

КОЛЛАПС КРОТОВОЙ НОРЫ И ПРЕВРАЩЕНИЕ ЕЕ В ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

И. Д. Новиков^{a,b,c}, Д. И. Новиков^a*

^a *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук, Астрокосмический центр
117997, Москва, Россия*

^b *The Niels Bohr International Academy, The Niels Bohr Institute
DK-2100, Copenhagen, Denmark*

^c *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 28 февраля 2019 г.,
после переработки 1 апреля 2019 г.
Принята к публикации 2 апреля 2019 г.

На основе идей И. М. Халатникова рассматриваются физические процессы, возникающие при коллапсе кротовых нор разных типов. Подчеркивается, что физические процессы в ходе коллапса и их исход существенно зависят от типа кротовой норы. Детально рассматривается, как при коллапсе кротовых нор возникают черные дыры.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова

DOI: 10.1134/S004445101910002X

1. ВВЕДЕНИЕ

Исаак Маркович Халатников, юбилей которого мы отмечаем, внес выдающийся вклад в релятивистскую физику и космологию. Особенно существенными являются его работы, посвященные анализу неустойчивости разных решений задач общей теории относительности и структуры сингулярностей, которые возникают в результате эволюции этих неустойчивостей [1–3]. В данной работе мы рассматриваем аналогичные проблемы в теории кротовых нор.

Кротовые норы (КН) в рамках общей теории относительности предсказаны сто лет назад [4]. КН является топологическим туннелем, связывающим различные асимптотически плоские области нашей Вселенной или разных вселенных в модели Мульти-вселенной [5, 6]. В настоящее время проводится интенсивное теоретическое исследование КН, их физических свойств и возможных астрофизических про-

явлений, хотя КН до сих пор в наблюдениях не обнаружены.

КН могут быть пространственноподобными [7–12], т. е. в них тоннели ориентированы в пространственном направлении, и времениподобными с тоннелями во временном направлении [6].

Пространственноподобные тоннели могут быть стационарными и проходимыми, если они заполнены экзотической материей с отрицательной плотностью энергии $\varepsilon < 0$ [7]. Входы в КН, расположенные на ее концах, могут иметь положительные массы [8], противоположные по знаку массы [13] или даже обе массы равные нулю [12]. Статические КН могут быть неустойчивыми по отношению к малым возмущениям [14–16]. В случае неустойчивости под действием малых возмущений КН начинают эволюционировать. При устойчивости к необратимым эволюционным изменениям ведет какое-либо заметное внешнее воздействие, например, облучение коротким импульсом (пучком) радиации. Процесс эволюции и его исход представляют большой интерес и с точки зрения физики КН, и с точки зрения их возможного влияния на другие процессы во Вселенной. Начальные стадии эволюции коллапса КН можно изучать методом анализа малых возмуще-

* E-mail: novikov@asc.rssi.ru

ний, но развитые стадии эволюции коллапса и его исход возможно исследовать только численными методами решения уравнений общей теории относительности. Первые результаты такого рода были получены в пионерских работах [17, 18]. Было показано, что эволюция в зависимости от деталей нарушения равновесия ведет либо к быстрому расширению (инфляции), либо к катастрофическому сжатию — коллапсу с образованием черных дыр. Настоящая работа посвящена детальному анализу коллапса КН и возникновению черных дыр. При этом использовались численные расчеты, выполненные нами ранее [19–21]. Там же см. описание наших численных методов.

Для простоты мы рассматриваем сферически-симметричные модели.

Везде ниже скорость света $c = 1$ и постоянная тяготения $G = 1$.

2. КОЛЛАПС ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНОЙ КРОВОТВОЙ НОРЫ БЕЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Коллапс КН вызывает большой интерес. Неоднократно провозглашалось, что в результате коллапса возникает черная дыра. Но как это происходит? И какие физические процессы при этом протекают? Для выяснения основных особенностей данного явления мы будем исследовать сферическую модель КН, изначально поддерживаемую в равновесии экзотическим скалярным полем с отрицательной плотностью энергии и имеющую нулевые массы обоих выходов [12]. Такая модель называется моделью Эллиса – Бронникова (ЭБ). В ней подразумевается возмущение подсвечиванием узким пучком излучения скалярного поля с положительной плотностью энергии [19]. Этот пучок движется со скоростью c и имитирует подсвечивание пучком электромагнитных волн. Для расчета эволюции численно решались совместно уравнения Эйнштейна и уравнения Гордона – Кляйна для безмассовых скалярных полей Ψ и Φ (см. ниже)¹⁾. Общая сферическая метрика в дважды световых координатах записывается в виде

$$ds^2 = -2 \exp(2\sigma(u, v)) du dv + r^2(u, v) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1)$$

¹⁾ Скалярные поля использовались потому, что они могут обладать сферической симметрией и в то же время излучаться.

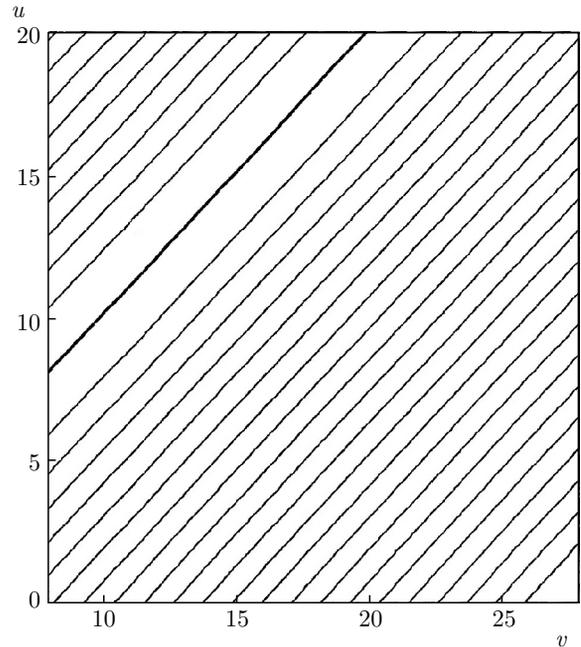


Рис. 1. Линии $r = \text{const}$ статической ЭБ-модели в координатах $u-v$. Жирной линией отмечено положение горловины $r = Q$

Здесь u и v являются световыми координатами, а функции $\sigma(u, v)$ и $r(u, v)$ описывают эволюцию системы. Координаты (u, v) удобны для проведения численных расчетов и интерпретации полученных данных. Невозмущенная ЭБ-модель записывается в виде

$$r = \sqrt{Q^2 + \frac{1}{4}(v - u)^2}, \quad (2)$$

$$\exp(-2\sigma) = 2, \quad (3)$$

$$\Psi = \arctg\left(\frac{v - u}{2Q}\right). \quad (4)$$

Здесь $Q = \text{const}$ — размер горловины ЭБ-модели, Ψ — поддерживающее ее скалярное поле.

На рис. 1 изображены линии $r(u, v) = \text{const}$ для статической ЭБ-модели. Рассмотрим эволюцию ЭБ-модели при выпрыскивании в нее короткого сферически-симметричного импульса скалярного поля Φ с положительной плотностью энергии и амплитудой 0.01 от амплитуды поля Ψ в горловине ЭБ-модели. На рис. 2 показаны линии $r(u, v) = \text{const}$ эволюционирующей модели и структура пространства-времени в (u, v) -координатах.

Они показывают коллапс ЭБ-модели к сильной сингулярности $r = 0$ с предварительным образованием черных дыр (ЧД). Сингулярность определяется как место, где скаляр $K = R_{iklm}R^{iklm}$ обращается

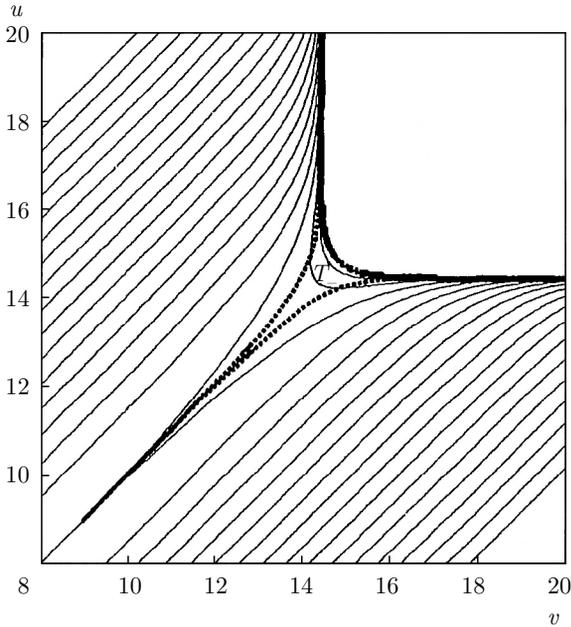


Рис. 2. Численный расчет коллапса ЭБ-модели, возмущенной впрыскиванием импульса поля Φ вдоль u -координаты. Тонкие линии — линии $r = \text{const}$. Импульс достигает горловины в точке $v_0 = u_0 = 9$. Пунктирная линия — положение горизонтов видимости. Жирная линия — сингулярность $r = 0$. T_- — сжимающаяся T -область

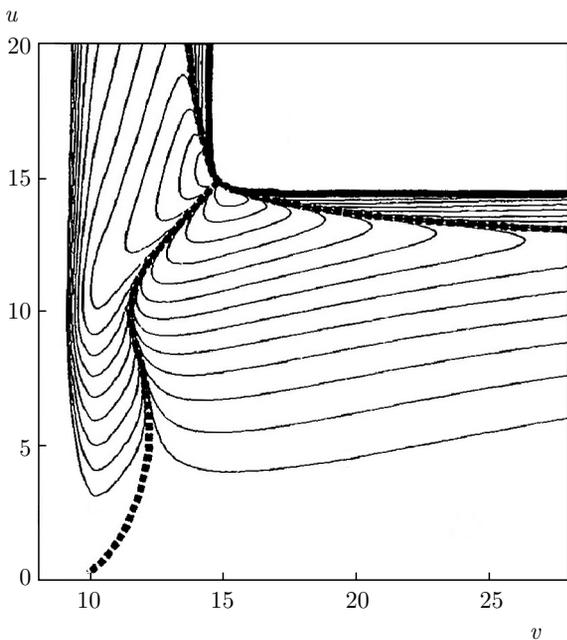


Рис. 3. Расчет эволюции поля Ψ , первоначально поддерживающего ЭБ-модель в равновесии. Тонкие линии — контуры значений потока $\Psi = T_{vv}^\Psi - T_{uu}^\Psi$. Коллапс выдавливает поле Ψ из кротовой норы. Точки — линии, где $T_{vv}^\Psi - T_{uu}^\Psi = 0$. Жирная линия — сингулярность $r = 0$

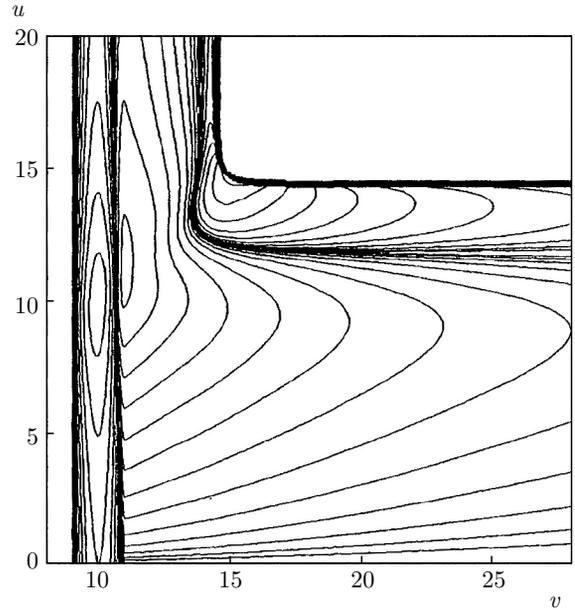


Рис. 4. Прохождение короткого импульса поля Φ сквозь кротовую нору. Тонкие контуры — линии постоянного значения потока поля Φ . Несмотря на рассеяние и сингулярность $r = 0$ (жирная линия), импульс проходит

в бесконечность. Процесс образования ЧД изображается возникновением на горловине ЭБ ЧД двух ветвей горизонта видимости в момент его пересечения впрыснутым пучком (сферическим импульсом) возмущающего поля Φ . Горизонт видимости — это граничная поверхность, которая может быть видима только изнутри. Гравитация не выпускает излучение наружу. Каждая из ветвей быстро стремится стать параллельной осям u и v , что и характеризует возникновение горизонтов событий черных дыр в u - и v -направлениях. Эти горизонты событий и являются границами возникших черных дыр. Процесс коллапса сопровождается истечением из КН поля Ψ . Это истечение показано на рис. 3.

В результате истечения поля Ψ с отрицательной плотностью энергии возникающие черные дыры обладают положительными массами. По оценке [19] гравитационные радиусы возникающих ЧД равны каждый примерно половине размера горловины начальной ЭБ КН и почти не зависят от амплитуды возмущения. Таким образом, в результате коллапса пространственноподобной кротовой норы без магнитного поля возникают две черные дыры на месте входов в кротовую нору. Возникающая пространственноподобная сингулярность спрятана внутри обеих черных дыр, подобно тому как будущая сингулярность в метрике Казнера спрятана внутри двух черных дыр (см. [6]).

Подчеркнем, что, несмотря на коллапс КН, вызванный ее облучением полем Φ и делающий КН непроходимой, импульс поля Φ в большей своей части успевает пройти от одного входа до другого. Он может нести энергию и информацию, см. рис. 4. Направленный луч выглядит как столб в левой части рисунка. Лишь незначительная часть луча испытывает рассеяние на кривизне пространства-времени.

3. КОЛЛАПС ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОВНОЙ КРОВОЙ НОРЫ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Рассмотрим теперь физические процессы коллапса КН при наличии пронизывающего ее магнитного поля. В качестве исходной модели КН будем использовать статическую модель, построенную в работе [22].

В этой модели метрика записывается как

$$ds^2 = dt^2 - dR^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5)$$

$$r^2(R) = q^2 + R^2,$$

q — радиус горловины КН.

Эта КН поддерживается в равновесии совместным действием магнитного поля, имеющего эффективный заряд q и направленного вдоль R -координаты с тензором энергии-импульса

$$T_{m, magn}^n = \frac{q^2}{8\pi r^4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

и экзотической пылевой материей с отрицательной плотностью энергии

$$\varepsilon_d = -\frac{q^2}{4\pi r^4} \quad (7)$$

с тензором энергии-импульса

$$T_{m, d}^n = \frac{q^2}{4\pi r^4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Если в начальном положении предположить недостаток пыли по сравнению с (8), то это нарушит равновесие и начнется коллапс ($q = \text{const}$ как эффективный заряд), выражение для магнитного поля не меняется, а уравнение движения пыли может

быть проинтегрировано аналогично задаче Толмена [23]. Решение применимо до возможного наступления пересечения слоев пыли.

Каков исход коллапса КН? Оказывается, ответ может быть разным в зависимости от величины магнитного поля и ряда других обстоятельств. Простейший исход возникает при сравнительно слабом магнитном поле. Если поле в начале коллапса слабо, так что оно не влияет на динамику, то начальная фаза выглядит так же, как и без магнитного поля: возникают горизонты событий, см. рис. 2. В случае если внутренние горизонты возникающих черных дыр (горизонты Коши) много меньше размера горловины r_{throat} :

$$r_{throat} \gg \frac{q^2}{m}, \quad (9)$$

где m — масса возникающих черных дыр, то и при приближении к сингулярности магнитное поле не влияет на динамику.

Сингулярность здесь пространственноподобна. В ее окрестности все процессы имеют очень большие временные градиенты, которые много больше пространственных, и все процессы зависят от очень ограниченных пространственных областей. В нашем случае сингулярность возникает прежде всего в горловине КН, где $\partial r/\partial R = 0$. Поэтому в качестве первого приближения [24] можно рассматривать однородную по пространству модель, которая может быть анизотропной (связанной с направлением магнитного поля) и эволюционирующей со временем. В пустом пространстве без магнитного поля простейшим решением является решение Казнера [25]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 - b^2(t) dy^2 - c^2(t) dz^2, \quad (10)$$

$$a = a_0 t^{p_1}, \quad b = b_0 t^{p_2}, \quad c = c_0 t^{p_3}, \quad (11)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь решение с однородным магнитным полем вдоль оси z [26]. В [27] показано, что вблизи сингулярности ($t \rightarrow 0$) решение [26] имеет вид (11), (12). При этом в уравнениях Эйнштейна члены, связанные с полем, много меньше членов, описывающих эволюцию метрики (10). Таким образом, при $t \rightarrow 0$ (к сингулярности) магнитное поле не влияет на решение и это решение является «вакуумным». Магнитное поле, геометрически замороженное в метрику (10)–(12), эволюционирует «приклеенным» к системе (10). Окончательный вывод таков: коллапс кротовой норы, пронизанной относительно слабым магнитным полем (9), ведет к образованию непроходимой кротовой норы с магнитным полем, выходы которой представляют собой черные

дыры с магнитным полем, соединенные сингулярностью. При сферической симметрии внутри 4D надо пользоваться решением Рейснера – Нордстрема (см. разд. 4).

4. КОЛЛАПС ВРЕМЕНИПОДОБНОЙ КРОВОЙ НОРЫ

Коллапс времениподобной КН²⁾ может происходить множеством различных способов. Мы рассмотрим важнейшие из них. Простейшая времениподобная КН изображена на рис. 5. Это диаграмма Пенроуза – Картера³⁾ решения Рейснера – Нордстрема (см. в [28]). Эта диаграмма может быть неограниченно продолжена вверх и вниз. На рис. 5 асимптотически плоские пространства A и B , соединенные через времениподобную КН (области T_-, R_1, T_+) с аналогичными пространствами C и D .

В решении помимо гравитационного поля присутствует электрическое (или магнитное) поле с силовыми линиями вдоль радиальной координаты r . Обычно такое решение называют заряженной черной дырой [28]. Но, скорее, области $A, B, C, D \dots$ — это отдельные вселенные Мультивселенной (или далекие области одной вселенной), связанные кротовыми норами [6].

В пространстве-времени на рис. 5 времениподобная мировая линия может проходить из области A через кротовую нору (T_-, R_1, T_+) в новую вселенную, расположенную выше указанных областей. Время вдоль такой мировой линии течет снизу вверх [29–31].

Линия⁴⁾ $r_{+,1}$ является горизонтом событий черной дыры во вселенной A . Она также является входом в кротовую нору. В случае пространственноподобной кротовой норы через любой вход можно и войти, и выйти. Здесь же в $r_{+,1}$ можно только войти. Эти КН проходимы только в одном направлении — снизу вверх, от прошлого к будущему. Описываемое решение Рейснера – Нордстрема [32] в целом не эволюционирует, рис. 5 остается неизменным. Что про-

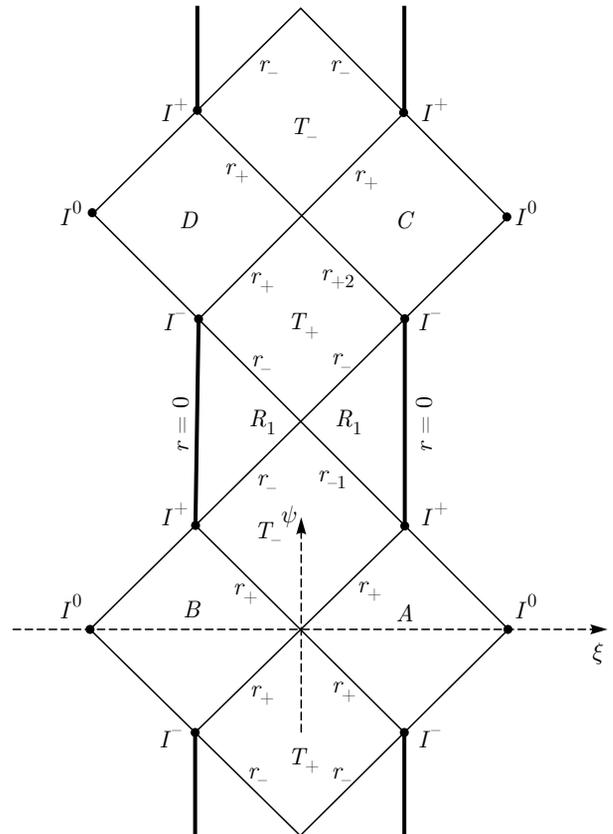


Рис. 5. Метрика Рейснера – Нордстрема. Диаграмма Картера – Пенроуза. A, B, C, D — асимптотически плоские вселенные, ψ — временная координата, ξ — пространственная координата, I^0 — пространственная бесконечность, I^+ — бесконечно будущее, I^- — бесконечно прошлое, T_+ — расширяющаяся T -область, T_- — сжимающаяся T -область, $r = 0$ — сингулярность пространства-времени, r_+ — горизонт событий, r_- — горизонт Коши

изоидет, если облучить КН (рис. 5) через входы из пространств A и B импульсами поля Φ ? Заметим, что на рис. 5 имеются две горизонтально симметричные области A и B . Они вместе составляют пространственноподобную КН (непроходимую). Из областей A и B нельзя пройти друг в друга. Но из них можно попасть в область T_- . Для симметрии возмущения облучим КН через оба входа одинаковыми короткими импульсами поля Φ . Статичность картины на рис. 5 будет нарушена. Как только импульсы достигнут горловины — симметричной линии Ψ на рис. 5 в области T_- , начинается быстрый коллапс кротовой норы. Этот процесс показан на рис. 5. Возникает сильная пространственноподобная сингулярность $r = 0$.

Подчеркнем, что с точки зрения физика сингулярностью следует называть место пространст-

²⁾ Этот термин был введен в работе [6] для обозначения кротовых нор, туннели которых ориентированы во временном направлении.

³⁾ В диаграмме Пенроуза – Картера бесконечно удаленные точки и области с помощью преобразования координат переносятся на конечное расстояние. Так, на рис. 5 I^0 — пространственная бесконечность, I^+, I^- — временные бесконечности.

⁴⁾ Напомним, что мы рассматриваем сферически-симметричные модели и рис. 5 отображает радиальную структуру моделей. Они должны быть топологически умножены на угловую часть. Таким образом, линии $r_{+,1}, r_-$ и другие являются двумерными поверхностями.

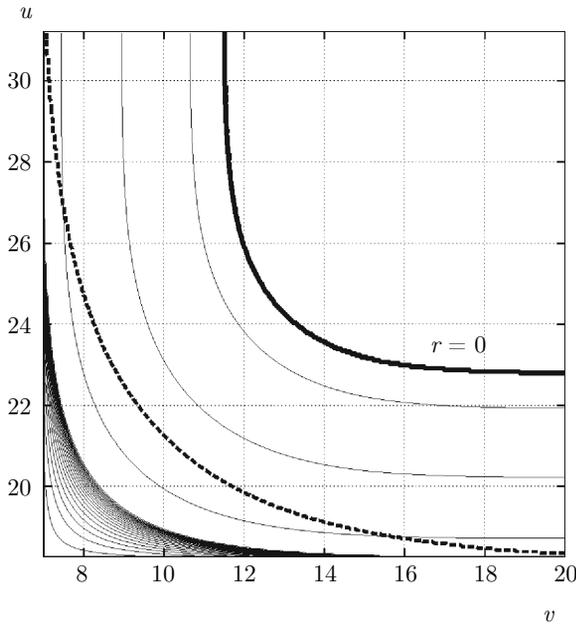


Рис. 6. Коллапс кротовой норы, подсвечиваемой с обеих сторон короткими одинаковыми импульсами поля Φ . Линии постоянных r отмечены тонкими кривыми. Жирная кривая вверху — $r = 0$. Пунктирная кривая — $K = K_{Planck}$

ва-времени, где кривизна не только является бесконечной, но и где она больше планковской величины $(\hbar G/c^3)^{-2}$, ибо там законы физики должны быть другими. Мерой кривизны может служить скаляр Кречманна (Kretschmann):

$$K = R_{iklm}R^{iklm}. \quad (13)$$

Мы будем называть область, где

$$K > K_{Planck} \approx \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{-2} \approx 10^{131} \text{ см}^{-4}, \quad (14)$$

сингулярной областью. На рис. 6 граница, где $K = K_{Planck}$, показана пунктирной линией. Таким образом, на рис. 6 вся область выше K_{Planck} является сингулярной.

Важной особенностью внутреннего строения времениподобной КН является наличие в ней горизонтов Коши (внутренних горизонтов). Рассмотрим КН, ведущую от области A к областям C и D . Горизонт Коши отделяет область, в которой эволюция полностью определяется условиями во вселенной A , от областей, в которых к этим условиям добавляются события в областях R_1 , T_+ и других. На рис. 5 горизонт Коши — это линия $r_{-,1}$. Горизонт Коши образован нулевыми геодезическими, входящими в КН на временной бесконечности вселенной A . Другие горизонты Коши определяются аналогично.

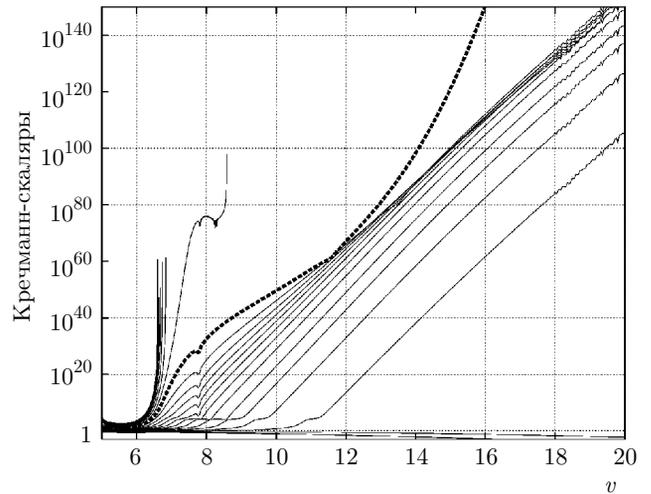


Рис. 7. Крещманн-скаляры как функции v . Отдельные кривые — линии постоянного u

Вблизи горизонта происходит много нелинейных процессов. Мы рассмотрим только некоторые из них, которые непосредственно влияют на коллапс в КН и возникновение сингулярности.

Любая радиация, входящая в КН, концентрируется вдоль горизонта Коши, вызывая сильные возмущения. Кроме того, входящая радиация испытывает рассеяние на кривизне пространства-времени, что ведет к появлению встречных потоков радиации. Эти потоки гравитационно взаимодействуют между собой, вызывая сильные нелинейные эффекты и в первую очередь появление сингулярности — бесконечной кривизны пространства-времени на месте горизонта Коши. Эта сингулярность слабая в том смысле, что при падении объектов сквозь нее они не успевают разрушиться приливными силами. Тем не менее, бесконечная кривизна ведет к тому, что классическая теория, без учета квантовых эффектов, здесь не применима. Квантовой теории тяготения пока не существует и мы должны считать всю область, где $K > K_{Planck}$, сингулярной.

Еще одним важным эффектом является гравитационная фокусировка любой радиации под действием гравитации встречных потоков радиации. Поток радиации вдоль горизонта Коши вместе с сингулярностью, возникшей на месте горизонта, сжимается под действием фокусировки и размер сингулярного горизонта уменьшается. Для примера рассмотрим коллапс КН, спровоцированный облучением импульсом Φ -поля шириной $\Delta = v_1 - v_0 = 2.0$, где v_0 — начало, v_1 — конец действия импульса, входящего во вход $r_{+,1}$, амплитудой $A = 0.2$. На рис. 7 изображена эволюция скаляра K вдоль линий по-

стоянного u . Наверху рисунка эти кривые достигают предела K_{Planck} , являющегося границей физической сингулярности. На рис. 7 кривые делятся на две группы, разделенные пунктирной кривой в середине рисунка, соответствующей $u = 24.60$. В правой группе линии со сравнительно небольшим наклоном, в левой группе линии, которые быстро становятся практически вертикальными. Чем вызвано такое резкое разделение? Дело в том, что причиной является структура сингулярности. Как сказано выше, из-за нелинейных процессов сингулярность возникает на месте горизонта Коши, который в нашем примере соответствует $r_h \approx 0.7$ в начале всех процессов при $u \rightarrow -\infty$. Правая группа кривых встречается именно эту слабую сингулярность. Как сказано выше, с течением u размер сингулярности Коши уменьшается и в конце концов образуется сильная сингулярность $r = 0$. Левая группа кривых $K(v)_{u=\text{const}}$ идет по области пространства-времени, где кривизна возрастает гораздо быстрее и они приходят к сильной сингулярности $r = 0$. Чтобы увидеть, как происходит сжатие горизонта Коши r_h при коллапсе, рассмотрим, как изменяется радиус r пучка радиации постоянного $u = \text{const}$, распространяющегося с переменным v . Рассмотрим это для разных величин возмущения A (амплитуды возмущающего излучения, вызывающего коллапс).

На рис. 8а амплитуда минимальна, $A = 0.010$, и мы видим, что входящие тестовые лучи концентрируются вокруг горизонта Коши $r_h = 0.7$. На рис. 8б амплитуда $A = 0.180$. Здесь мы видим, как тестовые лучи при больших значениях параметра A концентрируются у все меньших величин r . Это связано с уменьшением величины r_h с течением u . Наконец, на рис. 8в, где величина $A = 0.200$, тестовые лучи, соответствующие наименьшим u , достигают сингулярности $r = 0$.

5. ПРЕВРАЩЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНОЙ КРОВОЙ НОРЫ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ВО ВРЕМЕНИПОДОБНУЮ КРОВОУЮ НОРУ

Рассмотрим еще один тип коллапса КН. В разд. 3 обсуждался процесс коллапса пространственноподобной КН с относительно слабым магнитным полем. В этом разделе мы рассмотрим противоположный случай, когда магнитное поле очень сильно. Пусть поле удовлетворяет соотношению (по порядку величины)

$$q^2 \approx r_{throat} m. \tag{15}$$

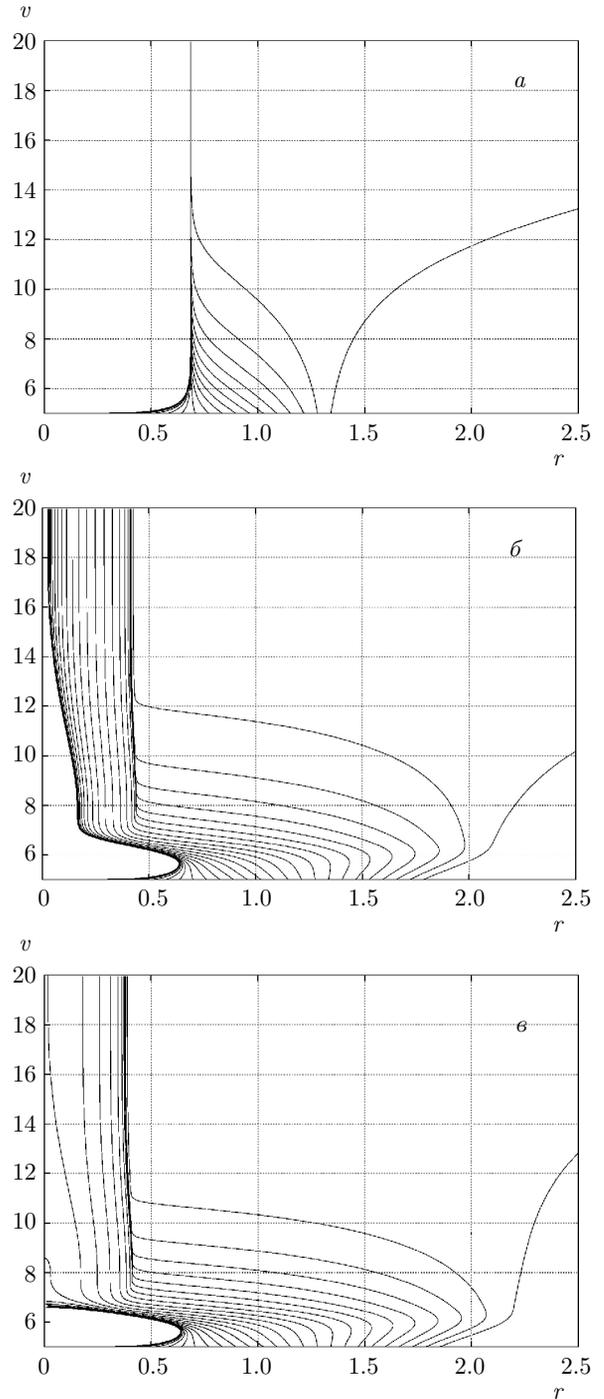


Рис. 8. Линии v как функции r . Вдоль линий $u = \text{const}$ возмущающие импульсы имеют параметры: а) $\Delta = 2, A = 0.010$; б) $\Delta = 2, A = 0.180$; в) $\Delta = 2, A = 0.200$

В этом случае поле влияет на динамику коллапса и на структуру пространства-времени в эпоху, когда формируется район $r \approx r_{Cauchy} \approx r_h$ (по порядку величины). Хотя, насколько нам известно, этот этап процесса не проинтегрирован численно непо-

9. C. Armendariz-Picon, Phys. Rev. D **65**, 104010 (2002).
10. J. Ellis, Math. Phys. **14**, 104 (1973).
11. K. A. Bronnikov, Acta Phys. Polon. B **4**, 251 (1973).
12. M. S. Morris and K. S. Thorne, Amer. J. Phys. **56**, 395 (1989).
13. J. A. Gonzalez, F. S. Guzman, and O. Sarbach, Class. Quant. Grav. **26**, 015010 (2009).
14. K. A. Bronnikov, L. N. Lipatova, I. D. Novikov, and A. A. Shatskiy, Grav. Cosmol. **19**, 269 (2013).
15. И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, ЖЭТФ **141**, 919 (2012).
16. Д. И. Новиков, А. Г. Дорошкевич, И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, Астрон. ж. **86**, 1 (2009).
17. Shinkai Hisan-aki and S. A. Hayward, Phys. Rev. D **66**, 044005 (2002).
18. J. A. Gonzalez, F. S. Guzman, and O. Sarbach, Class. Quant. Grav. **26**, 015011 (2009).
19. A. Doroshkevich, J. Hansen, I. Novikov, and A. Shatskiy, Int. J. Mod. Phys. **18**, 1665 (2009).
20. A. Doroshkevich, J. Hansen, D. Novikov, I. Novikov, Dong-Ho Park, and A. Shatskiy, Phys. Rev. D **81**, 124011 (2010).
21. I. Hansen, A. Khokhlov, and I. Novikov, Phys. Rev. D **71**, 0064013 (2005).
22. А. А. Шацкий, И. Д. Новиков, Н. С. Кардашев, УФН **178**, 481 (2008).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).
24. E. Novikova and I. Novikov, Phys. Rev. D **81**, 104034 (2010).
25. E. Kazner, Amer. J. Math. **43**, 217 (1921).
26. G. Rozen, Phys. Rev. **136**, 2798 (1964).
27. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Строение и эволюция Вселенной*, Наука, Москва (1975).
28. Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, *Релятивистская астрофизика*, Наука, Москва (1967).
29. И. Д. Новиков, Письма в ЖЭТФ **3**, 223 (1966).
30. И. Д. Новиков, Астрон. ж. **43**, 911 (1966).
31. V. Frolov and I. Novikov, *Black Hole Physics*, Kluwer Acad. Publ. (1998).
32. А. Г. Дорошкевич, И. Д. Новиков, Астрон. ж. **47**, 948 (1970).