могут определять критерий развития амплитудной неустойчивости.

Тогда, в первом случае 1) при смещении одной центральной частицы для приращения U потенциальной энергии в анализируемой системе (с точностью до постоянной величины) имеем

$$U = \frac{Q\alpha\delta r^2}{2} + 4 \frac{Q^2}{a^3} \left[\frac{\exp(-\kappa^* l_1)}{l_1} + \frac{\exp(-\kappa^* l_2)}{l_2} \right], \quad (2)$$

где $\kappa^* = a/\lambda \equiv \alpha\kappa/l_p$, δr — отклонение частицы от ее равновесного положения, α — величина градиента внешнего электрического поля в точке равновесного положения центральной частицы, $l_1 = \{0.5 + (0.5 + \delta r/a)^2\}^{1/2}$, а $l_2 = \{0.5 + (0.5 - \delta r/a)^2\}^{1/2}$.

Во втором случае 2) для взаимного отклонения всех частиц в ячейке

$$U = \frac{Q\alpha\delta r^2}{2} + 8 \frac{Q\alpha^*\delta r_8^2}{2} + 8 \frac{Q^2}{a^3} \times \left[\frac{\exp(-\kappa^* l_3)}{l_3} + \frac{\exp(-\kappa^* l_4)}{l_4} \right], \quad (3)$$

где α^* — величина градиента внешнего поля в точках равновесного положения периферийных частиц ячейки (частиц «оболочки»), δr_8 — отклонение частиц от равновесного положения, $l_3 = \{0.5 + (0.5 + \Delta r/a)^2\}^{1/2}$, $l_4 = \{0.5 + (0.5 - \Delta r/a)^2\}^{1/2}$, а $\Delta r = \delta r - \delta r_8$ — величина взаимного смещения центральной частицы, δr , и периферийных частиц, δr_8 (см. рис. 1).

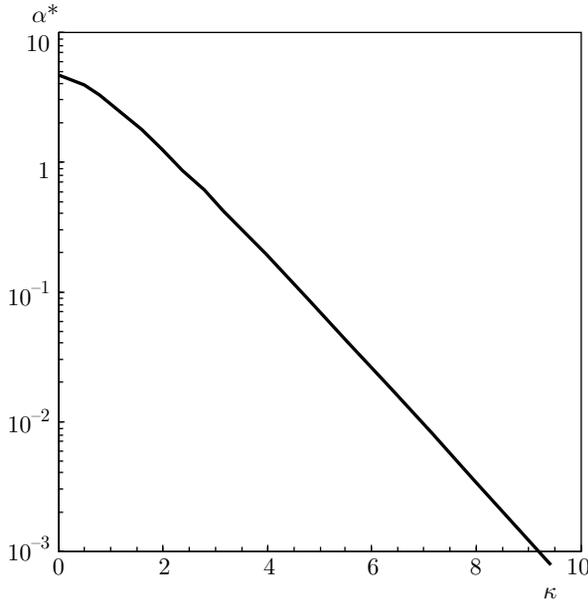


Рис. 2. Зависимость относительного значения $\alpha^* = \alpha/(Ql_0^{-3})$ от параметра экранирования κ

В приближении линейности внешней силы в направлении главных осей ОЦК-ячейки $\alpha^* \cong \alpha$ и величину градиента внешнего электрического поля можно найти из уравнения баланса сил, действующих в системе:

$$Q\alpha = 2 \frac{Q^2}{a^3} \left[\frac{\exp(-\kappa_1)(1 + \kappa_1)}{l_5} + \frac{\exp(-2\kappa_1)(1 + 2\kappa_1)}{l_5} + \frac{\exp(-\kappa_2)(1 + \kappa_2)}{l_6} + \exp(-\kappa^*)(1 + \kappa^*) \right], \quad (4)$$

где $\kappa_1 = \kappa^* \sqrt{3}/2$, $\kappa_2 = \kappa^* \sqrt{2}$, $l_5 = 3\sqrt{3}/4$, $l_6 = 2\sqrt{2}$. Зависимость относительного значения $\alpha^* = \alpha/(Qa^{-3})$ от параметра экранирования κ показана на рис. 2.

Первая производная, U' , приращения потенциальной энергии U по δr в точке $\delta r \equiv 0$ равна нулю и соответствует равновесному состоянию системы, а ее вторая производная, $U'' = 0$, в точке перегиба ($\delta r = \delta r_0$) отвечает за устойчивость системы при различных смещениях частиц. Зависимости от $\delta r/l_0$ относительных значений $U^* = U/(Q^2 a^{-1})$, а также первой $U^{*'}$ и второй $U^{*''}$ производных представлены на рис. 3 для параметра экранирования $\kappa = 0$ для случая смещения одной центральной частицы.

Глубина потенциальной ямы рассматриваемой системы определяется как $\Delta U = U(\delta r_0) - U(\delta r = 0)$.

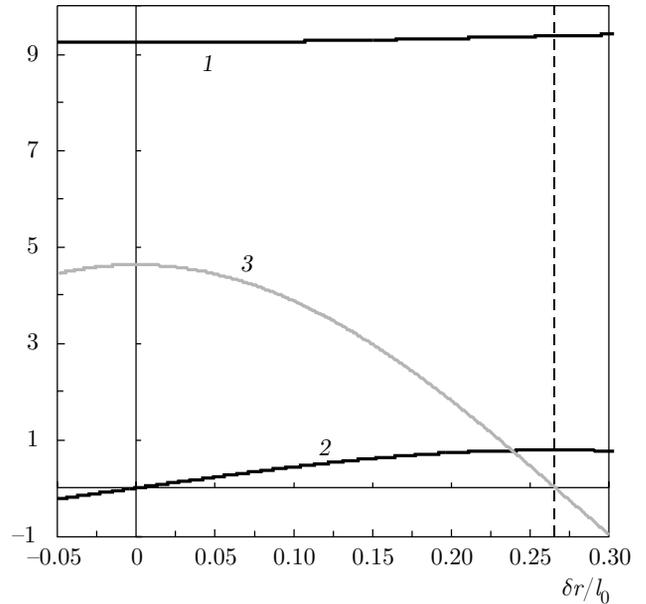


Рис. 3. Зависимости U^* (1), $U^{*'}$ (2), $U^{*''}$ (3) от $\delta r/l_0$ для $\kappa = 0$. Штриховой линией показано положение точки перегиба $\delta r_0/l_0$

Развитие амплитудной неустойчивости в анализируемой ячейке будет происходить, когда минимальное (среди всех возможных) значение $\Delta U = \Delta_{min}U$ на одну подвижную частицу системы будет меньше ее кинетической энергии, равной $K = 3T/2$ для трехмерной системы. В случае взаимного смещения всех частиц системы (3) условие минимальности глубины потенциальной ямы достигается при контрсмещениях центральной частицы и частиц оболочки, когда $\delta r = \delta r_8$ ($\Delta r = 2\delta r$), см. рис. 1. В обоих случаях данное условие можно записать как $\Delta_{min}U/N < 3T/2$, где N – количество подвижных частиц ($N = 1$ и $N = 9$). Таким образом, условие развития амплитудной неустойчивости можно представить в виде

$$\Gamma < \Gamma_c = \frac{3NQ^2}{2l_p \Delta_{min}U}. \quad (5)$$

Зависимости параметра Γ_c вблизи линии развития амплитудной неустойчивости в рассматриваемых системах от κ представлены на рис. 4, приведены значения $\Gamma_c = \Gamma_{c1}$ для $N = 1$ и $\Gamma_c = \Gamma_{c9}$ для $N = 9$. Там же показаны кривые плавления для протяженных ОЦК-систем, $\Gamma_m(\kappa)$, усредненные по результатам различных работ [26–34], см. [29, 34]. Легко увидеть, что полученные кривые $\Gamma_{c1}(\kappa)$ и $\Gamma_{c9}(\kappa)$ с хорошей точностью пропорциональны зависимости $\Gamma_m(\kappa)$, см. рис. 4.

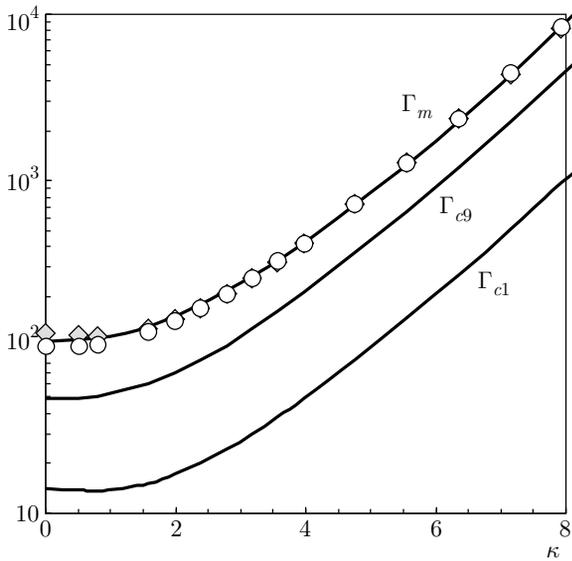


Рис. 4. Зависимости $\Gamma_{c1}(\kappa)$, $\Gamma_{c9}(\kappa)$ и $\Gamma_m(\kappa)$ (сплошные линии). Символы: $\diamond - 8.6\Gamma_{c1}(\kappa)$, $\circ - 2\Gamma_{c9}(\kappa)$

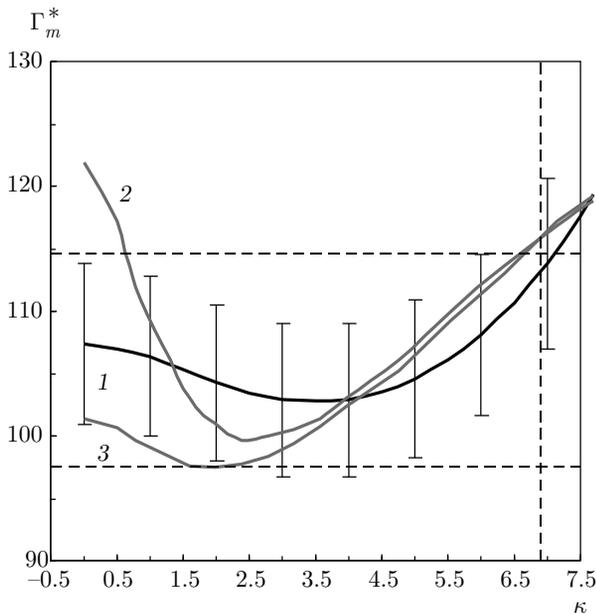


Рис. 5. Зависимости Γ_m^* (1), $8.6\Gamma_{c1}^*$ (2) и $2\Gamma_{c9}^*$ (3) от параметра экранирования κ . На рисунке обозначены отклонения в 5% от величины Γ_m^* . Вертикальная штриховая линия соответствует $\kappa = 6.9$. Горизонтальные штриховые линии ограничивают диапазон от $\Gamma_m^* = 97.5$ до $\Gamma_m^* = 114.5$

Для более подробного сравнения отклонения формы полученных кривых ($\Gamma_{c1}(\kappa)$ и $\Gamma_{c9}(\kappa)$) от зависимости $\Gamma_m(\kappa)$ относительные значения Γ_m^* , $8.6\Gamma_{c1}^*$ и $2\Gamma_{c9}^*$ приведены на рис. 5. Здесь $\Gamma_m^* =$

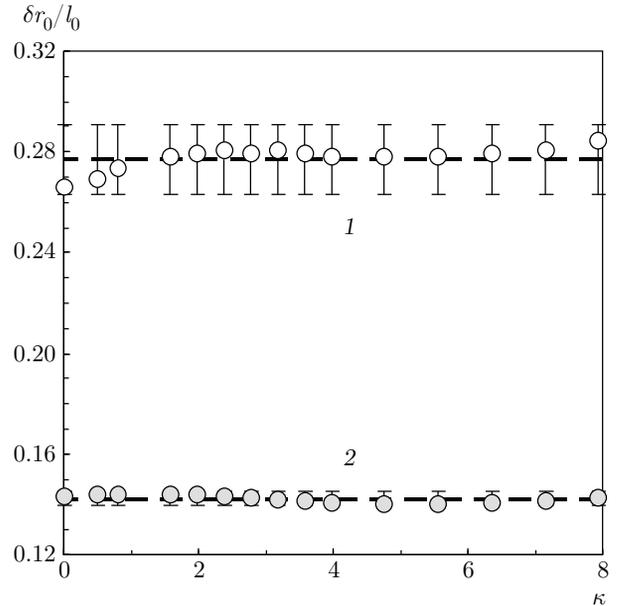


Рис. 6. Зависимости отношения $\delta r_0/l_0$ от параметра экранирования κ для случаев смещения одной центральной частицы в ОЦК-ячейке (1), взаимного смещения девяти частиц в ОЦК-ячейке (2). Средние значения $\delta r_0/l_0$ показаны штриховыми линиями. На рисунке обозначены отклонения в 4% от среднего значения для кривой 1 и отклонения от среднего значения в 2% для кривой 2

$= \Gamma_m/B$, $\Gamma_{c1}^* = 8.6\Gamma_{c1}/B$ и $\Gamma_{c9}^* = 2\Gamma_{c9}/B$, где $B = \exp(\kappa)(1 + \kappa + \kappa^2/2)^{-1}$. Легко увидеть, что значения Γ_m^* , Γ_{c1}^* и Γ_{c9}^* различаются не более чем на $\sim 5\%$, за исключением Γ_{c1}^* для $\kappa < 1$. Причины таких различий могут быть связаны как с погрешностью численного моделирования при определении величины Γ_m , так и с наличием используемых приближений, а именно, приближения «ближайших соседей» и линейности внешней силы.

Зависимость относительных смещений частиц, $\delta r_0/l_0$, в точке перегиба, соответствующей случаю минимальной глубины потенциальной ямы, от параметра экранирования κ показана на рис. 6. Для всех анализируемых параметров экранирования $\delta r_0/l_0 \approx 0.27 \pm 4\%$ для случая отклонений центральной частицы в ОЦК-ячейке и $\delta r_0/l_0 \approx 0.14 \pm 2\%$ для случая смещений всех девяти частиц. Для отклонений центральной частицы полученный результат с точностью до постоянного коэффициента, приблизительно равного 2, согласуется с параметром Лидемана для протяженных ОЦК-систем: $\delta_L = \delta r_p/l_p \approx 0.136 \pm 2\%$ [34, 35]. Результаты, полученные для случая смещений всех девяти частиц ячейки, хорошо соответствуют значениям δ_L .

Обратимся к проблеме корректности использования приближения ближайших соседей для анализа линий плавления протяженных систем. Здесь следует отметить, что указанное приближение успешно использовалось ранее для определения линий плавления протяженных ОЦК- и ГЦК-решеток в системах Юкавы при $\kappa > 1 \div 2$ с учетом нелинейности (ангармонизма) сил взаимодействия между центральной частицей и ее 8 ближайшими соседями в ОЦК-кластере или 12 соседями в ГЦК-ячейке [20, 34].

Что касается предположения о линейности внешнего поля, следует отметить, что формирование ОЦК-кластера (состоящего из девяти частиц) в линейном изотропном поле ловушки не соответствует критерию минимума потенциальной энергии системы [35]. Минимуму потенциальной энергии кластера из девяти частиц, взаимодействующих с экранированным кулоновским потенциалом, в линейном изотропном поле соответствует конфигурация «треугольной призмы с тремя дополнительными вершинами». Несколько большей энергией (в пределах менее 2% для $\kappa < 7$) обладает «квадратная антипризма» [35], потенциальная энергия которой, в свою очередь, несущественно меньше энергии ОЦК-кластера [28, 32]. Отметим, что приближение изотропности и линейности электрического поля в кристаллических ОЦК- и ГЦК-структурах (включая независимость характерных частот системы от числа составляющих ее частиц) может иметь место только при их значительных размерах $R_c \gg l_p$, т. е. когда упомянутые системы можно характеризовать однородной концентрацией.

Для анализа корректности сопоставления результатов, полученных для ОЦК-ячейки, с данными для протяженных систем введем две характерные частоты ω_E и ω_{bcc} . Первая из них — частота Эйнштейна ω_E , которая отвечает за частоту колебаний частиц в протяженной системе [33, 36]:

$$\omega_E^2 = \frac{2U_t}{3M\lambda^2}, \tag{6}$$

где M — масса частицы, U_t — внутренняя (потенциальная) энергия бесконечной решетки на одну частицу для систем Юкавы при $\kappa > 0$. В случае приближения «ближайших соседей» величина $\omega_E^2 \rightarrow \omega_0^2 = 8Q^2/(3M\lambda^2 l_0)$. Отметим, что вторая производная U'' потенциальной энергии U (2) по δr в точке $\delta r \equiv 0$ для смещения одной центральной частицы записывается как $U''(\delta r = 0) = M(\omega_0^2 + \omega_t^2)$, где $\omega_t^2 = Q\alpha/M$ — квадрат частоты ловушки. Мож-

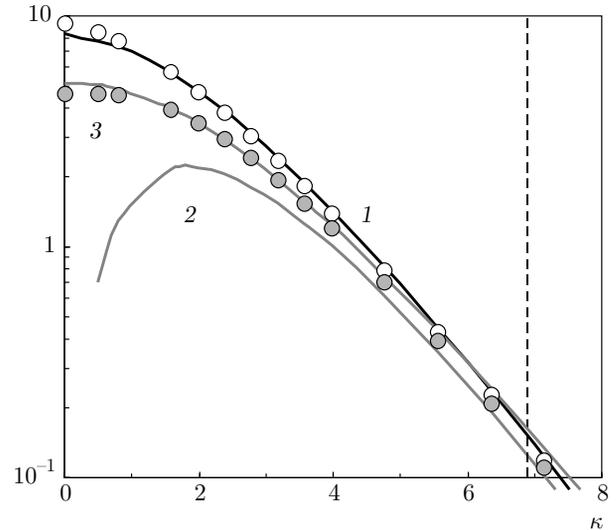


Рис. 7. Зависимости $(\omega_E^*)^2 = M(\omega_E)^2/(Q^2 a^{-3})$ (1), $(\omega_0^*)^2 = M(\omega_0)^2/(Q^2 a^{-3})$ (2) и $2(\omega_{bcc}^*)^2 = 2M(\omega_{bcc})^2/(Q^2 a^{-3})$ (3) от параметра экранирования κ показаны сплошными линиями. Символы \circ — $S_1 = (\omega_0^*)^2 + 2M\omega_t^2/(Q^2 a^{-3})$, символы \bullet — $S_2 = (\omega_0^*)^2 + M\omega_t^2/(Q^2 a^{-3})$. Штриховая линия соответствует величине $\kappa = 6.9$

но предположить, что в случае корректности используемых приближений $\omega_E^2 - \omega_0^2 \propto \omega_t^2$. Результаты сравнения упомянутых выше частот показывают, что $\omega_E^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_t^2$, см. рис. 7. Некоторые отклонения (менее 10% для $\kappa < 1$ и менее 5% для $\kappa > 6$) могут быть связаны с погрешностью линейного приближения для внешних сил ловушки; на участке от $\kappa = 1$ до $\kappa = 6$ отклонения величины $(\omega_E^2 - \omega_0^2)$ от значения $2\omega_t^2$ не превышали 2.5%.

Вторая характерная частота, ω_{bcc} , является полуэмпирической аппроксимацией численных данных и хорошо описывает критерий плавления ОЦК-решетки для систем Юкавы; $\omega_{bcc}^2 = (2Q)^2 \exp(-\kappa)(1 + \kappa + \kappa^2/2)/(\pi l_p^3 M)$ [37]. Отметим, что удвоенный квадрат этой частоты $2\omega_{bcc}^2$ отвечает за отклонения частиц от их положения равновесия, а также за процессы массопереноса на малых временах наблюдения [38, 39]. Результаты сравнения величин $U''(\delta r = 0)/M = (\omega_0^2 + \omega_t^2)$ и ω_{bcc}^2 показывают, что $(\omega_0^2 + \omega_t^2) \approx 2\omega_{bcc}^2$, см. рис. 7. Отклонения (менее 10% для $\kappa < 2$ и менее 5% для $\kappa > 6$) в этом случае могут быть связаны как с погрешностью линейного приближения для внешних сил ловушки, так и с использованием приближения «ближайших соседей». На участке от $\kappa = 2$ до $\kappa = 6$ отклонения величины $\omega_0^2 + \omega_t^2$ от значения $2\omega_{bcc}^2$ не превышали 2.5%.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выполнены исследования условий формирования амплитудных неустойчивостей в трехмерных ОЦК-кластерах, состоящих из девяти заряженных частиц. Расчеты выполнялись для экранированного кулоновского взаимодействия частиц (типа Юкавы) в широком диапазоне параметров экранирования κ . Для поиска критерия формирования амплитудной неустойчивости использовался аналитический подход, основанный на определении точки перегиба потенциальной энергии системы при отклонении частиц от своего равновесного положения.

Получена зависимость параметров Γ_{c1} (при смещении одной центральной частицы в ОЦК-ячейке) и Γ_{c9} (для взаимного смещения девяти частиц) от величины параметра экранирования κ вблизи линий развития амплитудной неустойчивости. Выполнено сравнение полученных результатов с фазовыми кривыми, $\Gamma_m(\kappa)$, для протяженных трехмерных систем с ОЦК-решеткой.

Результаты настоящей работы могут быть адаптированы для структур с любым типом взаимодействий, а также могут быть полезны для анализа условий плавления малоразмерных систем различной конфигурации, которые представляют интерес в физике плазмы, медицине, биологии, физике полимеров и коллоидных систем.

Финансирование. Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-38-20175), а также Программой Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, *Пылевая плазма (эксперимент и теория)*, Физматлит, Москва (2009).
2. *Complex and Dusty Plasmas*, ed. by V. E. Fortov and G. E. Morfill, CRC Press (2010).
3. A. Ivlev, G. Morfill, H. Lowen, and C. P. Royall, *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions: Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids*, World Sci., Singapore (2012).
4. *Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy*, ed. by H. Z. Cummins and E. R. Pike, Plenum, New York (1974).
5. А. А. Овчинников, С. Ф. Тимашев, А. А. Белый, *Кинетика диффузионно-контролируемых химических процессов*, Химия, Москва (1986).
6. B. Pullman, *Intermolecular Interactions: from Diatomics to Biopolymers*, Wiley Intersci., Chichester (1978).
7. R. K. Dodd, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and H. C. Morris, *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Acad. Press, London–New York (1982).
8. R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley Intersci., Chichester (1975).
9. E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Pergamon Press, Oxford (1981).
10. O. S. Vaulina, X. G. Adamovich, and S. V. Vladimirov, *Phys. Scripta* **79**, 035501 (2009).
11. I. I. Lisina and O. S. Vaulina, *Europhys. Lett.* **103**, 55002 (2013).
12. О. С. Ваулина, И. И. Лисина, К. Г. Косс, *Физика плазмы* **39**, 455 (2013).
13. О. С. Ваулина, А. П. Нефедов, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, *ЖЭТФ* **118**, 1325 (2000).
14. O. S. Vaulina, *Europhys. Lett.* **115**, 10007 (2016).
15. A. V. Ivlev, A. G. Khrapak, S. A. Khrapak, B. M. Anaratone, G. Morfill, and K. Yoshino, *Phys. Rev. E* **68**, 026403 (2003).
16. I. Lisina, E. Lisin, and O. Vaulina, *Phys. Plasmas* **23**, 033704 (2016).
17. S. Hamaguchi, R. T. Farouki, and D. H. E. Dubin, *Phys. Rev. E* **56**, 4671 (1997).
18. D. H. Dubin and H. Dewitt, *Phys. Rev. B* **49**, 3043 (1994).
19. W. G. Hoover, D. A. Young, and R. Grover, *J. Chem. Phys.* **56**, 2207 (1972).
20. O. S. Vaulina and X. G. Koss, *Phys. Rev. E* **92**, 042155 (2015).
21. O. S. Vaulina and S. V. Vladimirov, *Plasma Phys.* **9**, 835 (2002).
22. К. Г. Косс, О. Ф. Петров, М. И. Мясников, К. Б. Стаценко, М. М. Васильев, *ЖЭТФ* **149**, 1 (2016).
23. I. I. Lisina, O. S. Vaulina, and E. A. Lisin, *Phys. Plasmas* **24**, 113705 (2017).
24. О. С. Ваулина, *ЖЭТФ* **154**, 588 (2018).
25. O. S. Vaulina, I. I. Lisina, and E. A. Lisin, *Plasma Phys. Rep.* **44**, 270 (2018).
26. O. S. Vaulina and S. A. Khrapak, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **117**, 326 (2000) [*JETP* **90**, 287 (2000)].

27. O. S. Vaulina, S. V. Vladimirov, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 245002 (2002).
28. O. S. Vaulina, X. G. Koss, Yu. V. Khrustalyov, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, *Phys. Rev. E* **82**, 056411 (2010).
29. R. T. Farouki and S. Hamaguchi, *J. Chem. Phys.* **101**, 9885 (1994).
30. S. Hamaguchi, R. T. Farouki, and D. H. E. Dubin, *Phys. Rev. E* **56**, 4671 (1997).
31. E. J. Meijer and D. Frenkel, *J. Chem. Phys.* **94**, 2269 (1991).
32. M. J. Stevens and M. O. Robbins, *J. Chem. Phys.* **98**, 2319 (1993).
33. M. O. Robbins, K. Kremer, and G. S. Grest, *J. Chem. Phys.* **88**, 3286 (1988).
34. O. S. Vaulina and X. G. Koss, *Phys. Lett. A* **380**, 1290 (2016).
35. Н. Г. Гусейн-заде, Д. Н. Клочков, Кратк. сообщ. по физике ФИАН, № 18, 10 (2005).
36. H. Ohta and S. Hamaguchi, *Phys. Plasmas* **7**, 4506 (2000).
37. О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, *ЖЭТФ* **127**, 1153 (2005) [O. S. Vaulina, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, *JETP* **99**, 711 (2005)].
38. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, *ЖЭТФ* **133**, 1091 (2008).
39. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, *ЖЭТФ* **134**, 367 (2008).