

РАДИАЦИОННЫЙ ВКЛАД В $p_{\perp}$ -УШИРЕНИЕ БЫСТРЫХ ПАРТОНОВ В КВАРК-ГЛЮОННОЙ ПЛАЗМЕ

Б. Г. Захаров*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 12 мая 2019 г.,
после переработки 12 мая 2019 г.
Принята к публикации 17 мая 2019 г.

Изучается вклад радиационных процессов в $p_{\perp}$ -уширение быстрых партон в кварк-глюонной плазме. Расчеты выполнены вне рамок приближения мягких глюонов. Показано, что для условий соударений тяжелых ионов на RHIC и LHC радиационная поправка к $\langle p_{\perp}^2 \rangle$ отрицательна и может быть сравнима по абсолютной величине с нерадиационным вкладом. Это предсказание кардинально отличается от предсказываемого ранее в литературе существенного положительного вклада радиационных процессов в $p_{\perp}$ -уширение.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова

DOI: 10.1134/S0044451019100055

1. ВВЕДЕНИЕ

Результаты экспериментов по соударениям релятивистских тяжелых ядер, выполненных на коллайдерах RHIC и LHC, дают целый ряд свидетельств об образовании в начальной фазе соударения ядер горячей КХД-материи в фазе кварк-глюонной плазмы (КГП). В пользу образования КГП говорит успешное моделирование АА-соударений в гидродинамических моделях, которые требуют образование среды с температурой, в 2–4 раза большей температуры деконфайнмента $T_c \approx 160$ МэВ при собственном времени $\tau \sim 0.5 - 1$ фм [1–3]. Обнаруженное в экспериментах по АА-соударениям подавление спектров частиц с большими поперечными импульсами частиц, характеризуемое коэффициентом ядерной модификации R_{AA} , также рассматривается как сигнал рождения КГП [3, 4]. Общепринято, что подавление спектров частиц, которое для RHIC и LHC является весьма значительным ($R_{AA} \sim 0.1 - 0.2$ в центральных соударениях для частиц с $p_{\perp} \sim 10 - 20$ ГэВ), связано с модификацией струй за счет столкновительных [5] и радиационных [6–12] энергетических потерь быстрых партон в КГП. Эта модификация

струй в КГП в литературе обычно называется гашением струй (jet quenching, JQ). Для условий RHIC и LHC доминирующий вклад в энергетические потери дает радиационный механизм индуцированного излучения глюонов [13, 14]. Индуцированное излучение глюонов вызывается многократными перерасеяниями партон в среде. Для условий RHIC и LHC индуцированное глюонное излучение быстрых кварков и глюонов является существенно коллективным эффектом, в котором важное значение имеют кратные перерасеяния, приводящие, как и в излучении фотонов электронами в обычной материи, к подавлению Ландау – Померанчука – Мигдала [15, 16]. Имеющиеся в литературе подходы к радиационным энергетическим потерям и эффекту Ландау – Померанчука – Мигдала в КХД основаны на приближении излучения одного глюона [6–12]. Индуцированный спектр излучения одного глюона быстрым партоном в среде можно выразить через решение двумерного уравнения Шредингера с мнимым потенциалом [7, 9], который выражается через произведение плотности КГП и дипольного сечения для рассеяния $q\bar{q}$ -пары на конститuyente КГП, $\sigma_{q\bar{q}}(\rho)$ (здесь ρ — размер $q\bar{q}$ -пары). В квадратичном приближении $\sigma_{q\bar{q}}(\rho) \approx C\rho^2$ индуцированный глюонный спектр может быть выражен через функцию Грина гармонического осциллятора с комплексной частотой. В осцилляторном приближении квадрат частоты

* E-mail: bgz@itp.ac.ru

ты пропорционален известному транспортному коэффициенту $\hat{q}$ [7, 8], определяемому соотношением $\hat{q} = 2Cn$, где n — плотность среды.

Для анализа явления JQ требуется учет и многоглюонных процессов. Однако даже в упрощенном осцилляторном приближении [17] учет многоглюонных процессов становится сложной задачей [18]. В настоящее время учет излучения нескольких глюонов обычно проводится в приближении независимого излучения глюонов [19]. В этом приближении удастся получить разумное согласие с данными RHIC и LHC по ядерным коэффициентам модификации R_{AA} [20, 21]. Так как энергетические потери партонов существенно зависят от плотности среды, анализ данных по R_{AA} является эффективным инструментом для диагностики КГП, рождающейся в АА-соударениях. При расчетах радиационных энергетических потерь в осцилляторном приближении данные по R_{AA} позволяют получить информацию о величине $\hat{q}$ в плазменном файерболле и тем самым о плотности КГП. Важно, что, несмотря на приближенный характер современных подходов к JQ, плотность энтропии/энергии КГП, требуемая для согласия с данными RHIC и LHC по R_{AA} , разумно согласуется с результатами, полученными в гидродинамических моделях АА-соударений.

Наряду с модификацией продольной структуры струи, приводящей к подавлению спектров частиц, перераспределения быстрых партонов в КГП должны менять и направление струи. Для отдельного партона интенсивность изменения его поперечного (по отношению к направлению скорости начального партона) импульса $p_\perp$ за счет многократного рассеяния в среде в осцилляторном приближении характеризуется тем же самым транспортным коэффициентом $\hat{q}$ [8], который определяет и индуцированное глюонное излучение. Для прохождения партона через однородную среду средний квадрат поперечного импульса дается соотношением

$$\langle p_\perp^2 \rangle = \hat{q}L, \quad (1)$$

где L — длина пути в среде. Кулоновские эффекты, которые теряются в квадратичном приближении, приводят к небольшому (логарифмическому) отклонению от чисто линейной зависимости $\langle p_\perp^2 \rangle$ от L . На эксперименте $p_\perp$ -уширение для быстрых партонов в струе может проявляться в увеличении азимутальной декорреляции для струй в двухструйных событиях (или декорреляции фотона и струи в событиях фотон-струя) в АА-соударениях по сравнению с pp -соударениями. Наблюдение эффектов, связанных с $p_\perp$ -уширением, может дать прямую инфор-

мацию о $\hat{q}$ для файерболла КГП в АА-соударениях. Для понимания механизмов JQ было бы очень интересно провести сравнение значений $\hat{q}$, извлекаемых из данных по R_{AA} и данных по $p_\perp$ -уширению струй. Экспериментальное обнаружение эффектов $p_\perp$ -уширения струй осложняется тем, что даже для pp -соударений имеются сильные эффекты азимутальной декорреляции струй, связанные с судакскими формфакторами [22]. Поэтому для обнаружения $p_\perp$ -уширения струй, вызванного взаимодействием с КГП, требуется проведение измерений с высокой точностью. Имеющиеся данные при энергиях RHIC [23] и LHC [24] пока не позволяют сделать определенные выводы о величине $p_\perp$ -уширения струй в КГП. Тем не менее ожидается, что повышение точности данных даст возможность наблюдать эффекты $p_\perp$ -уширения струй [25].

Одной из важных теоретических задач, возникающих в связи с $p_\perp$ -уширением струй в КГП (а также и с явлением JQ), является вопрос о вкладе в $p_\perp$ -уширение радиационных поправок, связанных с излучением мягких глюонов [26–28]. Ожидалось, что эффекты отдачи при излучении мягких глюонов должны приводить к увеличению $p_\perp$ -уширения. Так как длина формирования мягких глюонов мала, этот эффект можно считать локальным по продольной координате, и интерпретировать как перенормировку $\hat{q}$. В работе [27] было обнаружено, что основной вклад в радиационную поправку к $\langle p_\perp^2 \rangle$ для однородной КГП имеет дважды логарифмический вид:

$$\langle p_\perp^2 \rangle_{rad} \sim \frac{\alpha_s N_c \hat{q} L}{\pi} \ln^2 \left(\frac{L}{l_0} \right), \quad (2)$$

где l_0 — размер порядка дебаевского радиуса в КГП. При этом для типичной длины пути партона в КГП в центральных соударениях тяжелых ядер, $L \sim 5$ фм, радиационный вклад в $\langle p_\perp^2 \rangle$ оказывается сравним по величине с обычным нерадационным вкладом (1). Для расчета радиационного вклада в $p_\perp$ -уширение в работе [27] использовалось обобщение подхода работы [9] для расчета спектра по энергии индуцированного излучения глюонов на случай двойного дифференциального спектра по поперечным импульсам и энергии. Следует отметить, что соответствующие формулы, вне рамок приближения мягких глюонов, были получены ранее в нашей работе [29] (см. также [30, 31]), которая, видимо, была неизвестна авторам работы [27]. В приближении мягких глюонов индуцированный спектр по энергиям и поперечным импульсам обсуждался также в [12].

В настоящей работе, используя технику подхода работы [9] в форме, развитой в [29] для случая спектра по фейнмановской переменной и поперечному импульсу для индуцированного перехода $a \rightarrow bc$ в среде, мы проводим анализ радиационного вклада в $p_{\perp}$ -уширение вне рамок приближения мягких глюонов (мы называем формализм, развитый в работах [9, 29], методом интеграла по путям на световом конусе и используем сокращение LCPI (light-cone path integral)). Мы показываем, что в этом случае появляются не дважды логарифмические члены, связанные с перерассеяниями в КГП начального партона, которые вносят отрицательный вклад в $p_{\perp}$ -уширение, так что полный вклад $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad}$ для условий RHIC и LHC оказывается отрицательным. В отличие от дважды логарифмического вклада, рассмотренного в работе [27], этот вклад не является локальным и не может интерпретироваться как перенормировка транспортного коэффициента $\hat{q}$. Как и в [27], анализ проводится для однородной КГП в осцилляторном приближении.

План статьи выглядит следующим образом. В разд. 2 для удобства читателя мы даем обзор метода LCPI для расчета двойного дифференциального спектра по продольной фейнмановской переменной x и поперечному импульсу для индуцированных переходов $a \rightarrow bc$. В разд. 3 обсуждается вычисление радиационного вклада в $p_{\perp}$ -уширение. В разд. 4 представлены численные результаты для условий RHIC и LHC. Выводы представлены в разд. 5. Некоторые формулы, относящиеся к нашим расчетам, приведены в двух приложениях.

2. СПЕКТР ИНДУЦИРОВАННОГО ПЕРЕХОДА $a \rightarrow bc$ В РАМКАХ МЕТОДА LCPI

В этом разделе для удобства читателя мы кратко излагаем основные моменты формализма LCPI [9, 29] для процессов типа $a \rightarrow bc$ в аморфной среде. В LCPI-подходе предполагается, что энергии всех частиц велики по сравнению с их массами. Предполагается также, что поперечные импульсы частиц малы по сравнению с их энергиями, т. е. анализ проводится в приближении малых углов (определяемых относительно направления импульса начальной частицы a). Это приближение является очень хорошим для радиационных процессов при высоких энергиях в КЭД [32]. Оно остается достаточно хорошим и для процессов с быстрыми партонами в КХД-материи [33]. В LCPI-подходе различие конечных формул

для вероятности перехода $a \rightarrow bc$ для абелевого и неабелевого случаев оказывается минимальным. Для релятивистских частиц спинные эффекты при взаимодействии частиц с материей можно не учитывать, и многократные перерассеяния частиц в материи происходят так же, как для скалярных частиц. Спинные эффекты проявляют себя только в появлении вершинных операторов для перехода $a \rightarrow bc$ и имеют вид, аналогичный для этих переходов в вакууме. Эволюция же волновых функций в среде, до и после процесса расщепления $a \rightarrow bc$, в основном по энергиям частиц приближении не зависит от спинных факторов. Для простоты мы проиллюстрируем формализм для перехода $a \rightarrow bc$ в электромагнитном поле аморфной среды для случая бесспиновых частиц с лагранжианом взаимодействия полей a, b, c между собой,

$$L_{int} = \lambda \hat{\psi}_b^\dagger \hat{\psi}_b^\dagger \hat{\psi}_a + \text{H.c.} \quad (3)$$

2.1. Переход $a \rightarrow bc$ в среде для скалярных частиц

Будем считать, что ось z выбрана по направлению импульса начальной частицы a до взаимодействия со средой, которая расположена в конечной области $0 < z < L$ и однородна по поперечным координатам. Элемент $\hat{S}$ -матрицы для индуцированного перехода $a \rightarrow bc$ для лагранжиана (3) в поле среды может быть записан в виде

$$\langle bc | \hat{S} | a \rangle = i \int dt d\mathbf{r} \lambda \psi_b^*(t, \mathbf{r}) \psi_c^*(t, \mathbf{r}) \psi_a(t, \mathbf{r}), \quad (4)$$

где ψ_i — волновые функции частиц во внешнем поле среды. Каждая из исходных волновых функций ψ_i удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона

$$[(\partial_\mu + ie_i A_\mu)(\partial^\mu + ie_i A^\mu) + m_i^2] \psi_i(t, \mathbf{r}) = 0, \quad (5)$$

где e_i — заряд частицы. Рассмотрим сначала случай начальной частицы, налетающей на среду из бесконечности. В этом случае для частицы a следует брать приходящую волновую функцию, имеющую вид плоской волны при $z \rightarrow -\infty$, а для конечных частиц b и c — уходящие волновые функции, имеющие вид плоских волн при $z \rightarrow \infty$. Мы предполагаем, что $m_a < m_b + m_c$, и поэтому в вакууме переход $a \rightarrow bc$ отсутствует. Волновые функции быстрых частиц при $E_i \gg m_i$ являются быстроосциллирующими функциями переменных t и z . Поэтому удобно записать ψ_i в виде

$$\psi_i(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2E_i}} \exp[-iE_i(t - z)] \phi_i(t, \mathbf{r}), \quad (6)$$

где $\mathbf{r} = (z, \boldsymbol{\rho})$, $\boldsymbol{\rho}$ — поперечная координата. Как обычно, мы нормируем потоки для свободных плоских волн на единицу, что соответствует $|\phi_i| = 1$ при $z \rightarrow -\infty$ для $i = a$ и $z \rightarrow \infty$ для $i = b, c$. Очевидно, что в выражении (6) зависимость ϕ_i (мы будем называть эти функции поперечными волновыми функциями) от t и продольной координаты z должна быть плавной. Для случая, не зависящего от времени внешнего потенциала, поперечные волновые функции ϕ_i не зависят от t и являются функциями продольной переменной z и поперечного вектора $\boldsymbol{\rho}$. В этом случае в $\hat{S}$ -матричном элементе, после интегрирования по t , можно выделить δ -функцию по изменению энергии и записать его через интеграл по пространственным переменным:

$$\langle bc | \hat{S} | a \rangle = \frac{i2\pi\delta(E_b + E_c - E_a)}{\sqrt{8E_a E_b E_c}} \int_{z_i}^{z_f} dz \times \\ \times \int d\boldsymbol{\rho} \lambda \phi_b^*(z, \boldsymbol{\rho}) \phi_c^*(z, \boldsymbol{\rho}) \phi_a(z, \boldsymbol{\rho}), \quad (7)$$

где $z_i = -\infty$, $z_f = \infty$.

Из соотношения (7) с помощью золотого правила Ферми для усредненной по состояниям мишени дифференциальной вероятности перехода $a \rightarrow bc$ можно получить

$$\frac{dP}{dx d\mathbf{q}_b d\mathbf{q}_c} = \frac{2}{(2\pi)^4} \text{Re} \int d\boldsymbol{\rho}_1 d\boldsymbol{\rho}_2 \times \\ \times \int_{z_1 < z_2} dz_1 dz_2 \hat{g} \langle W(z_1, \boldsymbol{\rho}_1) W^*(z_2, \boldsymbol{\rho}_2) \rangle, \quad (8)$$

где

$$W(z, \boldsymbol{\rho}) = \phi_b^*(z, \boldsymbol{\rho}) \phi_c^*(z, \boldsymbol{\rho}) \phi_a(z, \boldsymbol{\rho}),$$

$\mathbf{q}_{b,c}$ — поперечные импульсы частиц b и c (отметим, что ниже жирный шрифт будет использоваться только для поперечных векторов), $x = x_b = E_b/E_a$ — фейнмановская переменная частицы b (так как $E_b + E_c = E_a$, можно использовать в качестве продольной переменной и $x = x_c = E_c/E_a$). Знак $\langle \dots \rangle$ в (8) означает усреднение по состояниям мишени, а $\hat{g}$ обозначает вершинный фактор,

$$\hat{g} = \frac{\lambda^2}{16\pi x_b x_c E_a^2}. \quad (9)$$

Как будет видно ниже, для реальных КЭД и КХД этот фактор будет дифференциальным оператором. Отметим, что, в отличие от элемента $\hat{S}$ -матрицы (7), в интеграле по $z_{1,2}$ в формуле (8) могут быть существенны области $|z_{1,2}| \rightarrow \infty$. Для корректного вычисления вклада этих областей при расчете вероят-

ности перехода $a \rightarrow bc$ в уравнении (9) удобно считать, что взаимодействие (3) адиабатически выключается при $z \rightarrow \pm\infty$. При этом в (9) $\lambda^2 \rightarrow \lambda(z_1)\lambda(z_2)$, где $\lambda(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Пока мы не использовали явной формы поперечных волновых функций. При $E_i \gg m_i$, после подстановки (6) в (5), в главном по энергии порядке из (5) можно получить уравнение, описывающее эволюцию волновой функции $\phi_i(z, \boldsymbol{\rho})$ по переменной z :

$$i \frac{\partial \phi_i}{\partial z} = \hat{H}_i \phi_i, \quad (10)$$

$$\hat{H}_i = \frac{(\mathbf{p}_\perp - e_i \mathbf{A}_\perp)^2 + m_i^2}{2\mu_i} + e_i(A^0 - A^3), \quad (11)$$

где $\mu_i = E_i$. Функцию ϕ_a можно записать в виде

$$\phi_a(z, \boldsymbol{\rho}) = \int d\boldsymbol{\rho}' K_a(\boldsymbol{\rho}, z | \boldsymbol{\rho}', z_i) \phi_a(z_i, \boldsymbol{\rho}'). \quad (12)$$

Здесь $z_i \rightarrow -\infty$, величина $\phi_a(z_i, \boldsymbol{\rho}) \propto \exp(i\mathbf{q}_a \cdot \boldsymbol{\rho})$ (общая фаза волновой функции для нас несущественна), K_a — запаздывающая функция Грина для уравнения Шредингера (10) для $i = a$. Волновые функции для конечных частиц могут быть выражены через их значения при $z_f \rightarrow \infty$ и опережающие функции Грина уравнения (10) для $i = b, c$. Используя тот факт, что для уравнения Шредингера опережающая функция Грина связана с запаздывающей функцией Грина соотношением

$$K_{ret}(\boldsymbol{\rho}_2, t_2 | \boldsymbol{\rho}_1, t_1) = K_{adv}^*(\boldsymbol{\rho}_1, t_1 | \boldsymbol{\rho}_2, t_2),$$

мы можем записать $\phi_{b,c}(z, \boldsymbol{\rho})$ в виде

$$\phi_{b,c}(z, \boldsymbol{\rho}) = \int d\boldsymbol{\rho}' K_{b,c}^*(\boldsymbol{\rho}', z_f | \boldsymbol{\rho}, z) \phi_{b,c}(z_f, \boldsymbol{\rho}'). \quad (13)$$

Тогда, после подстановки (12) и (13) в (8), дифференциальный спектр будет выражен через поперечные матрицы плотности начальной частицы при $z = z_i$ и конечных частиц при $z = z_f$ и запаздывающие функции Грина, как показано на рис. 1а. На этой диаграмме функции Грина K и комплексно-сопряженные функции Грина K^* представлены соответственно стрелками « $\rightarrow$ » и « $\leftarrow$ ». Штриховые линии показывают поперечные матрицы плотности для плоских волн $\rho_i(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') = \exp[i\mathbf{q}_i \cdot (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}')] (читаем, что для начальной частицы a $\mathbf{q}_a = 0$ при $z = z_i$).$

Отметим, что условие точного сохранения энергии в (7) не является обязательным для вывода (8), но несколько упрощает формулы. При меняющемся во времени потенциале энергия, естественно, не сохраняется строго. Однако ясно, что если типичная временная шкала среды много больше длины

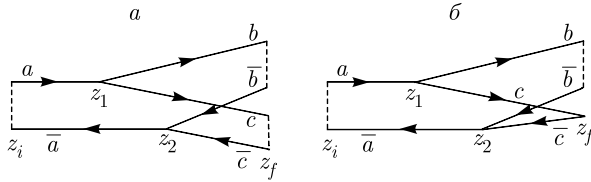


Рис. 1. а) Диаграммное представление для спектра перехода $a \rightarrow bc$ по продольной фейнмановской переменной и поперечным импульсам двух конечных частиц в методе LCPI. Штриховые линии показывают поперечные матрицы плотности начальной (до взаимодействия со средой при $z = z_i$) и конечных (после взаимодействия со средой при $z = z_f$) частиц; б) то же, что на рис. а, для спектра, проинтегрированного по поперечному импульсу частицы c

волны быстрых частиц, то эффекты нарушения сохранения энергии для быстрых частиц несущественны при вычислении вероятности процесса в главном по энергии приближении. Эти эффекты могут дать только подавленные по энергии поправки, учет которых был бы превышением точности наших приближений для вычисления функций ϕ_i . Можно сказать, что с точки зрения каждой быстрой частицы важен только потенциал, который она «чувствует» вдоль ее траектории $t - z = \text{const}$, и неважно, изменяется ли он во времени до и после ее прохождения. Физически это очевидно, так как при большом различии временных/энергетических шкал для среды и быстрых частиц каждая быстрая частица никогда не взаимодействует дважды с одним и тем же конститuentом среды. Для зависящего от времени потенциала среды можно также использовать формулу (8). При этом в гамильтониане (11) надо вычислять A^μ при $\xi = t - z = \text{const}$ с одинаковыми значениями ξ для амплитуды и комплексно-сопряженной амплитуды. В выводе спектра (8) без использования точного сохранения энергии (7) условие, что в (8) функции $W(z_1, \rho_1)$ и $W(z_2, \rho_2)$ входят при одинаковых значениях ξ_1 и ξ_2 , возникает после интегрирования по энергии одной из конечных частиц, которое дает $\delta(\xi_1 - \xi_2)$. Эта δ -функция затем убирается интегрированием по t_1 , а интегрирование по t_2 дает просто полный временной интервал процесса взаимодействия входящего волнового пакета со средой. Для единичного интервала времени это приводит к формуле (8).

В подходе LCPI все функции Грина при вычислении вероятности перехода, описываемой диаграммой на рис. 1а, мы записываем в фейнмановской форме интеграла по путям [34]

$$K_i(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) = \int D\rho \times \exp \left\{ i \int_{z_1}^{z_2} dz \left[\frac{\mu_i(d\rho/dz)^2}{2} - e_i U(\rho, z) \right] - \frac{im_i^2(z_2 - z_1)}{2\mu_i} \right\}. \quad (14)$$

Здесь $U = A^\mu v_\mu$, где $v_\mu = (1, -d\rho/dz, -1)$ — 4-вектор скорости частицы. В главном порядке по энергии можно пренебречь поперечной компонентой v_μ при вычислении потенциала¹⁾, тогда $U \approx A^0 - A^3$. После записи всех функций Грина в форме (14) вероятность перехода $a \rightarrow bc$ представляется кратным интегралом по траекториям, включающим траектории частиц для верхней и нижней частей диаграммы на рис. 1а. Интегрирование идет по путям частиц в поперечной плоскости на световом конусе $t - z = \text{const}$. При этом для траекторий частиц, соответствующих комплексно-сопряженным функциям Грина внизу диаграммы рис. 1а, взаимодействие с потенциалом среды аналогично взаимодействию античастиц. Таким образом, в функциональном интеграле, соответствующем рис. 1а, подынтегральное выражение содержит взаимодействие со средой в виде вильсоновских факторов для частиц из верхней части и античастиц из нижней части (ниже, как и на рис. 1а, будем обозначать функции Грина и переменные для линий « $\leftarrow$ » как античастичные).

Основная идея LCPI-метода заключается в выполнении усреднения по состояниям среды на уровне подынтегрального выражения до вычисления функциональных интегралов в формуле для вероятности перехода. После выполнения этого усреднения по состояниям среды начальное взаимодействие траекторий с случайным потенциалом среды трансформируется во взаимодействие между траекториями. Для абелевого случая это взаимодействие описывается эффективным лагранжианом вида $L_{\text{eff}} = in\sigma_X/2$, где n — число атомов среды, σ_X — сечение рассеяния системы частиц и античастиц на отдельном атоме.

¹⁾ Это соответствует пренебрежению $\mathbf{A}_\perp$ в кинетической части гамильтониана (11). Для статического вектор-потенциала среды при отбрасывании $\mathbf{A}_\perp$ теряются как эффект продольного магнитного поля, так и эффект поперечного магнитного поля, связанный с производной от $\mathbf{A}_\perp$ по z . Однако для случайного вектор-потенциала аморфной среды оба этих эффекта подавлены по энергии по сравнению с тем, что может дать член A^3 в потенциале U (и, конечно, член A^0 , скажем, в кулоновской калибровке для обычных материалов), и их учет в главном по энергии приближении не имеет смысла.

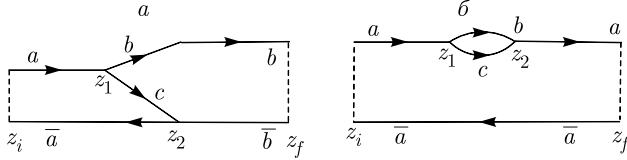


Рис. 2. а) Диаграммное представление для спектра перехода $a \rightarrow bc$, проинтегрированного по поперечному импульсу частицы c ; б) диаграммное представление для радиационной поправки к вероятности перехода $a \rightarrow a$ от виртуального процесса $a \rightarrow bc \rightarrow a$. Имеются также аналогичные диаграммы с перестановкой вершин между верхней и нижней частями диаграмм a и b

Рассмотрим спектр, проинтегрированный по поперечному импульсу $\mathbf{q}_c$. Это соответствует матрице плотности частицы c вида

$$\rho_c(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q}_c \exp[i(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\mathbf{q}_c] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (15)$$

В этом случае диаграмма на рис. 1а принимает вид диаграммы на рис. 1б, которая (даже еще до выполнения усреднения по состояниям среды) может быть трансформирована в диаграмму рис. 2а без участка с четырьмя траекториями. Эта трансформация основана на тождествах для функций Грина

$$\int d\mathbf{p}_2 K(\mathbf{p}_2, z_2 | \mathbf{p}_1, z_1) K^*(\mathbf{p}_2, z_2 | \mathbf{p}'_1, z_1) = \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1), \quad (16)$$

$$K(\mathbf{p}_2, z_2 | \mathbf{p}_1, z_1) = \int d\mathbf{p} K(\mathbf{p}_2, z_2 | \mathbf{p}, z) K(\mathbf{p}, z | \mathbf{p}_1, z_1). \quad (17)$$

Выражение для спектра, соответствующее диаграмме на рис. 2а, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx d\mathbf{q}_b} &= \frac{2}{(2\pi)^2} \text{Re} \int d\mathbf{p}_{bf} d\mathbf{p}_{\bar{b}f} d\mathbf{p}_{b2} d\mathbf{p}_{\bar{b}2} \times \\ &\times d\mathbf{p}_{a1} d\mathbf{p}_{\bar{a}1} d\mathbf{p}_{ai} d\mathbf{p}_{\bar{a}i} \exp[-i\mathbf{q}_b(\mathbf{p}_{bf} - \mathbf{p}_{\bar{b}f})] \times \\ &\times \int_{z_i}^{z_f} dz_1 \int_{z_1}^{z_f} dz_2 \hat{g}\langle S \rangle, \end{aligned} \quad (18)$$

где индексы « f », «1», «2», « i » у поперечных координат $\mathbf{p}$ означают, что по продольной координате z они соответствуют точкам $z_f, z_{1,2}, z_i$, расположенным, как показано на рис. 2а, как и в исходной формуле (8); $\langle \dots \rangle$ означает усреднение по состояниям среды, фактор S определен соотношением

$$\begin{aligned} S &= S_{b\bar{b}}(\mathbf{p}_{bf}, \mathbf{p}_{\bar{b}f}, z_f | \mathbf{p}_{b2}, \mathbf{p}_{\bar{b}2}, z_2) \times \\ &\times S_{bc\bar{a}}(\mathbf{p}_{b2}, \mathbf{p}_{c2}, \mathbf{p}_{\bar{a}2}, z_2 | \mathbf{p}_{b1}, \mathbf{p}_{c1}, \mathbf{p}_{\bar{a}1}, z_1) \times \\ &\times S_{a\bar{a}}(\mathbf{p}_{a1}, \mathbf{p}_{\bar{a}1}, z_2 | \mathbf{p}_{ai}, \mathbf{p}_{\bar{a}i}, z_i) \Big|_{\mathbf{p}_{c2}=\mathbf{p}_{b2}, \mathbf{p}_{c1}=\mathbf{p}_{b1}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Двухчастичные факторы $S_{b\bar{b}}$, $S_{a\bar{a}}$ определяются формулой

$$\begin{aligned} S_{i\bar{i}}(\mathbf{p}_{i2}, \mathbf{p}_{\bar{i}2}, z_2 | \mathbf{p}_{i1}, \mathbf{p}_{\bar{i}1}, z_1) &= \\ &= K_i(\mathbf{p}_{i2}, z_2 | \mathbf{p}_{i1}, z_1) K_i^*(\mathbf{p}_{\bar{i}2}, z_2 | \mathbf{p}_{\bar{i}1}, z_1), \end{aligned} \quad (20)$$

а трехчастичный фактор $S_{bc\bar{a}}$ для произвольных позиций концов линий $b, c, \bar{a}$ при z_1, z_2 есть

$$\begin{aligned} S_{bc\bar{a}}(\mathbf{p}_{b2}, \mathbf{p}_{c2}, \mathbf{p}_{\bar{a}2}, z_2 | \mathbf{p}_{b1}, \mathbf{p}_{c1}, \mathbf{p}_{\bar{a}1}, z_1) &= \\ &= K_b(\mathbf{p}_{b2}, z_2 | \mathbf{p}_{b1}, z_1) K_c(\mathbf{p}_{c2}, z_2 | \mathbf{p}_{c1}, z_1) \times \\ &\times K_{\bar{a}}^*(\mathbf{p}_{\bar{a}2}, z_2 | \mathbf{p}_{\bar{a}1}, z_1). \end{aligned} \quad (21)$$

Типичные значения $z_2 - z_1$ для диаграмм на рис. 1а и 2а определяются длиной когерентности (формирования) для перехода $a \rightarrow bc$, которая для релятивистских частиц может существенно превышать радиус корреляций в аморфной среде. Именно в таком режиме для перехода $a \rightarrow bc$ в КЭД могут быть важны многократные перерассеяния заряженных частиц на атомах среды, ответственные за эффект Ландау – Померанчука – Мигдала. В КХД такой режим является типичным для процессов расщепления быстрых партонов в холодной и горячей КХД-материи. В этом режиме для аморфного вещества усреднение по состояниям мишени в факторе S в (18) можно выполнить независимо для отдельных сомножителей, т. е. можно записать

$$\langle S \rangle = \langle S_{b\bar{b}} \rangle \langle S_{bc\bar{a}} \rangle \langle S_{a\bar{a}} \rangle. \quad (22)$$

Обсудим сначала вычисление двухчастичных факторов $\langle S_{i\bar{i}} \rangle$, каждый из которых является просто оператором эволюции поперечной матрицы плотности частицы i . Мы можем записать усредненный двухчастичный фактор в виде двукратного интеграла по путям:

$$\begin{aligned} \langle S_{i\bar{i}} \rangle(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}'_2, z_2 | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1, z_1) &= \int D\mathbf{p} D\mathbf{p}' \times \\ &\times \exp \left\{ i \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{\mu_i [(d\mathbf{p}/dz)^2 - (d\mathbf{p}'/dz)^2]}{2} \right\} \times \\ &\times \Phi_{i\bar{i}}(\{\mathbf{p} - \mathbf{p}'\}), \end{aligned} \quad (23)$$

где функционал $\Phi_{i\bar{i}}$ определен формулой

$$\Phi_{i\bar{i}}(\{\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'\}) = \left\langle \exp \left\{ -ie_i \int_{z_1}^{z_2} dz [U(\boldsymbol{\rho}(z), z) - U(\boldsymbol{\rho}'(z), z)] \right\} \right\rangle. \quad (24)$$

В (23), (24) мы учли, что для среды, инвариантной относительно поперечных смещений, правая часть выражения (24) в действительности является функционалом от одной функции $\boldsymbol{\tau}(z) = \boldsymbol{\rho}(z) - \boldsymbol{\rho}'(z)$. Для ситуации, когда длина $z_2 - z_1$ в двухчастичном факторе (23) много больше длины корреляций в среде, функционал $\Phi_{i\bar{i}}$ можно формально записать в виде

$$\bar{\Phi}_{i\bar{i}}(\{\boldsymbol{\tau}\}) = \exp \left[- \int dz P_i(\boldsymbol{\tau}(z), z) \right], \quad (25)$$

где конкретный вид функции $P_i(\boldsymbol{\tau}, z)$ зависит от модели среды. Нетрудно показать, что для модели среды в виде случайно распределенных статических рассеивающих центров (атомов) можно получить

$$P_i(\boldsymbol{\tau}(z), z) = \frac{n(z)\sigma_{i\bar{i}}(|\boldsymbol{\tau}(z)|)}{2}, \quad (26)$$

где $n(z)$ — локальная плотность среды, а $\sigma_{i\bar{i}}$ — полное сечение рассеяния диполя $i\bar{i}$ на отдельном атоме, определяемое соотношением

$$\sigma_{i\bar{i}}(|\boldsymbol{\rho}|) = 2 \int d\mathbf{b} \times \left\{ 1 - \exp \left[-ie_i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \left[\phi \left(\sqrt{(\mathbf{b} - \boldsymbol{\rho})^2 + \xi^2} \right) - \phi \left(\sqrt{\mathbf{b}^2 + \xi^2} \right) \right] \right] \right\}, \quad (27)$$

где $\phi(r)$ — потенциал отдельного атома. При выводе соотношений (25), (26) из (24) учтено, что на продольной шкале порядка размера атома поперечные координаты траекторий в исходном функциональном интеграле можно считать замороженными.

Тот факт, что $\Phi_{i\bar{i}}$ зависит только от относительного расстояния между траекториями, позволяет вычислить двойной функциональный интеграл (23) аналитически [35]. Результат имеет вид

$$\langle S_{i\bar{i}} \rangle(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2, z_2 | \boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1, z_1) = K_{i,v}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2 | \boldsymbol{\rho}_1, z_1) \times K_{i,v}^*(\boldsymbol{\rho}'_2, z_2 | \boldsymbol{\rho}'_1, z_1) \Phi_{i\bar{i}}(\{\boldsymbol{\tau}_l\}), \quad (28)$$

где $\boldsymbol{\tau}_l$ — линейная функция z ,

$$\boldsymbol{\tau}_l(z) = \frac{(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}'_2)(z - z_1) - (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}'_1)(z - z_2)}{z_2 - z_1}, \quad (29)$$

а $K_{i,v}$ — свободная функция Грина в вакууме,

$$K_{i,v}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2 | \boldsymbol{\rho}_1, z_1) = \frac{\mu_i}{2\pi i(z_2 - z_1)} \times \exp \left[\frac{i\mu_i(\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1)^2}{2(z_2 - z_1)} - \frac{im_i^2(z_2 - z_1)}{2\mu_i} \right]. \quad (30)$$

Возможность аналитического вычисления функционального интеграла в (23) можно предвидеть. Действительно, интеграл (23) можно записать как интеграл по переменной центра масс $\mathbf{R} = (\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}')/2$ и по $\boldsymbol{\tau}$. Для кинетического члена в экспоненте в выражении (23) в этих переменных можно получить

$$\int_{z_1}^{z_2} dz \mu_i \frac{d\mathbf{R}}{dz} \cdot \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dz} = \mu_i \left[\mathbf{R} \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dz} \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} dz \mathbf{R} \frac{d^2\boldsymbol{\tau}}{dz^2} \right]. \quad (31)$$

Из этой формулы видно, что функциональное интегрирование по переменной $\mathbf{R}$ можно провести как и для свободных функций Грина. Это интегрирование приводит при каждом z к $\delta(d^2\boldsymbol{\tau}/dz^2)$. Эта δ -функция снимается последующим интегрированием по $\boldsymbol{\tau}$ совершенно так же, как и в свободном случае. При этом $\delta(d^2\boldsymbol{\tau}/dz^2)$ гарантирует, что в конечной формуле функционал $\Phi_{i\bar{i}}$ должен вычисляться для функции $\boldsymbol{\tau}$, которая должна быть линейной по z (так как должно выполняться равенство $d\boldsymbol{\tau}/dz = \text{const}$). Таким образом, полный ответ должен быть произведением свободных функций Грина на фазовый фактор для одной линейной траектории $\boldsymbol{\tau}(z)$.

Перейдем к трехчастичному оператору $\langle S_{bc\bar{a}} \rangle$. Функциональный интеграл $\int D\boldsymbol{\rho}_b D\boldsymbol{\rho}_c D\boldsymbol{\rho}_{\bar{a}}$ удобно записать в новых переменных, $\int D\boldsymbol{\rho} D\boldsymbol{\rho}_a D\boldsymbol{\rho}_{\bar{a}}$, где $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_b - \boldsymbol{\rho}_c$ — относительная координата для системы bc , а $\boldsymbol{\rho}_a = x_b\boldsymbol{\rho}_b + x_c\boldsymbol{\rho}_c$ дает положение центра масс системы bc . Трехчастичный фазовый фактор $\Phi_{bc\bar{a}}$ для системы $bc\bar{a}$ до усреднения по состояниям мишени является функционалом от траекторий по переменным $\mathbf{R} = (\boldsymbol{\rho}_a + \boldsymbol{\rho}_{\bar{a}})/2$, $\boldsymbol{\rho}_{a\bar{a}} = \boldsymbol{\rho}_a - \boldsymbol{\rho}_{\bar{a}}$ и $\boldsymbol{\rho}$. Трансляционная инвариантность системы гарантирует, что после усреднения по состояниям материи зависимость от $\mathbf{R}$ в $\Phi_{bc\bar{a}}$ отсутствует. Совершенно аналогично случаю двухчастичного оператора, этот факт позволяет выполнить аналитически интегрирование $\int D\boldsymbol{\rho}_a D\boldsymbol{\rho}_{\bar{a}} = \int D\mathbf{R} D\boldsymbol{\rho}_{a\bar{a}}$. После этого трехчастичный фактор можно записать в виде

$$\langle S_{bc\bar{a}} \rangle(\boldsymbol{\rho}_{b2}, \boldsymbol{\rho}_{c2}, \boldsymbol{\rho}_{\bar{a}2}, z_2 | \boldsymbol{\rho}_{b1}, \boldsymbol{\rho}_{c1}, \boldsymbol{\rho}_{\bar{a}1}, z_1) = K_{a,v}(\boldsymbol{\rho}_{a2}, z_2 | \boldsymbol{\rho}_{a1}, z_1) K_{\bar{a},v}^*(\boldsymbol{\rho}_{\bar{a}2}, z_2 | \boldsymbol{\rho}_{\bar{a}1}, z_1) \times \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2 | \boldsymbol{\rho}_1, z_1), \quad (32)$$

где $\rho_{ai} = x_b \rho_{bi} + x_c \rho_{ci}$, $\rho_i = \rho_{bi} - \rho_{ci}$ для $i = 1, 2$, а последний множитель есть функциональный интеграл по ρ вида

$$\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) = \int D\rho \exp \left\{ i \int_{z_1}^{z_2} dz \frac{M(d\rho/dz)^2}{2} - \frac{i(z_2 - z_1)\epsilon^2}{2M} \right\} \Phi_{bc\bar{a}}(\{\rho\}, \{\rho_{a\bar{a}}\}). \quad (33)$$

Здесь

$$M = E_a x_b x_c, \quad \epsilon^2 = m_b^2 x_c + m_c^2 x_b - m_a^2 x_b x_c,$$

а $\rho_{a\bar{a}}^l$ обозначает линейную по z функцию,

$$\rho_{a\bar{a}}^l(z) = \frac{\rho_{a\bar{a}}(z_2)(z - z_1) - \rho_{a\bar{a}}(z_1)(z - z_2)}{z_2 - z_1}, \quad (34)$$

которая является полным аналогом функции τ_l (29) для двухчастичного оператора $\langle S_{i\bar{i}} \rangle$ (28). Усреднение по состояниям мишени носит локальный характер с типичной длиной корреляций по продольной переменной z порядка размера атома. Поэтому усредненный фазовый фактор $\Phi_{bc\bar{a}}$ можно формально записать в виде

$$\bar{\Phi}_{bc\bar{a}}(\{\rho\}, \{\rho_{a\bar{a}}\}) = \exp \left[-i \int dz v(z, \rho(z), \rho_{a\bar{a}}(z)) \right]. \quad (35)$$

Как и в случае двухчастичного фазового фактора, форма функции $v(z, \rho, \rho_{a\bar{a}})$ зависит от модели среды, но ее конкретный вид не важен для вывода спектра. С учетом (35) мы можем сказать, что $\mathcal{K}$ является запаздывающей функцией Грина для уравнения Шредингера с гамильтонианом

$$\hat{H} = \frac{\mathbf{q}^2 + \epsilon^2}{2M} + v(z, \rho, \rho_{a\bar{a}}) = -\frac{1}{2M} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 + v(z, \rho, \rho_{a\bar{a}}) + \frac{1}{L_f}. \quad (36)$$

Здесь мы ввели величину

$$L_f = 2E_a x_b x_c / \epsilon^2, \quad (37)$$

которая может рассматриваться как длина формирования для перехода $a \rightarrow bc$ в пределе низкой плотности среды [9], так как в этом пределе она определяет типичную шкалу $z_2 - z_1$ для диаграмм на рис. 1а, 2а.

Для среды в виде системы статических рассеивающих центров эффективный трехчастичный потенциал в фазовом факторе (35) и гамильтониане (36) можно записать как

$$v(z, \rho, \rho_{a\bar{a}}) = -\frac{i\sigma_{bc\bar{a}}(\rho, \rho_{a\bar{a}})n(z)}{2}, \quad (38)$$

где $\sigma_{bc\bar{a}}$ — сечение рассеяния на атоме трехчастичной системы $bc\bar{a}$. Трехчастичное сечение (и потенциал v) зависит и от продольной переменной x_b , как и «масса» M в гамильтониане (36). Ниже, как и в формулах (36), (38), не будем указывать явно эту x -зависимость.

После подстановки полученных формул для двухчастичных и трехчастичного операторов в формулу (18) мы выполняем интегрирование по конечным поперечным координатам при z_i, z_1, z_2, z_f , переходя к координатам центра масс пар и относительным координатам (например, $\mathbf{R}_{bf} = (\rho_{bf} + \rho_{\bar{b}f})/2$, $\tau_{bf} = \rho_{bf} - \rho_{\bar{b}f}$):

$$\int d\rho_{bf} d\rho_{\bar{b}f} d\rho_{b2} d\rho_{\bar{b}2} d\rho_{a1} d\rho_{\bar{a}1} d\rho_{ai} d\rho_{\bar{a}i} = \int d\mathbf{R}_{bf} d\tau_{bf} d\mathbf{R}_{b2} d\tau_{b2} d\mathbf{R}_{a1} d\tau_{a1} d\mathbf{R}_{ai} d\tau_{ai}. \quad (39)$$

Интегрирование по координатам $\mathbf{R}$, τ при $z_i, z_{1,2}$ может быть выполнено аналитически с использованием формулы

$$\int d\mathbf{R}_1 K_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) K_v^*(\rho'_2, z_2 | \rho'_1, z_1) = \left(\frac{\mu}{2\pi(z_2 - z_1)} \right)^2 \int d\mathbf{R}_1 \times \exp \left[\frac{i\mu(\tau_2 - \tau_1)(\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)}{(z_2 - z_1)} \right] = \delta(\tau_2 - \tau_1), \quad (40)$$

где $\tau_i = \rho_i - \rho'_i$, $\mathbf{R}_i = (\rho_i + \rho'_i)/2$. После этого интегрирования траектории для участков (z_i, z_1) и (z_2, z_f) в фазовых факторах становятся параллельными, причем относительное расстояние τ_{bf} для конечной пары $b\bar{b}$ связано с относительным расстоянием τ_{ai} для начальной пары $a\bar{a}$ соотношением (ниже будем обозначать эти векторы как τ_f и τ_i) $\tau_i = x_b \tau_f$. На участке (z_1, z_2) траектория центра масс пары bc оказывается параллельна линии $\bar{a}$, и вектор $\rho_{a\bar{a}}$, который входит в потенциал (38), равен τ_i . Принимая полную площадь, возникающую от интегрирования по $\mathbf{R}_{bf}$, единичной, формулу (39) можем записать в виде

$$\frac{dP}{dx d\mathbf{q}_b} = \frac{2}{(2\pi)^2} \text{Re} \int d\tau_f \exp(-i\mathbf{q}_b \cdot \tau_f) \times \\ \times \int_{z_i}^{z_f} dz_1 \int_{z_1}^{z_f} dz_2 \hat{g}\Phi_f(\tau_f, z_2) \times \\ \times \mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Phi_i(\tau_i, z_1) \Big|_{\rho_2=\tau_f, \rho_1=0}, \quad (41)$$

где

$$\Phi_i(\tau_i, z_1) = \exp \left[- \int_{z_i}^{z_1} dz P_a(\tau_i, z) \right], \quad (42)$$

$$\Phi_f(\tau_f, z_2) = \exp \left[- \int_{z_2}^{z_f} dz P_b(\tau_f, z) \right]. \quad (43)$$

Можно ожидать, что типичный размер интервала $\Delta z = z_2 - z_1$ в формуле (41) во всяком случае не должен существенно превышать длину формирования L_f (37) для перехода $a \rightarrow bc$ в вакууме. Однако для конечной среды интегрирование по переменной z_1 в формуле (41) в областях вдали от мишени, т. е. при $|z_1| \gg L$, требует осторожности. Действительно, вдали от мишени функция Грина $\mathcal{K}$ совпадает со свободной функцией Грина:

$$\mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) = \frac{M}{2\pi i(z_2 - z_1)} \times \\ \times \exp \left\{ i \left[\frac{M(\rho_2 - \rho_1)^2}{2(z_2 - z_1)} - \frac{(z_2 - z_1)\epsilon^2}{2M} \right] \right\}. \quad (44)$$

Для свободной функции Грина интеграл по z_2 можно выразить через функцию Бесселя K_0 :

$$\int_{z_1}^{\infty} dz_2 \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) = \frac{M}{i\pi} K_0(|\rho_2 - \rho_1|\epsilon). \quad (45)$$

Действительная часть этого интеграла, которая нам нужна, равна нулю. Однако в нашем случае эта исчезающая величина умножается на бесконечность из-за интегрирования по z_1 до бесконечности. Раскрытие возникающей неопределенности $0 \cdot \infty$ требует аккуратных вычислений с адиабатически отключающимся взаимодействием при больших $|z|$. Мы выполним это, проводя вычисления для $\lambda(z) = \lambda \exp(-\delta|z|)$ с последующим переходом к пределу $\delta \rightarrow 0$. Появление вкладов от z -областей на больших расстояниях от мишени есть плата за то, что мы имеем дело с квадратом матричного элемента. Для самого матричного элемента (7) вклады очень больших $|z|$ исчезают из-за осцилляций произведения волновых функций. Но для квадрата матричного элемента эти осцилляции в матричном элемен-

те и в комплексно-сопряженном матричном элементе сокращаются, и требуется аккуратная трактовка вклада от больших $|z|$.

В формуле (41) в интеграле по z_2 мы сделаем в подынтегральном выражении тождественную замену

$$\Phi_f(\tau_f, z_2) \mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Phi_i(\tau_i, z_1) \rightarrow \Phi_f(\tau_f, z_2) \times \\ \times [\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Phi_i(\tau_i, z_1) + \\ + [\Phi_f(\tau_f, z_2) - 1] \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) [\Phi_i(\tau_i, z_1) - 1] + \\ + [\Phi_f(\tau_f, z_2) - 1] \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) + \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \times \\ \times [\Phi_i(\tau_i, z_1) - 1] + \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1). \quad (46)$$

При подстановке (46) в (41) последний член должен давать нуль, так как переход $a \rightarrow bc$ в вакууме отсутствует. Первое и второе слагаемые в правой части выражения (46) не содержат вкладов от областей вдали от мишени. Важными для раскрытия неопределенности $0 \cdot \infty$ являются слагаемые, которые содержат интегрирование по z на больших расстояниях до мишени и после мишени. В Приложении А мы показываем, что вклад этих членов в спектр можно выразить через волновую функцию на световом конусе для фоковской компоненты $|bc\rangle$ частицы a , Ψ . Он равен

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau_f d\tau'_f \exp(-i\mathbf{q}_b \cdot \tau_f) \Psi^*(x, \tau'_f - \tau_f) \times \\ \times \Psi(x, \tau'_f) [\Phi_f(\tau_f, z_i) + \Phi_i(\tau_i, z_f) - 2]. \quad (47)$$

С учетом этого окончательный ответ для спектра по x и $\mathbf{q}_b$ имеет вид

$$\frac{dP}{dx d\mathbf{q}_b} = \frac{2}{(2\pi)^2} \text{Re} \int d\tau \exp(-i\mathbf{q}_b \cdot \tau_f) \times \\ \times \int_{z_i}^{z_f} dz_1 \int_{z_1}^{z_f} dz_2 \hat{g} \left\{ \Phi_f(\tau_f, z_2) [\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \right. \\ \left. - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Phi_i(\tau_i, z_1) + [\Phi_f(\tau_f, z_2) - 1] \times \right. \\ \left. \times \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) [\Phi_i(\tau_i, z_1) - 1] \right\} \Big|_{\rho_2=\tau_f, \rho_1=0} + \\ + \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau_f d\tau'_f \exp(-i\mathbf{q}_b \cdot \tau_f) \Psi^*(x, \tau'_f - \tau_f) \times \\ \times \Psi(x, \tau'_f) [\Phi_f(\tau_f, z_i) + \Phi_i(\tau_i, z_f) - 2]. \quad (48)$$

Отсюда, после интегрирования по поперечному импульсу, получаем спектр по одной фейнмановской переменной x :

$$\frac{dP}{dx} = 2 \operatorname{Re} \int_{z_i}^{z_f} dz_1 \int_{z_1}^{z_f} dz_2 \hat{g} [\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Big|_{\rho_1 = \rho_2 = \tau_f = 0}. \quad (49)$$

Для перехода трехчастичной системы $b\bar{c}\bar{a}$ нулевого размера при z_1 снова в систему нулевого размера при z_2 функции Грина в формуле (49) должны вычисляться для $\rho_{a\bar{a}} = 0$. Поэтому потенциал v в гамильтониане (36) в этом случае становится центральным.

Обсудим теперь, как меняются формулы для случая быстрой частицы, рождающейся в среде. Для случая частицы a , рожденной в среде, достаточно в формуле (41) использовать для z_i координату точки рождения быстрой частицы a , для которой мы будем брать $z_i = 0$. В данном случае в формуле (41) в интеграле по z_2 мы сделаем тождественную замену

$$\begin{aligned} \Phi_f(\tau_f, z_2) \mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Phi_i(\tau_i, z_1) &\rightarrow \Phi_f(\tau_f, z_2) \times \\ &\times [\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Phi_i(\tau_i, z_1) + \\ &+ [\Phi_f(\tau_f, z_2) - 1] \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Phi_i(\tau_i, z_1) + \\ &+ \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) [\Phi_i(\tau_i, z_1) - 1] + \\ &+ \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1). \end{aligned} \quad (50)$$

При этом возникает неопределенность $0 \cdot \infty$ только для области больших положительных $z_{1,2}$, происходящая от двух последних слагаемых в правой части выражения (50). Очевидно, что самый последний член должен давать обычный спектр, соответствующий распаду $a \rightarrow bc$ в вакууме, который для начальной частицы, рожденной в жестком процессе, уже не должен быть нулевым (в отличие от случая начальной частицы, налетающей на мишень из бесконечности). А предпоследний член в (50) соответствует поправке к вакуумному спектру от перерасеяний начальной частицы в среде. После раскрытия неопределенности $0 \cdot \infty$ для двух последних членов в (50) путем адиабатического отключения взаимодействия при $z \rightarrow \infty$ полный спектр можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx d\mathbf{q}_b} &= \frac{2}{(2\pi)^2} \operatorname{Re} \int d\tau \exp(-i\mathbf{q}_b \cdot \tau_f) \times \\ &\times \int_{z_i}^{z_f} dz_1 \int_{z_1}^{z_f} dz_2 \hat{g} \left\{ \Phi_f(\tau_f, z_2) [\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \right. \\ &- \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Phi_i(\tau_i, z_1) + [\Phi_f(\tau_f, z_2) - 1] \times \\ &\times \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Phi_i(\tau_i, z_1) \Big\} \Big|_{\rho_2 = \tau_f, \rho_1 = 0} + \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau_f d\tau'_f \exp(-i\mathbf{q}_b \cdot \tau_f) \Psi^*(x, \tau'_f - \tau_f) \times \\ &\times \Psi(x, \tau') [\Phi_i(\tau_i, z_f) - 1] + \frac{dP_v}{dx d\mathbf{q}_b}. \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь последний член есть чисто вакуумный спектр перехода $a \rightarrow bc$:

$$\begin{aligned} \frac{dP_v}{dx d\mathbf{q}_b} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau_f d\tau'_f \exp(-i\mathbf{q}_b \cdot \tau_f) \times \\ &\times \Psi^*(x, \tau'_f - \tau_f) \Psi(x, \tau'_f) = \frac{|\Psi(x, \mathbf{q}_b)|^2}{(2\pi)^2}, \end{aligned} \quad (52)$$

где $\Psi(x, \mathbf{q}_b)$ — волновая функция на световом конусе для перехода $a \rightarrow bc$ в импульсном представлении.

При расчетах радиационного вклада в $p_\perp$ -уширение частицы b для процессов с $a = b$, как и для процесса $q \rightarrow qg$, который мы будем рассматривать, возникает необходимость вычисления также спектра для виртуального процесса $a \rightarrow bc \rightarrow a$, соответствующего диаграмме на рис. 2б. Для виртуальной диаграммы на рис. 2б промежуточная система bc эволюционирует от точечной конфигурации при z_1 к точечной конфигурации при z_2 . Поэтому в этом случае в формулах (41), (51) функции Грина входят с аргументами $\rho_2 = \rho_1 = 0$. При этом для членов с волновой функцией $\Psi^*(x, \tau'_f - \tau_f)$ переходит в $\Psi^*(x, \tau'_f)$. Отличием виртуальной диаграммы является также то, что теперь $\tau_i = \tau_f$, в то время как для реального процесса $\tau_i = x_b \tau_f$. Конечная формула для вклада промежуточного состояния bc с определенным значением продольной фейнмановской переменной $x = x_b$ в спектр конечной частицы a по поперечному импульсу $\mathbf{q}'_a$ для диаграммы на рис. 2б имеет вид (мы будем писать величины для виртуального вклада со знаком «тильда»)

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{P}}{dx d\mathbf{q}'_a} = & -\frac{2}{(2\pi)^2} \text{Re} \int d\boldsymbol{\tau}_f \exp(-i\mathbf{q}'_a \cdot \boldsymbol{\tau}_f) \times \\ & \times \int_{z_i}^{z_f} dz_1 \int_{z_1}^{z_f} dz_2 \hat{g} \left\{ \Phi_f(\boldsymbol{\tau}_f, z_2) [\tilde{K}(\boldsymbol{\rho}_2, z_2 | \boldsymbol{\rho}_1, z_1) - \right. \\ & - \tilde{K}_v(\boldsymbol{\rho}_2, z_2 | \boldsymbol{\rho}_1, z_1)] \Phi_i(\boldsymbol{\tau}_i, z_1) + [\Phi_f(\boldsymbol{\tau}_f, z_2) - 1] \times \\ & \times \tilde{K}_v(\boldsymbol{\rho}_2, z_2 | \boldsymbol{\rho}_1, z_1) \Phi_i(\boldsymbol{\tau}_i, z_1) \left. \right\} \Big|_{\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{\rho}_1=0} - \\ & - \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\boldsymbol{\tau}_f d\boldsymbol{\tau}'_f \exp(-i\mathbf{q}'_a \boldsymbol{\tau}_f) \Psi^*(x, \boldsymbol{\tau}'_f) \times \\ & \times \Psi(x, \boldsymbol{\tau}'_f) [\Phi_i(\boldsymbol{\tau}_i, z_f) - 1] - \delta(\mathbf{q}'_a) \frac{dP_v}{dx}, \quad (53) \end{aligned}$$

где

$$\frac{dP_v}{dx} = \int d\mathbf{q}_b \frac{dP_v}{dx d\mathbf{q}_b} = \int d\boldsymbol{\tau}_f |\Psi(x, \boldsymbol{\tau}_f)|^2 \quad (54)$$

— вакуумный спектр для перехода $a \rightarrow bc$ по фейнмановской переменной x . Изменение знаков по сравнению со спектром для реального процесса связано с тем, что произведение $(i\lambda)(i\lambda)^*$ для диаграммы на рис. 2а в случае диаграммы на рис. 2б заменяется на $(i\lambda)^2$. Отметим, что в приведенных выше формулах мы не указывали явно зависимость функций Грина от вектора $\boldsymbol{\tau}_f$, которая связана с зависимостью потенциальной энергии (38) от вектора $\boldsymbol{\rho}_{a\bar{a}}$. Тот факт, что для реального процесса $\boldsymbol{\rho}_{a\bar{a}} = x_b \boldsymbol{\tau}_f$, а для виртуального $\boldsymbol{\rho}_{a\bar{a}} = \boldsymbol{\tau}_f$, будет важен в последующем анализе радиационного вклада в $p_\perp$ -уширение.

2.2. Индуцированные переходы типа $a \rightarrow bc$ для реальной КЭД и КХД

Обсудим сначала обобщение формул предыдущего раздела для реальной КЭД. В этом случае в трехчастичной системе $b\bar{c}a$ могут быть только две заряженные частицы, и поэтому трехчастичное сечение может быть выражено через сечение для пары e^+e^- . Следует также учесть спин частиц в вершинном факторе. Рассмотрим обобщение формул предыдущего раздела для процесса $e \rightarrow e\gamma$, т.е. когда $a = b = e$, $c = \gamma$.

Элемент $\hat{S}$ -матрицы для процесса $e \rightarrow e\gamma$ записывается в виде

$$\langle e_f \gamma | \hat{S} | e_i \rangle = -ie \int dt d\mathbf{r} \bar{\psi}_f \gamma^\mu A_\mu^* \psi_i, \quad (55)$$

где $\psi_{i,f}$ — дираковские волновые функции начального и конечного электронов во внешнем поле, A_μ — 4-вектор волновой функции излученного фотона. Удобно описывать спиновые состояния электронов

в базисе спиральных состояний в системе бесконечного импульса [36, 37]. При этом электронные дираковские волновые функции и волновую функцию фотона, подобно случаю скалярных частиц, можно выразить через медленно меняющиеся скалярные функции, удовлетворяющие уравнению Шредингера (10). $\hat{S}$ -матричный элемент (55) можно записать через скалярные волновые функции ϕ_i для электронов и фотона в виде

$$\begin{aligned} \langle e_f \gamma | \hat{S} | e_i \rangle = & -\frac{i2\pi\delta(E_\gamma + E_{e_f} - E_{e_i})}{\sqrt{8E_{e_i}E_\gamma E_{e_f}}} \times \\ & \times \int_{z_i}^{z_f} dz \int d\boldsymbol{\rho} e\phi_\gamma^*(z, \boldsymbol{\rho}) \phi_{e_f}^*(z, \boldsymbol{\rho}) \hat{\Gamma} \phi_{e_i}(z, \boldsymbol{\rho}). \quad (56) \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\Gamma}$ — вершинный оператор, который является суммой вершинных факторов с сохранением и изменением спиральности электрона,

$$\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{nf} + \hat{\Gamma}_{sf}. \quad (57)$$

Компонента без переворота спина имеет вид

$$\hat{\Gamma}_{nf} = -\frac{1}{\sqrt{x_f}} \left\{ \frac{1+x_f}{x_\gamma} \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{e}^* + i2\lambda[\mathbf{q}^* \times \mathbf{e}^*]_z \right\}, \quad (58)$$

где λ спиральность электрона, $\mathbf{e}$ — вектор поляризации фотона, а

$$\mathbf{q} = x_\gamma \mathbf{q}_f - x_f \mathbf{q}_\gamma \quad (59)$$

— оператор относительного поперечного импульса для пары конечных частиц $e_f \gamma$. Уравнение (56) записано в форме, в которой операторы импульсов конечных частиц, появляющиеся в $\hat{\Gamma}_{nf}$, действуют справа налево. Компонента оператора $\hat{\Gamma}$ с переворотом спина имеет вид

$$\hat{\Gamma}_{sf} = -\frac{m_e x_\gamma}{\sqrt{x_f}} (2\lambda_i e_x^* + i e_y^*) \delta_{-2\lambda_f, 2\lambda_i}. \quad (60)$$

Наличие вершинного оператора $\hat{\Gamma}$ в (56) не приводит к изменениям в выводе вероятности перехода по сравнению со случаем скалярных частиц. Все формулы, полученные выше для скалярных частиц, остаются верны и для перехода $e \rightarrow e\gamma$ в реальной КЭД, если вершинный фактор $\hat{g}$ (9) заменить на оператор

$$\hat{g}(z_1, z_2) = \hat{g}_{nf}(z_1, z_2) + \hat{g}_{sf}(z_1, z_2), \quad (61)$$

$$\hat{g}_k(z_1, z_2) = \frac{e^2}{16\pi E_{e_i}^2 x_f x_\gamma} \hat{V}_k(z_1, z_2), \quad (62)$$

где оператор $\hat{V}_i$ для случая спектра, просуммированного по спиральностям конечных частиц и усредненного по спиральностям начального электрона, дается формулой

$$\hat{V}_k(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \sum_{\lambda_\gamma, \lambda_i, \lambda_f} \hat{\Gamma}_k(z_1) \hat{\Gamma}_k^*(z_2). \quad (63)$$

Здесь аргументы $z_{1,2}$ указывают, в какой точке действует оператор $\hat{\Gamma}_i$. Используя формулу $\sum_{\lambda_\gamma} e_i(\lambda_\gamma) e_j^*(\lambda_\gamma) = \delta_{ij}$, с помощью соотношений (58), (60)–(63) легко получить для $\hat{g}$ в процессе $e \rightarrow e\gamma$ выражение

$$\begin{aligned} \hat{g}_{nf}(z_1, z_2) &= \frac{\alpha[1 + (1 - x_\gamma)^2]}{2x_\gamma M^2} \mathbf{q}(z_2) \cdot \mathbf{q}^*(z_1) = \\ &= \frac{\alpha[1 - (1 - x_\gamma)^2]}{2x_\gamma M^2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho_1}, \end{aligned} \quad (64)$$

$$\hat{g}_{sf}(z_1, z_2) = \frac{\alpha m_e^2 x_\gamma}{2E_{ei}^2 (1 - x_\gamma)^2}. \quad (65)$$

В спиновом операторе $\hat{g}_{nf}$, при его подстановке в (41), операторы $\mathbf{q}(z_i) = -i\partial/\partial \rho_i$ действуют на функции Грина при постоянной позиции центра масс пары bc . Тот факт, что оператор $\hat{g}_{nf}$ записан в форме, в которой оператор импульса $\mathbf{q}(z_2)$ действует на функцию Грина K (или ее вакуумный аналог), описывающую внутреннюю динамику по координате $\rho_b - \rho_c = \rho_f - \rho_\gamma$, может показаться странным, так как изначально в формуле (41) в точке z_2 для нижних частей диаграмм на рис. 1 вершинный оператор действует на волновые функции конечных частиц для комплексно-сопряженной амплитуды. Диаграмма на рис. 1б, соответствующая спектру, проинтегрированному по поперечному импульсу частицы c , для частиц со спином также может быть деформирована в диаграмму на рис. 2а. После этого оператор импульса для $\bar{c}$ в нижней части диаграммы на рис. 2а будет действовать теперь на конец линии c в точке $z = z_2$, но оператор импульса для $\bar{b}$ остается действующим на конец линии $\bar{b}$ при $z = z_2$. Однако, используя тот факт, что после усреднения по состояниям среды усредненный фазовый фактор в функциональном интеграле для области $z > z_2$ зависит только от относительных расстояний между траекториями конечных частиц, с помощью сдвижек переменных интегрирования мы можем перекинуть дифференциальный оператор поперечного импульса с линии $\bar{b}$ на траекторию b в верхней части диаграммы, где она подходит к точке $z = z_2$ слева (при этом дифференцирование не затрагивает линию b правее z_2). Эта операция приводит к формуле

(64), где операторы импульса при z_1 и z_2 действуют на функции Грина для трехчастичной системы bcs в начальной и конечных точках.

Перейдем к случаю КХД. Будем рассматривать кварк-глюонную плазму как систему статических дебаевски экранированных цветных центров [6]. Так как обмен t -канальными глюонами между быстрыми партонами приводит к изменению их цветовых состояний и цветовых состояний рассеивающих центров, вычисление индуцированного расщепления партонов в КХД является, на первый взгляд, существенно более сложной задачей, чем для абелевого случая. Однако если на уровне амплитуды перехода $a \rightarrow bc$ ограничиться для каждого центра учетом только одноглюонных и двухглюонных синглетных по цвету обменов, то вычисление спектра, проинтегрированного по одному из поперечных импульсов в приближении двухглюонных обменов для каждого рассеивающего центра, проводится аналогично абелевому случаю. Действительно, тот факт, что цветовые генераторы любого партона p и его антипартера $\bar{p}$ связаны соотношением $(-T_p^\alpha)^* = T_{\bar{p}}^\alpha$, позволяет трактовать взаимодействие быстрых партонов для нижней части диаграммы на рис. 1а как взаимодействие антипартонов. При этом, как и в абелевом случае, после усреднения по состояниям среды и суммирования по всем конечным цветным состояниям среды возникает взаимодействие траекторий быстрых партонов, которое описывается дифракционным оператором системы партонов и антипартонов. Отличие КХД от КЭД заключается в том, что для четырехчастичной части диаграммы на рис. 1а при $z > z_2$ задача становится многоканальной, так как для четырех партонов существует несколько синглетных по цвету состояний. Однако для спектра, проинтегрированного по одному из поперечных импульсов, который, как и в абелевом случае, описывается диаграммой на рис. 2а, задача является одноканальной, поскольку в промежуточных двухчастичных и трехчастичных частях имеется только одно синглетное по цвету состояние²⁾. В этом случае дифракционный оператор является просто сечением

²⁾ На первый взгляд, для процесса $g \rightarrow gg$ возможны два синглетных состояния для трехчастичного участка, так как для трех глюонов существуют два цветовых синглетных состояния: антисимметричное ($\propto f_{\alpha\beta\gamma}$) и симметричное ($\propto d_{\alpha\beta\gamma}$). Однако в случае $g \rightarrow gg$ -расщепления система трех партонов на диаграмме рис. 2а может находиться только в антисимметричном цветовом состоянии, так как после $g \rightarrow gg$ -перехода при $z = z_1$ два глюона находятся в антисимметричном цветовом октетном состоянии, и последующие t -канальные глюонные обмены не могут изменить симметрию трехглюонной цветовой волновой функции.

для соответствующей системы. В результате формула для спектра имеет вид, аналогичный абелевому случаю. Меняются только формулы для сечений и для вершинного фактора. Приведем эти формулы для процесса $q \rightarrow qg$, т. е. $a = b = q$ и $c = g$. Основной вклад в излучение глюона кварком идет от перехода без переворота спина кварка. Пренебрегая вкладом с переворотом спина кварка, вершинный фактор мы можем записать в виде

$$\hat{g}(z_1, z_2) = \frac{\alpha_s P_{qq}(x_q)}{2M^2} \mathbf{q}(z_2) \cdot \mathbf{q}^*(z_1) = \frac{\alpha_s P_{qq}(x_q)}{2M^2} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho_1}, \quad (66)$$

где P_{qq} — стандартная функция расщепления для процесса $q \rightarrow q$. В общем случае процесса $a \rightarrow bc$ в (66) следует использовать функцию расщепления $P_{ba}(x_b)$. Для двухглюонного обмена трехчастичное сечение $\sigma_{bc\bar{a}} = \sigma_{qg\bar{q}}$ выражается через дипольное сечение $\sigma_{q\bar{q}}$ [38]:

$$\sigma_{qg\bar{q}}(\rho, \mathbf{R}) = \frac{9}{8} [\sigma_{q\bar{q}}(|\rho|) + \sigma_{q\bar{q}}(|\mathbf{R} - x_b \rho|)] - \frac{1}{8} \sigma_{q\bar{q}}(|\mathbf{R} + x_c \rho|), \quad (67)$$

где $\rho = \rho_b - \rho_c$, $\mathbf{R} = x_c \rho_b + x_b \rho_c - \rho_a$. В приближении статических дебаевски экранированных рассеивающих центров [6] дипольное сечение для синглетной по цвету $q\bar{q}$ -пары имеет вид

$$\sigma_{q\bar{q}}(\rho) = C_F C_R \int d\mathbf{q} \alpha_s^2(\mathbf{q}^2) \frac{1 - \exp(i\mathbf{q} \cdot \rho)}{(\mathbf{q}^2 + m_D^2)^2}, \quad (68)$$

где m_D — дебаевская масса, $C_F = 4/3$ и C_R — цветовые операторы Казимира для кварка конститuenta КГП. Отметим, что в то время как в КЭД изложенная схема позволяет учесть обмены любым числом t -канальных фотонов [39] (для этого достаточно точно вычислить дипольное сечение в эйкональном приближении по формуле (27)), для КХД наша схема применима только в приближении двухглюонных t -канальных обменов³⁾.

³⁾ В литературе при анализе индуцированных переходов $a \rightarrow bc$ в КХД взаимодействие партоновых траекторий для диаграммы на рис. 1а часто описывается в терминах вильсоновских факторов. Это может создавать впечатление, что картина с синглетной по цвету, взаимодействующей со средой партон-антипартоновой системой справедлива даже для непертурбативных флуктуаций цветовых полей среды. Однако никаких оснований для этого нет, потому что для непертурбативной ситуации векторные потенциалы в линиях Вильсона для амплитуды и для комплексно-сопряженной амплитуды могут быть разными. Даже в теории возмущений уже на уровне обмена тремя глюонами вычисление вероятности перехода $a \rightarrow bc$ не может быть сведено к задаче прохождения через среду фиктивной партон-антипартоновой системы, как на диаграмме рис. 1а.

Формулы для статической модели КГП можно обобщить [40] на случай динамического описания КГП в полевой трактовке в приближении НТЛ (hard thermal loop), которое использовалось в работе [11]. При этом потенциал (38) выражается через глюонный поляризационный тензор. Однако особого смысла это не имеет, так как для применимости схемы НТЛ для условий RHIC и LHC нет оснований. Более того, можно показать [20], что схема НТЛ приводит к неправильной нормировке трехчастичного потенциала (38) для партоновых состояний малого размера, которые важны для JQ при энергиях RHIC и LHC.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИАЦИОННОГО ВКЛАДА В $p_\perp$ -УШИРЕНИЕ БЫСТРЫХ ПАРТОНОВ

Будем рассматривать $p_\perp$ -уширение для быстрых кварков в КГП конечного размера L . Радиационный вклад в $p_\perp$ -уширение в этом случае связан с переходом $q \rightarrow qg$, т. е. в обозначениях частиц разд. 2 имеем $a = b = q$, $c = g$. Среду считаем однородной, т. е. $n = \text{const}$. Будем предполагать, что начальный кварк рождается с энергией E при $z = 0$.

Обсудим сначала обычное нерадиационное $p_\perp$ -уширение быстрого кварка за счет многократного рассеяния в среде. Без учета радиационных процессов распределение кварка по поперечному импульсу при распространении в среде от z_1 до z_2 можно записать через оператор эволюции поперечной кварковой матрицы плотности в виде

$$\frac{dP}{d\mathbf{p}_\perp} = \int d\mathbf{R}_2 d\tau_2 d\tau_1 \exp(-i\mathbf{p}_\perp \cdot \tau_2) \times \langle S_{q\bar{q}} \rangle(\rho_2, \rho'_2, z_2 | \rho_1, \rho'_1, z_1), \quad (69)$$

где $\tau_i = \rho_i - \rho'_i$, $\mathbf{R}_2 = (\rho_2 + \rho'_2)/2$. Используя (28) из (69), легко получить

$$\frac{dP}{d\mathbf{p}_\perp} = \int d\tau_2 \exp(-i\mathbf{p}_\perp \cdot \tau_2) \times \exp\left[-\frac{\sigma_{q\bar{q}}(|\tau_2|)Ln}{2}\right], \quad (70)$$

где $L = z_2 - z_1$ — длина пути в среде. Отметим, что хотя оператор эволюции (28) матрицы плотности учитывает поперечное движение частиц, формула (70) совпадает с результатом вычисления $dP/d\mathbf{p}_\perp$ в эйкональном приближении, когда траектории частиц считаются прямолинейными. Для КЭД этот факт в методе интеграла по путям был обнаружен в

работе [35]. Мы будем использовать квадратичную параметризацию дипольного сечения,

$$\sigma_{q\bar{q}}(\rho) = C\rho^2. \quad (71)$$

В этом приближении формула (70) дает гауссовское распределение

$$\frac{dP}{d\mathbf{p}_\perp} = \frac{1}{\pi\langle\mathbf{p}_\perp^2\rangle_0} \exp\left[-\frac{\mathbf{p}_\perp^2}{\langle\mathbf{p}_\perp^2\rangle_0}\right], \quad (72)$$

где

$$\langle\mathbf{p}_\perp^2\rangle_0 = 2LCn. \quad (73)$$

Эта величина нерадиационного вклада в $\langle p_\perp^2 \rangle$ с транспортным коэффициентом $\hat{q} = 2Cn$, введенным в работе [7], соответствует (1). Приближение квадратичного дипольного сечения не учитывает кулоновских логарифмических эффектов в ρ -зависимости дипольного сечения при $\rho \ll 1/m_D$ и его выполнение при $\rho \gtrsim 1/m_D$ при расчете $\sigma_{q\bar{q}}$ по двухглюонной формуле (68). Логарифмическое отклонение от квадратичной зависимости при малых ρ приводит к энергетической зависимости $\langle p_\perp^2 \rangle$. При использовании реалистического дипольного сечения величина C медленно растет с уменьшением ρ при малых ρ . При этом $\langle p_\perp^2 \rangle$ определяется как $2nLC(\rho_{min})$, где $\rho_{min} \sim 1/p_{\perp max}$. Для кварка с энергией E в КГП с температурой T имеем $p_{\perp max}^2 \sim 3ET$. Эффективный, зависящий от энергии транспортный коэффициент $\hat{q}_{eff} = 2nC(\rho_{min})$ можно записать также через дифференциальное сечение рассеяния кварка на конститuentе среды $d\sigma/dp_\perp^2$ [8, 41, 42]

$$\hat{q} = n \int_0^{p_{\perp max}^2} dp_\perp^2 p_\perp^2 \frac{d\sigma}{dp_\perp^2}. \quad (74)$$

Перейдем к анализу радиационного вклада в $p_\perp$ -уширение. Будем учитывать излучение только одного глюона. В этом приближении начальный быстрый кварк q на большом расстоянии от точки рождения может оказаться в одночастичном кварковом состоянии или в двухчастичном состоянии qg . Важно, что вероятность образования конечного состояния qg включает в себя как обычное вакуумное, так индуцированное расщепление $q \rightarrow qg$. Для сохранения полной вероятности необходимо учитывать уменьшение вероятности выхода одного кварка из-за возможности образования двухчастичной системы. Это уменьшение веса однопартонного состояния описывается радиационной поправкой от виртуального процесса $q \rightarrow qg \rightarrow q$. Мы будем пренебрегать столкновительными энергетическими потерями партонов, которые сравнительно малы [13, 14].

В этом приближении полная энергия двухпартонного состояния и энергия однопартонного состояния одинаковы после прохождения среды. Однако среда может менять относительный вес однопартонного и двухпартонного состояний. Меняется также и распределение партонов по поперечным импульсам. Мы будем интересоваться влиянием среды на распределение по поперечным импульсам конечного кварка, проинтегрированное по его энергии. При этом для виртуального вклада энергия конечного кварка не меняется, однако надо учитывать, что перерасеяния в среде для промежуточного двухчастичного состояния отличаются от перерасеяний одного кварка. Так как типичная энергия излучаемого глюона существенно меньше энергии кварка, в данной модели отношение поперечного импульса конечного кварка, приобретаемого в среде, к энергии может рассматриваться как угол отклонения струи за счет взаимодействия с КГП. Поэтому можно говорить, что модель описывает $p_\perp$ -уширение в КГП всей струи. В этой модели, которая точно соответствует формулировке работ [27, 28], величину $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$, связанную с взаимодействием со средой, можно записать в форме

$$\langle p_\perp^2 \rangle_{rad} = \int dx d\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp^2 \left[\frac{dP}{dx d\mathbf{p}_\perp} + \frac{d\tilde{P}}{dx d\mathbf{p}_\perp} \right], \quad (75)$$

где $dP/dx d\mathbf{p}_\perp$ — индуцированный вклад (т.е. без учета чисто вакуумного вклада) в распределение по фейнмановской переменной $x = x_q$ и поперечному импульсу кварка для реального процесса $q \rightarrow qg$, а $d\tilde{P}/dx d\mathbf{p}_\perp$ — индуцированный вклад в распределение для виртуального процесса $q \rightarrow qg \rightarrow q$. В формуле (75) смысл продольной переменной x различен для реального и виртуального вкладов. Для реального процесса x соответствует конечному кварку, а для виртуального процесса x определяется фейнмановской переменной кварка в промежуточном qg -состоянии. Переменная $\mathbf{p}_\perp$ в формуле (75) для реального и виртуального вкладов соответствует конечным кваркам. Ввиду сохранения энергии, формула (75) может быть записана и в терминах фейнмановской переменной глюона, $x_g = E_g/E$, которая связана с x_q соотношением $x_q + x_g = 1$.

При вычислении радиационного вклада в $\langle p_\perp^2 \rangle$ по формуле (75) можно избежать вычислений самих $p_\perp$ -распределений. Действительно, из общей формулы (51) видно, что индуцированный спектр по поперечным импульсам для реального процесса можно записать в виде

$$\frac{dP}{dx d\mathbf{p}_\perp} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\boldsymbol{\tau}_f \exp(-i\mathbf{p}_\perp \cdot \boldsymbol{\tau}_f) F(\boldsymbol{\tau}_f). \quad (76)$$

Спектр для виртуального процесса (53) можно записать в такой же форме с заменой F на $\tilde{F}$. Из (75), (76) легко видеть, что $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$ можно выразить через лапласиан от функции $F + \tilde{F}$ по τ_f при $\tau_f = 0$ как

$$\langle p_\perp^2 \rangle_{rad} = - \int dx [\nabla^2 F(\tau_f) + \nabla^2 \tilde{F}(\tau_f)] \Big|_{\tau_f=0}. \quad (77)$$

Используя (51) для функции F реального процесса, можно получить

$$F(\tau_f) = F_1(\tau_f) + F_2(\tau_f), \quad (78)$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\tau_f) = & 2 \operatorname{Re} \int_{z_i}^{z_f} dz_1 \int_{z_1}^{z_f} dz_2 \times \\ & \times \left\{ \Phi_f(\tau_f, z_2) \hat{g}[\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \times \right. \\ & \times \Phi_i(x\tau_f, z_1) + [\Phi_f(\tau_f, z_2) - 1] \times \\ & \times \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Phi_i(x\tau_f, z_1) \Big\} \Big|_{\rho_2=\tau_f, \rho_1=0}, \quad (79) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\tau_f) = & \int d\tau'_f \Psi^*(x, \tau'_f - \tau_f) \times \\ & \times \Psi(x, \tau'_f) [\Phi_i(x\tau_f, z_f) - 1]. \quad (80) \end{aligned}$$

В (79), (80) мы учли, что в (51) $\tau_i = x\tau_f$. Используя (79), (80), для нужного нам лапласиана по τ_f от $F_{1,2}$ при $\tau_f = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \nabla^2 F_1(\tau_f) \Big|_{\tau_f=0} = & 2 \operatorname{Re} \int_0^L dz_1 \int_{z_1}^\infty dz_2 \times \\ & \times \left\{ \nabla^2 \Phi_f(\tau, z_2) \hat{g}[\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \right. \\ & - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] + \nabla^2 \hat{g}[\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ & - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] + \hat{g}[\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ & - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \nabla^2 \Phi_i(x\tau_f, z_1) + \\ & + \nabla^2 \Phi_f(\tau_f, z_2) \times \\ & \times \hat{g}\mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Big\} \Big|_{\rho_2=\tau_f, \rho_1=0, \tau_f=0}, \quad (81) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 F_2(\tau_f) \Big|_{\tau_f=0} = & \nabla^2 \Phi_i(x\tau_f, L) \Big|_{\tau_f=0} \times \\ & \times \int d\tau'_f |\Psi(x, \tau'_f)|^2. \quad (82) \end{aligned}$$

Отметим, что при вычислении (81) дифференциальный оператор $\partial/\partial\rho_1 \cdot \partial/\partial\rho_2$ в вершинном операторе

$\hat{g}$ действует на функции Грина при постоянном τ_f , а дифференцирование по τ_f выполняется последним.

Из (53) видно, что для случая виртуального процесса формулы для $\tilde{F}_{1,2}$ можно получить из (79), (80), заменяя функции Грина $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_v$ на $\tilde{\mathcal{K}}$, $\tilde{\mathcal{K}}_v$, которые теперь вычисляются при $\rho_2 = \rho_1 = 0$, и заменяя в глауберовском факторе Φ_i аргумент $x\tau_f$ на τ_f . Следует также изменить для $\tilde{F}_{1,2}$ общие знаки на противоположные. С учетом этого формулы для лапласиана от функций $\tilde{F}_{1,2}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{F}_1(\tau_f) \Big|_{\tau_f=0} = & -2 \operatorname{Re} \int_0^L dz_1 \int_{z_1}^\infty dz_2 \times \\ & \times \left\{ \nabla^2 \Phi_f(\tau_f, z_2) \hat{g}[\tilde{\mathcal{K}}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \right. \\ & - \tilde{\mathcal{K}}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] + \nabla^2 \hat{g}[\tilde{\mathcal{K}}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ & - \tilde{\mathcal{K}}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] + \hat{g}[\tilde{\mathcal{K}}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ & - \tilde{\mathcal{K}}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \nabla^2 \Phi_i(\tau_f, z_1) + \nabla^2 \Phi_f(\tau_f, z_2) \times \\ & \times \hat{g}\tilde{\mathcal{K}}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Big\} \Big|_{\rho_2=\rho_1=0, \tau_f=0}, \quad (83) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tilde{F}_2(\tau_f) \Big|_{\tau_f=0} = & -\nabla^2 \Phi_i(\tau_f, L) \Big|_{\tau_f=0} \times \\ & \times \int d\tau'_f |\Psi(x, \tau'_f)|^2. \quad (84) \end{aligned}$$

Правила действия дифференциальных операторов в (83) такие же, как и для (81). Интегрирование по z_1 в F_1 (81) и $\tilde{F}_1$ (83) ограничено областью $z_1 < L$, так как $\mathcal{K} - \mathcal{K}_0$, $\tilde{\mathcal{K}} - \tilde{\mathcal{K}}_v$ и $\nabla^2 \Phi_f$ исчезают при $z_1 > L$. При этом все z -интегрирования можно выполнять при фиксированной константе связи. В наших вычислениях использование адиабатически отключающейся константы связи было важно только для получения выражений для членов F_2 и $\tilde{F}_2$ через волновую функцию двухпартоного состояния.

При $\tau_f = 0$ для функций Грина, входящих в формулы для F_1 и $\tilde{F}_1$, выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \hat{g}[\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ & - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Big|_{\rho_2=\tau_f, \rho_1=0, \tau_f=0} = \\ & = \hat{g}[\tilde{\mathcal{K}}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ & - \tilde{\mathcal{K}}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Big|_{\rho_2=\rho_1=0, \tau_f=0}. \quad (85) \end{aligned}$$

Учитывая, что для F_1 и $\tilde{F}_1$ глауберовский фактор Φ_f входит с одинаковым аргументом τ_f , из (81) и (83) мы видим, что в сумме $F + \tilde{F}$ члены с лапласианом Φ_f точно сокращаются. Однако это свойство

не имеет места для членов, содержащих $\nabla^2 \Phi_i$, так как в F_1 и $\tilde{F}_1$ величина Φ_i появляется с разными аргументами. По этой же причине нет сокращения для F_2 и $\tilde{F}_2$, которые также содержат различающиеся факторы $\nabla^2 \Phi_i$. Члены с действием ∇^2 в F_1 и $\tilde{F}_1$ на функции Грина различаются, так как вычисление лапласиана требует вычисления $\hat{g}\mathcal{K}$ и $\hat{g}\tilde{\mathcal{K}}$ при ненулевых τ_f , где эти функции для реального и виртуального процессов различаются.

Интеграл по пространственной координате от квадрата Ψ -функции в (82) и (84) дает просто вакуумный x -спектр dP_v/dx , который можно также записать через интеграл по поперечному импульсу двойного дифференциального спектра:

$$\frac{dP_v}{dx} = \int d\mathbf{p}_\perp \frac{dP_v}{dx d\mathbf{p}_\perp}. \quad (86)$$

Для $q \rightarrow qg$ вакуумный спектр по x и поперечному импульсу кварка имеет вид

$$\frac{dP_v}{dx d\mathbf{p}_\perp} = \frac{\alpha_s P_{qq}(x)}{2\pi^2} \frac{\mathbf{p}_\perp^2}{(\mathbf{p}_\perp^2 + \epsilon^2)^2}, \quad (87)$$

где P_{qq} — обычная функция расщепления перехода $q \rightarrow q$. При этом интеграл по $\mathbf{p}_\perp$ в (86) логарифмически расходится при больших $p_\perp^2$. Эта расходимость связана с тем, что мы работаем в приближении малых углов и не учитываем кинематических ограничений. В численных расчетах мы регуляризовали эту расходимость, ограничивая область интегрирования $p_\perp < p_\perp^{max}$ с $p_\perp^{max} = E \min(x, (1-x))$. Более формально эта расходимость может быть регуляризована в духе метода Паули–Вилларса, если ввести контрчлен с заменой ϵ на $\epsilon' \sim p_\perp^{max}$.

Полный вклад в $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$, соответствующий сумме $F + \tilde{F}$, может быть записан как сумма трех членов:

$$\langle p_\perp^2 \rangle_{rad} = I_1 + I_2 + I_3, \quad (88)$$

где величины I_i даются формулами

$$\begin{aligned} I_1 = & -2 \int dx \int_0^L dz_1 \int_0^\infty d\Delta z \times \\ & \times \text{Re} \left\{ \nabla^2 \hat{g}[\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \right. \\ & - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Big|_{\rho_2=\tau_f, \rho_1=0, \tau_f=0} - \\ & - \nabla^2 \hat{g}[\tilde{\mathcal{K}}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ & - \tilde{\mathcal{K}}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Big|_{\rho_2=\rho_1=0, \tau_f=0} \Big\}, \quad (89) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = & -2 \int dx \int_0^L dz_1 \int_0^\infty d\Delta z \times \\ & \times \text{Re} \left\{ \hat{g}[\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \right. \\ & - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \nabla^2 \Phi_i(x\tau_f, z_1) \Big|_{\rho_2=\tau_f, \rho_1=0, \tau_f=0} - \\ & - \hat{g}[\tilde{\mathcal{K}}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ & - \tilde{\mathcal{K}}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \nabla^2 \Phi_i(\tau_f, z_1) \Big|_{\rho_2=\rho_1=0, \tau_f=0} \Big\} = \\ & = -2 \langle p_\perp^2 \rangle_0 \int dx f(x) \int_0^L dz_1 \frac{z_1}{L} \int_0^\infty d\Delta z \times \\ & \times \text{Re} \hat{g}[\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ & - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Big|_{\rho_2=\rho_1=0, \tau_f=0}, \quad (90) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 = & \int dx \nabla^2 [\Phi_i(\tau_f, L) - \Phi_i(x\tau_f, L)] \Big|_{\tau_f=0} \frac{dP_v}{dx} = \\ & = -\langle p_\perp^2 \rangle_0 \int dx f(x) \frac{dP_v}{dx}, \quad (91) \end{aligned}$$

где $f(x) = 1 - x^2$, $\Delta z = z_2 - z_1$. В формулах для $I_{2,3}$ мы использовали соотношение (85) и равенства

$$\nabla^2 \Phi_i(x\tau_f, z_1) \Big|_{\tau_f=0} = x^2 \nabla^2 \Phi_i(\tau_f, z_1) \Big|_{\tau_f=0}, \quad (92)$$

$$\nabla^2 \Phi_i(\tau_f, z_1) \Big|_{\tau_f=0} = -\langle p_\perp^2 \rangle_0 z_1 / L, \quad (93)$$

где $\langle p_\perp^2 \rangle_0$ соответствует нерадационному вкладу в $p_\perp$ -уширение (73). Мы используем формулы (88)–(91) для численных расчетов $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$. Формулы для функций Грина, которые необходимы для расчета $I_{1,2}$, приведены в Приложении В.

Из (91) видно, что $I_3 < 0$, что, таким образом, приводит к уменьшению $\langle p_\perp^2 \rangle$. Как мы увидим ниже, вклад I_2 для $L = 5$ также отрицательный. Качественно это можно понять, вычисляя I_2 в приближении малой длины формирования индуцированного излучения глюона по сравнению с размером среды. В этом приближении можно пренебречь в интеграле по Δz в (90) наличием границы среды, что дает

$$\begin{aligned} 2 \text{Re} \int_0^\infty d\Delta z \hat{g}[\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) - \\ - \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)] \Big|_{\rho_2=\rho_1=\tau=0} \approx \frac{dP_{in}}{dx dL}, \quad (94) \end{aligned}$$

где $dP_{in}/dx dL$ — x -спектр индуцированного излучения глюона на единицу пути кварка в среде. Тогда для I_2 получим

$$I_2 \approx -\frac{\langle p_{\perp}^2 \rangle_0 L}{2} \int dx f(x) \frac{dP_{in}}{dx dL} \approx -\frac{\langle p_{\perp}^2 \rangle_0}{2} \int dx f(x) \frac{dP_{in}}{dx}. \quad (95)$$

Поскольку $dP_{in}/dx > 0$, видно, что $I_2 < 0$. Таким образом ясно, что члены, пропорциональные $\nabla^2 \Phi_i$, дают отрицательный вклад в $p_{\perp}$ -уширение.

Подынтегральное выражение интеграла по Δz в формуле (89) при $\Delta z \rightarrow 0$ ведет себя как $1/\Delta z$, что приводит к логарифмической расходимости I_1 . Аналогично случаю логарифмической расходимости интегрирования по $\mathbf{p}_{\perp}^2$ для dP_v/dx в I_3 , эта расходимость есть следствие использования приближения малых углов. Расходимость интеграла по Δz в I_1 также может быть регуляризована введением контрчлена Паули–Вилларса с $\epsilon' \sim p_{\perp}^{max}$. Такой контрчлен приведет к обрезанию интеграла при $\Delta z \lesssim M/\epsilon'^2$, что для $x_g \ll 1$ эквивалентно $\Delta z \lesssim 1/E_g$. Однако эта процедура могла бы быть разумна только для среды с расстоянием между конститuentами (и дебаевским радиусом), много меньше $1/M$. Для реальной КПП это неравенство не выполняется. Поэтому для диаграмм реального и виртуального процессов влияние среды должно становиться малым, уже когда Δz становится мало по сравнению с дебаевским радиусом. Дело в том, что формулы подхода LCPI получены в предположении, что для расщепления $a \rightarrow bc$ при взаимодействии с изолированной частицей длина формирования существенно превышает радиус действия потенциала, роль которого в КЭД играет размер атома, а в КПП — дебаевский радиус. Поэтому для процессов в среде разумно регуляризовать интегрирование по Δz , принимая для нижнего предела в (89) $\Delta z \sim 1/m_D$ (эта величина существенно больше, чем $1/E_g$ при $E_g \gg m_D$). Этот рецепт был предложен в работе [27] для расчета радиационного вклада в $p_{\perp}$ -уширение с логарифмической точностью. В нашей формулировке вклад, рассмотренный в [27], происходит из вклада I_1 (89). Авторы обнаружили, что доминирующий вклад в $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad}$ идет от дважды логарифмического интеграла $\int dx_g/x_g \int d\Delta z/\Delta z$, который при $\Delta z_{min} = l_0$ и приводит к формуле (2). В [27] при вычислении $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad}$ авторы не учитывали глауберовские факторы $\Phi_{i,f}$. Поэтому вклады $I_{2,3}$, пропорциональные $\nabla^2 \Phi_i$, были потеряны. Эти вклады, как мы сказали ранее, отрицательны и приводят

к уменьшению $p_{\perp}$ -уширения. Как будет видно из результатов численных расчетов, суммарный отрицательный вклад I_2 и I_3 для условий RHIC и LHC по абсолютной величине больше I_1 , и величина $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad}$ оказывается отрицательной.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

При проведении численных расчетов $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad}$ в качестве основного варианта мы использовали для квазичастичных масс значения $m_q = 300$ МэВ и $m_g = 400$ МэВ, которые были получены из анализа решеточных данных в квазичастичной модели КПП [43] для температур, соответствующих условиям RHIC и LHC. С этими значениями масс в наших предыдущих работах по JQ [20, 21] были успешно описаны данные RHIC и LHC по ядерному фактору модификации R_{AA} . Результаты для R_{AA} не очень чувствительны к массам квазичастиц. Для того чтобы понять возможные неопределенности, связанные с выбором масс партонов, мы провели расчеты и для масс $m_q = 150$ МэВ и $m_g = 200$ МэВ. В настоящей работе мы, как и в [27], проводим расчеты для среды с постоянным $\hat{q}$, с фиксированной α_s в распадной вершине $q \rightarrow qg$. В работах [20, 21] расчет R_{AA} проводился в более реалистической модели вне рамок осцилляторного приближения с использованием бегущей α_s , с дебаевской массой КПП, полученной в решеточных расчетах [44]. Расчеты в работах [20, 21] были выполнены с учетом продольного разлета КПП в модели Бьеркена [45], которая приводит к зависимости транспортного коэффициента от собственного времени, $\hat{q} \propto 1/\tau$.

Для того чтобы сделать предсказания для $p_{\perp}$ -уширения в модели с фиксированной α_s и без расширения КПП как можно более надежными, мы провели подгонку параметра $\hat{q}$ из условия совпадения потери энергии кварка ΔE в формулировке данной работы с результатами более реалистичной модели, использованной в [21]. Для условий центральных соударений Au+Au на RHIC при $\sqrt{s} = 0.2$ ТэВ мы получили для транспортного коэффициента⁴⁾ $\hat{q} \approx 0.12$ ГэВ³ при $E = 30$ ГэВ. Для соударений Pb+Pb на LHC при $\sqrt{s} = 2.76$ ТэВ мы получили $\hat{q} \approx 0.14$ ГэВ³ при $E = 100$ ГэВ. Как и в расчетах, выполненных в [27], мы берем $\alpha_s = 1/3$ и $L = 5$ фм (это значение L примерно

⁴⁾ В данной работе мы во всех формулах используем транспортный коэффициент кварка, который на фактор $C_F/C_A = 4/9$ меньше глюонного транспортного коэффициента.

соответствует типичной длине пути струи для центральных соударений).

В формулах для $I_{2,3}$, приведенных выше, мы выразили $\nabla^2 \Phi_i$ через нерадиационное значение $\langle p_\perp^2 \rangle_0$, которое связано с транспортным коэффициентом $\hat{q}$ соотношением (1). В осцилляторном приближении, которое мы используем для вычисления функций Грина, входящих в формулу для $I_{1,2}$, частота Ω в осцилляторном гамильтониане (115) в Приложении В также содержит $\hat{q}$ ($\Omega^2 \propto \hat{q}$). При этом надо иметь в виду, что эти значения $\hat{q}$ могут отличаться друг от друга из-за кулоновских эффектов. Действительно, по своему физическому смыслу величина $\hat{q}$, возникающая из вычисления $\nabla^2 \Phi_i$ соответствует перерасеянию в среде начального кварка. Поэтому естественно брать $\hat{q} = 2nC(\rho \sim 1/p_{\perp max})$, как обсуждалось в разд. 3. В то же время для частоты Ω в гамильтониане (115), описывающем функции Грина, естественно использовать транспортный коэффициент, определенный как $2nC$, где C — отношение точного дипольного сечения (68) к ρ^2 при ρ_{eff} , определяемом как характерный размер трехпартоновой системы [9, 46]. Количественно для перехода $q \rightarrow qg$ для условий RHIC и LHC этот рецепт дает значение $\hat{q}$, которое близко к $\hat{q}$, определяемому по формуле (74) при энергии, равной типичной энергии излучаемого глюона $\bar{E}_g$, которая существенно меньше энергии E начального кварка и слабо зависит от энергии кварка. Для кварков с $E \sim 30\text{--}100$ ГэВ для условий RHIC и LHC $\bar{E}_g \sim 3\text{--}5$ ГэВ. При этом изменение с энергией транспортного коэффициента при расчете по формуле (74) оказывается весьма значительным. Мы будем обозначать транспортный коэффициент начального кварка как $\hat{q}'$, оставляя обозначение $\hat{q}$ для коэффициента при энергии глюона, который входит в частоту осцилляторного гамильтониана (115) трехпартоновой системы. Наши вычисления по (74) с бегущей α_s и с дебаевской массой КГП, предсказываемой решеточными расчетами [44], дают для $r = \hat{q}'/\hat{q}$ величину

$$r \approx 1.94 \quad (2.13) \quad (96)$$

для кварков с энергией $E = 30$ (100) ГэВ для условий RHIC (LHC).

В численных расчетах в соотношениях (89)–(91) мы интегрируем по x от $x_{min} = m_q/E$ до $x_{max} = 1 - m_g/E$ (напомним, что мы определяем x как x_q , в терминах x_g наша область соответствует изменению x_g от m_g/E до $1 - m_q/E$). Как и в работе [27], для регуляризации $1/\Delta z$ -расходимости в (89) мы обрезаем Δz -интегрирование при $\Delta z_{min} = 1/m$

с $m = 300$ МэВ. Наши численные расчеты для членов $I_{1,2,3}$ в формуле (88) дают

$$[I_1, I_2, I_3]/\langle p_\perp^2 \rangle_0 \approx [0.417/r, -0.213, -0.601] \quad (97)$$

при $E = 30$ ГэВ для условий RHIC. Расчеты для условий LHC при энергии кварка $E = 100$ ГэВ дают

$$[I_1, I_2, I_3]/\langle p_\perp^2 \rangle_0 \approx [0.823/r, -0.107, -0.908]. \quad (98)$$

Используя значения отношения $\hat{q}'/\hat{q}$ (96), из (97) и (98) получаем для отношений радиационного и нерадиационного вкладов в наших версиях для RHIC (LHC)

$$\begin{aligned} \langle p_\perp^2 \rangle_{rad}/\langle p_\perp^2 \rangle_0 &\approx -0.598 \quad (-0.629), \\ r &= 1.94 \quad (2.13). \end{aligned} \quad (99)$$

Приведем также результат для случая $\hat{q}' = \hat{q}$:

$$\begin{aligned} \langle p_\perp^2 \rangle_{rad}/\langle p_\perp^2 \rangle_0 &\approx -0.397 \quad (-0.192), \\ r &= 1 \quad (1). \end{aligned} \quad (100)$$

Как видно, даже для версии без учета различия $\hat{q}'$ и $\hat{q}$ радиационный вклад в $p_\perp$ -уширение оказывается отрицательным для условий RHIC и LHC.

Для понимания чувствительности результатов к массам партонов мы провели расчеты также для масс партонов, уменьшенных в два раза ($m_q = 150$ МэВ и $m_g = 200$ МэВ). Это приводит к увеличению по абсолютной величине вкладов $I_{1,2,3}$ примерно на 10–20 %. Чувствительность полного $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$ к уменьшению масс в два раза оказывается несколько больше (так как имеется сильная компенсация между вкладом от I_1 и отрицательными вкладами от $I_{2,3}$). Полный $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$ для всех версий остается отрицательным. Для варианта с $\hat{q}' > \hat{q}$ (96) $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$ увеличивается по абсолютной величине примерно на фактор 1.36 (1.4) для RHIC (LHC), а для версии с $\hat{q}' = \hat{q}$ — примерно на фактор 1.26 (1.5) для RHIC (LHC). Основной отрицательный вклад в $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$ идет от члена I_3 . В приведенных выше результатах по зависимости от масс партонов вакуумный спектр, входящий в формулу (91) для I_3 , вычислялся для квазичастичных масс партонов в КГП.

Мы исследовали также, как меняются результаты, если вакуумный спектр вычисляется для массы глюона $m_g = 800$ МэВ. Примерно такая масса глюона ранее была получена в работе [47] ($m_g = 0.75$ ГэВ) из анализа протонной структурной функции F_2 при малых x в дипольном уравнении БФКЛ. Масса глюона, полученная в [47], хорошо согласуется с естественным инфракрасным обрезанием для пертурбативных глюонов, $m_g \sim 1/R_c$,

где $R_c \approx 0.27$ фм — глюонный радиус корреляций в вакууме КХД [48]. Поэтому использование $m_g \sim \sim 800$ ГэВ можно считать разумным. Отметим, что в принципе формализм LCPI допускает использование зависящих от продольных координат масс партонов. Наши расчеты с $m_g = 800$ МэВ приводят к подавлению I_3 на фактор 0.77 (0.83) для условий RHIC (LHC). При этом отношение $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad} / \langle p_{\perp}^2 \rangle_0$ остается отрицательным как для версий с $\hat{q}' > \hat{q}$, так и для $\hat{q}' = \hat{q}$ (оценки с большей массой m_g для вакуумного спектра носят, конечно, качественный характер, так как для случая разных масс партонов в КГП и в вакууме следовало бы учесть также влияние эффекта Тер-Микаеляна [49]).

Таким образом, проведенные тесты показывают, что предсказание об отрицательном $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad}$ достаточно стабильно к вариации масс партонов. Отметим, что чувствительность индуцированного излучения глюонов к массе легкого кварка вообще мала (за исключением излучения жестких глюонов с $x_g \sim 1$) и изменение предсказаний связано, главным образом, с вариацией m_g .

В приведенных выше результатах мы использовали фиксированную величину α_s . Обобщение вычислений на бегущую α_s является сложной задачей и выходит за рамки этой работы. В то же время в рамках схемы данной работы можно легко оценить роль бегущей α_s на доминирующий отрицательный вклад в $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad}$ от члена I_3 , связанный с зависимостью от параметризации α_s чисто вакуумного спектра dP_v/dx в формуле (91). Для вычисления dP_v/dx с бегущей константой связи достаточно в формуле (87) заменить статическую α_s на бегущую. Мы использовали однопетлевую α_s , замороженную при малых импульсах на значении $\alpha_s^{fr} = 0.7$. Это значение α_s^{fr} для данной параметризации ранее было получено из анализа структурных функций при малых x в рамках дипольного БФКЛ-уравнения [47]. Оно хорошо согласуется также с результатом анализа потери энергии тяжелых кварков в вакууме [50]. Отметим, что метод вычисления фактора $\nabla^2 \Phi_i$, который входит в формулу (91), вообще не важен для отношения $I_3 / \langle p_{\perp}^2 \rangle_0$, которое и представляет интерес. Использование вакуумного спектра с такой бегущей α_s приводит к увеличению по абсолютной величине члена I_3 примерно на фактор 1.45 (1.2) для условий RHIC (LHC). Абсолютное значение отношения $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad} / \langle p_{\perp}^2 \rangle_0$ при этом увеличивается примерно на фактор 1.45 (1.3) для RHIC (LHC).

Большой отрицательный вклад от $I_{2,3}$ делает наши результаты для радиационного вклада в $p_{\perp}$ -уширение кардинально отличающимися от предсказан-

ной в работе [27] значительной положительной радиационной поправки $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad} \approx 0.75 \hat{q} L$. В форме использованной в выражениях (99), (100), это соответствует $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad} / \langle p_{\perp}^2 \rangle_0 \approx 0.75/r$. Это предсказание находится в качественном согласии с нашими результатами (97), (98) для вклада в $\langle p_{\perp}^2 \rangle_{rad}$ одного члена I_1 , который можно рассматривать как аналог результата работы [27] (но с аккуратным численным расчетом вне рамок логарифмического приближения и приближения мягких глюонов).

Отметим, что учет членов $I_{2,3}$, которые в работе [27] не учитывались, меняет и физическую картину радиационного $p_{\perp}$ -уширения. Действительно, вклад I_1 на качественном уровне в приближении малой длины формирования $L_f \ll L$ можно рассматривать как локальный по продольной координате эффект и интерпретировать как перенормировку транспортного коэффициента. Для вкладов $I_{2,3}$ существенны большие продольные расстояния порядка L . Поэтому влияние членов $I_{2,3}$ на $p_{\perp}$ -уширение нельзя интерпретировать как простую перенормировку локального транспортного коэффициента. Важно, что для доминирующего отрицательного вклада I_3 излучение глюона происходит в вакууме. Этот факт ставит под сомнение возможность факторизовать эффекты взаимодействия со средой и судаковские эффекты при анализе азимутальной декорреляции струй в АА-соударениях, как это делалось в работе [22].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы провели анализ радиационного $p_{\perp}$ -уширения быстрых партонов в КГП. Анализ выполнен в рамках формализма LCPI [9, 29] в осцилляторном приближении. Расчеты проводились для однородной КГП для толщины $L = 5$ фм со значениями транспортного коэффициента, соответствующими условиям центральных соударений ядер Au+Au и Pb+Pb на RHIC и LHC. Мы показали, что в радиационное $p_{\perp}$ -уширение дают вклад как реальные и виртуальные процессы, имеющие локальный характер по длине пути струи с характерным продольным размером порядка длины формирования индуцированного глюонного излучения, так и процессы, включающие перерасcеяния начального партона на размерах порядка размера КГП. В то время как процессы первого типа дают положительный вклад в $p_{\perp}$ -уширение, нелокальные процессы второго типа, напротив, дают отрицательный вклад и уменьшают $p_{\perp}$ -уширение. Процессы первого типа рассмат-

ривались ранее в работах [27, 28] с логарифмической точностью в приближении мягких глюонов. Вклад в $p_\perp$ -уширение от перерассейаний начального партона рассмотрен впервые.

Наши расчеты показывают, что для условий RHIC и LHC отрицательный вклад от перерассейаний начального партона настолько велик, что полный вклад $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$ оказывается отрицательным и по абсолютной величине может быть больше половины обычного нерадиационного вклада $\langle p_\perp^2 \rangle_0$. В этом случае суммарный эффект нерадиационного и радиационного механизмов на $p_\perp$ -уширение струй может оказаться весьма малым. Возможно, что с этим связан несколько неожиданный отрицательный результат эксперимента STAR [23] по поиску эффекта перерассейания струй в КГП в соударениях Au+Au при $\sqrt{s} = 0.2$ ТэВ. Разумеется, для более надежного заключения крайне желательно обобщить вычисления данной работы на случай расширяющейся КГП.

Благодарности. Я глубоко благодарен главному редактору ЖЭТФ академику А. Ф. Андрееву за предложение представить работу для юбилейного выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию академика И. М. Халатникова.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь мы обсуждаем раскрытие неопределенности $0 \cdot \infty$, возникающей от областей больших $z_{1,2}$ в формуле (41). Рассмотрим вычисление вклада в спектр по x и $\mathbf{q}_b$ для процесса $a \rightarrow bc$ от члена $\mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) [\Phi_i(\tau_i, z_1) - 1]$ в (46), для которого возникает неопределенность $0 \cdot \infty$ (обозначим его $dP_+/dx d\mathbf{q}_b$). Для раскрытия неопределенности $0 \cdot \infty$ вклад конечной области по z_1 несуществен, поэтому мы можем написать

$$\begin{aligned} \frac{dP_+}{dx d\mathbf{q}_b} &= \frac{2}{(2\pi)^2} \text{Re} \int d\tau_f \exp(-i\mathbf{q}_b \cdot \tau_f) \times \\ &\times \int_0^\infty dz_1 \int_{z_1}^\infty dz_2 \hat{g} \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \times \\ &\times [\Phi_i(\tau_i, \infty) - 1] \Big|_{\rho_2=\tau_f, \rho_1=0}. \end{aligned} \quad (101)$$

Запишем функцию Грина в виде фурье-представления:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{q} \exp[i\mathbf{q}(\rho_2 - \rho_1)] \times \\ &\times \exp \left[-i(z_2 - z_1) \frac{\mathbf{q}^2 + \epsilon^2}{2M} \right]. \end{aligned} \quad (102)$$

Будем брать константу взаимодействия в виде $\lambda(z) = \lambda \exp(-\delta|z|)$ с пределом $\delta \rightarrow 0$ в конечных формулах. Тогда, выделяя явно экспоненциальную z -зависимость $\hat{g}$, для фиксированного δ получаем

$$\begin{aligned} \frac{dP_+}{dx d\mathbf{q}_b} &= \frac{2\hat{g}}{(2\pi)^4} \text{Re} \int d\mathbf{q} J(\mathbf{q}_b - \mathbf{q}) \int_0^\infty dz_1 \exp(-2\delta z_1) \times \\ &\times \int_0^\infty d\xi \exp \left[-\delta\xi - i\xi \frac{\mathbf{q}^2 + \epsilon^2}{2M} \right], \end{aligned} \quad (103)$$

где

$$J(\mathbf{k}) = \int d\tau_f \exp(-i\mathbf{k} \cdot \tau_f) [\Phi_i(x\tau_f, \infty) - 1]. \quad (104)$$

В (104) учтено, что $\tau_i = x\tau_f$ (считаем $x = x_b$). После интегрирования по z_1 и ξ и взятия предела $\delta \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{dP_+}{dx d\mathbf{q}_b} = \frac{\hat{g}}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q} J(\mathbf{q}_b - \mathbf{q}) \left(\frac{2M}{\epsilon^2 + \mathbf{q}^2} \right)^2. \quad (105)$$

Используя нековариантную теорию возмущений в системе бесконечного импульса, нетрудно показать, что волновая функция для двухчастичного фоковского состояния $|bc\rangle$ в $(x, \mathbf{q})$ -представлении для перехода $a \rightarrow bc$ есть

$$\Psi(x, \mathbf{q}) = \frac{\lambda \sqrt{x(1-x)}}{2\sqrt{\pi}(\epsilon^2 + \mathbf{q}^2)}. \quad (106)$$

Здесь $\Psi(x, \mathbf{q})$ нормирована так, что вероятность фоковской компоненты bc в физической частице a есть

$$P(a \rightarrow bc) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dx d\mathbf{q} |\Psi(x, \mathbf{q})|^2. \quad (107)$$

С учетом (106) и (9), можно записать (105) в виде

$$\frac{dP_+}{dx d\mathbf{q}_b} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\mathbf{q} J(\mathbf{q}_b - \mathbf{q}) |\Psi(x, \mathbf{q})|^2. \quad (108)$$

Это выражение в координатном представлении можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{dP_+}{dx d\mathbf{q}_b} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\tau_f d\tau'_f \exp(-i\mathbf{q}_b \cdot \tau_f) \times \\ &\times \Psi^*(x, \tau'_f - \tau_f) \Psi(x, \tau'_f) [\Phi_i(x\tau_f, \infty) - 1]. \end{aligned} \quad (109)$$

Вычисление вклада от области отрицательных $z_{1,2}$ для (41) от члена $[\Phi_f(\tau_f, z_2) - 1] \mathcal{K}_v(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)$

в (46) проводится аналогично, и суммарный вклад областей $z_{1,2} < 0$ и $z_{1,2} > 0$ приводит к (47). Выражение (109) в то же время дает вклад в спектр для ситуации с начальной частицей a , рождающейся при $z = 0$. Применение аналогичного метода для последнего члена в правой части формулы (50) с одной функцией Грина без функции профиля дает обычный вакуумный спектр (52). Отметим, что для ситуации с начальной частицей, налетающей из бесконечности, последний член в (46) дает нулевой вклад из-за сокращения суммы вкладов областей $z_{1,2} < 0$ и $z_{1,2} > 0$ с вкладом области $z_1 < 0, z_2 > 0$.

Мы провели вычисления для скалярных частиц. Включение спина не меняет процедуру раскрытия неопределенности $0 \cdot \infty$. Результат записывается в том же виде через волновую функцию пары bc .

ПРИЛОЖЕНИЕ В

В этом Приложении мы приводим формулы для функций Грина, необходимых для вычисления членов $I_{1,2}$ по формулам (89), (90) в осцилляторном приближении. В КХД для квадратичной параметризации дипольного сечения $\sigma_{q\bar{q}}(\rho) = C\rho^2$ (в терминах кваркового транспортного коэффициента $C = \hat{q}/2n$) трехчастичное партонное сечение $\sigma_{bc\bar{a}}$ также можно записать в квадратичном виде:

$$\sigma_{bc\bar{a}}(\rho, \mathbf{R}) = C_{b\bar{a}}(\rho_b - \rho_a)^2 + C_{c\bar{a}}(\rho_c - \rho_a)^2 + C_{bc}(\rho_b - \rho_c)^2. \quad (110)$$

Здесь $\rho = \rho_b - \rho_c$, $\mathbf{R} = x_c\rho_b + x_b\rho_c - \rho_a$, $\rho_b - \rho_a = \mathbf{R} + x_c\rho$, $\rho_c - \rho_a = \mathbf{R} - x_b\rho$. Для процесса $q \rightarrow qg$ ($a = b = q, c = g$) из (67) можно получить

$$C_{bc} = C_{c\bar{a}} = \frac{9C}{8}, \quad C_{b\bar{a}} = -\frac{C}{8}. \quad (111)$$

Для диаграммы на рис. 2а $\mathbf{R} = \boldsymbol{\tau}_i = x_b\boldsymbol{\tau}_f$. Тогда, вводя новую переменную

$$\mathbf{u} = \rho + \boldsymbol{\delta}, \quad \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\tau}_i B/C_3 = x_b\boldsymbol{\tau}_f B/C_3, \quad (112)$$

где $B = x_c C_{b\bar{a}} - x_b C_{c\bar{a}}$, $C_3 = C_{b\bar{a}}x_c^2 + C_{c\bar{a}}x_b^2 + C_{bc}$, выражение для $\sigma_{bc\bar{a}}$ можно записать в форме

$$\sigma_{bc\bar{a}}(\rho, \mathbf{R}) = (A - B^2/C_3)\mathbf{R}^2 + C_3\mathbf{u}^2, \quad (113)$$

где $A = C_{b\bar{a}} + C_{c\bar{a}}$.

С учетом (113) гамильтониан (36) системы $bc\bar{a}$ в зависимости от z в терминах переменных $\mathbf{u}$ и вектора $\boldsymbol{\tau}_f$ можно записать в виде

$$H = H_{osc} - \frac{id\theta(L-z)\boldsymbol{\tau}_f^2}{2} + \frac{\epsilon^2}{2M}, \quad (114)$$

где $d = nx_b^2(A - B^2/C_3)$, а H_{osc} — осцилляторный гамильтониан,

$$H_{osc} = -\frac{1}{2M} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right)^2 + \frac{M\Omega^2 \mathbf{u}^2}{2}, \quad (115)$$

с комплексной частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{-inC_3\theta(L-z)}{M}}. \quad (116)$$

Отметим, что $|\Omega|^2 \propto \hat{q}$, так как $C_3 \propto C \propto \hat{q}$. Из (114) видно, что функцию Грина $\mathcal{K}$ (для области $z_1 < L$, которая нам нужна) можно записать в форме

$$\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) = K_{osc}(\mathbf{u}_2, z_2 | \mathbf{u}_1, z_1) U(z_2, z_1), \quad (117)$$

$$U(z_2, z_1) = \exp \left[-\frac{d\xi\boldsymbol{\tau}_f^2}{2} - \frac{i(z_2 - z_1)\epsilon^2}{2M} \right], \quad (118)$$

где $\xi = \min(z_2, L) - z_1$, $\mathbf{u}_i = \rho_i + \boldsymbol{\delta}$, а K_{osc} есть функция Грина для осцилляторного гамильтониана (115), которую можно записать в виде

$$K_{osc}(\mathbf{u}_2, z_2 | \mathbf{u}_1, z_1) = \frac{\gamma}{2\pi i} \exp [i(\alpha\mathbf{u}_2^2 + \beta\mathbf{u}_1^2 - \gamma\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2)]. \quad (119)$$

Здесь для $z_2 < L$

$$\alpha = \beta = \frac{M\Omega}{2 \operatorname{tg} [\Omega(z_2 - z_1)]}, \quad \gamma = \frac{M\Omega}{\sin [\Omega(z_2 - z_1)]}, \quad (120)$$

а для конфигураций $z_2 > L > z_1$

$$\alpha = \frac{M\Omega}{2[\operatorname{tg} (\Omega\xi_1) + \Omega\xi_2]}, \quad \beta = \frac{M\Omega[1 - \Omega\xi_2 \operatorname{tg} (\Omega\xi_1)]}{2[\operatorname{tg} (\Omega\xi_1) + \Omega\xi_2]}, \quad \gamma = \frac{M\Omega}{\cos(\Omega\xi_1)[\operatorname{tg} (\Omega\xi_1) + \Omega\xi_2]}, \quad (121)$$

где $\xi_1 = L - z_1$, $\xi_2 = z_2 - L$.

В наших формулах для спектров дифференциальный оператор $\hat{g}$ действует на функцию Грина $\mathcal{K}$ при постоянном значении $\boldsymbol{\tau}_i$. Поэтому в нем можно заменить $(\partial/\partial\rho_2) \cdot (\partial/\partial\rho_1)$ на $(\partial/\partial\mathbf{u}_2) \cdot (\partial/\partial\mathbf{u}_1)$. Из (119) легко получить

$$\frac{\partial}{\partial\rho_2} \cdot \frac{\partial}{\partial\rho_1} \mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) = -[2i\gamma + (2\alpha\mathbf{u}_2 - \gamma\mathbf{u}_1) \times (2\beta\mathbf{u}_1 - \gamma\mathbf{u}_2)] \mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1). \quad (122)$$

Для диаграммы на рис. 2а функция Грина входит при $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \tau_f$, что соответствует

$$\mathbf{u}_{1,2} = \tau_f k_{1,2}, \quad k_1 = x_b B / C_3, \quad k_2 = 1 + x_b B / C_3. \quad (123)$$

Поэтому для значения $\tau_f = 0$, которое входит в формулы для $\langle p_\perp^2 \rangle_{rad}$, мы имеем $\mathbf{u}_{1,2} = 0$. Тогда с учетом выражений (66), (123) получаем

$$\begin{aligned} \hat{g}\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Big|_{\rho_{1,2}=\tau_f=0} &= \\ &= \frac{\alpha_s P_{ba}}{2M^2} \frac{\gamma^2}{\pi} \exp \left[-\frac{i(z_2 - z_1)\epsilon^2}{2M} \right]. \end{aligned} \quad (124)$$

Для вычисления члена I_1 (89) надо знать также лапласиан по τ_f при $\tau_f = 0$ от $\hat{g}\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1)$ при $\rho_2 = \tau_f$, $\rho_1 = 0$. Правая часть формулы (122), записанная как функция τ_f , при $\rho_2 = \tau_f$, $\rho_1 = 0$ имеет вид

$$-\frac{\gamma}{2\pi i} [2i\gamma + G\tau_f^2] \exp \left[i\tau_f^2 D - \frac{i(z_2 - z_1)\epsilon^2}{2M} \right], \quad (125)$$

где

$$D = \alpha k_2^2 + \beta k_1^2 - \gamma k_1 k_2 + \frac{id\xi}{2}, \quad (126)$$

$$G = (2\alpha k_2 - \gamma k_1)(2\beta k_1 - \gamma k_2). \quad (127)$$

Тогда с учетом (66) и (125) нетрудно получить при $\tau_f = 0$

$$\begin{aligned} \Delta^2 \hat{g}\mathcal{K}(\rho_2, z_2 | \rho_1, z_1) \Big|_{\rho_2=\tau_f, \rho_1=0, \tau_f=0} &= \\ &= \frac{\alpha_s P_{ba}}{2M^2} \frac{2\gamma(2i\gamma D - G)}{i\pi} \exp \left[-\frac{i(z_2 - z_1)\epsilon^2}{2M} \right]. \end{aligned} \quad (128)$$

Для вычисления аналогов формул (124) и (128) для вакуумной функции Грина достаточно положить $d = 0$ и заменить функции α , β , γ их вакуумными аналогами

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0/2 = \frac{M}{2(z_2 - z_1)}. \quad (129)$$

Для виртуальной диаграммы на рис. 2б, в которую входит функция Грина $\tilde{\mathcal{K}}$, в полученных формулах меняются только значения параметров d , $k_{1,2}$, которые теперь для $\tilde{\mathcal{K}}$ даются формулами $d = n(A - B^2/C_3)$, $k_{1,2} = B/C_3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. U. W. Heinz, Landolt-Börnstein **23**, 240 (2010) [arXiv:0901.4355].
2. H. Song, S. A. Bass, U. Heinz, and T. Hirano, Phys. Rev. C **83**, 054910 (2011), Erratum: Phys. Rev. C **86**, 059903 (2012) [arXiv:1101.4638].
3. R. Pasechnik and M. Šumbera, Universe **3**, 7 (2017) [arXiv:1611.01533].
4. U. A. Wiedemann, Landolt-Börnstein **23**, 521 (2010) [arXiv:0908.2306].
5. J. D. Bjorken, Fermilab preprint 82/59-THY (1982), unpublished.
6. M. Gyulassy and X. N. Wang, Nucl. Phys. B **420**, 583 (1994) [nucl-th/9306003].
7. R. Baier, Y. L. Dokshitzer, A. H. Mueller, S. Peigné, and D. Schiff, Nucl. Phys. B **483**, 291 (1997) [hep-ph/9607355].
8. R. Baier, Y. L. Dokshitzer, A. H. Mueller, S. Peigné, and D. Schiff, Nucl. Phys. B **484**, 265 (1997) [hep-ph/9608322].
9. B. G. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **63**, 906 (1996) [hep-ph/9607440].
10. M. Gyulassy, P. Lévai, and I. Vitev, Nucl. Phys. B **594**, 371 (2001) [hep-ph/0006010].
11. P. Arnold, G. D. Moore, and L. G. Yaffe, JHEP **0206**, 030 (2002) [hep-ph/0204343].
12. U. A. Wiedemann, Nucl. Phys. A **690**, 731 (2001) [hep-ph/0008241].
13. B. G. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **86**, 509 (2007) [arXiv:0708.0816].
14. G.-Y. Qin, J. Ruppert, C. Gale, S. Jeon, G. D. Moore, and M. G. Mustafa, Phys. Rev. Lett. **100**, 072301 (2008) [arXiv:0710.0605].
15. Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, ДАН СССР **92**, 735 (1953).
16. A. B. Migdal, Phys. Rev. **103**, 1811 (1956).
17. B. G. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **73**, 55 (2001) [hep-ph/0012360].
18. P. Arnold and S. Iqbal, JHEP **1504**, 070 (2015), Erratum: JHEP **1609**, 072 (2016) [arXiv:1501.04964].
19. R. Baier, Yu. L. Dokshitzer, A. H. Mueller, and D. Schiff, JHEP **0109**, 033 (2001).
20. B. G. Zakharov, J. Phys. G **40**, 085003 (2013) [arXiv:1304.5742].
21. B. G. Zakharov, J. Phys. G **41**, 075008 (2014) [arXiv:1311.1159].

22. A. H. Mueller, B. Wu, B.-W. Xiao, and F. Yuan, Phys. Lett. B **763**, 208 (2016) [arXiv:1604.04250].
23. L. Adamczyk et al. [STAR Collaboration], Phys. Rev. C **96**, 024905 (2017) [arXiv:1702.01108].
24. J. Norman [for ALICE Collaboration], arXiv:1901.02706.
25. M. Gyulassy, P. Levai, J. Liao, S. Shi, F. Yuan, and X. N. Wang, Nucl. Phys. A **982**, 627 (2019) [arXiv:1808.03238].
26. B. Wu, JHEP **1110**, 029 (2011) [arXiv:1102.0388].
27. T. Liou, A. H. Mueller, and B. Wu, Nucl. Phys. A **916**, 102 (2013) [arXiv:1304.7677].
28. J.-P. Blaizot and Y. Mehtar-Tani, Nucl. Phys. A **929**, 202 (2014) [arXiv:1403.2323].
29. B. G. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **70**, 171 (1999) [hep-ph/9906536].
30. R. Baier, D. Schiff, and B. G. Zakharov, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **50**, 37 (2000) [hep-ph/0002198].
31. B. G. Zakharov, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **146**, 151 (2005) [hep-ph/0412117].
32. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1980).
33. B. G. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **80**, 75 (2004) [hep-ph/0406063].
34. R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York (1965).
35. Б. Г. Захаров, ЯФ **46**, 148 (1987).
36. J. D. Bjorken, J. B. Kogut, and D. E. Soper, Phys. Rev. D **3**, 1382 (1971).
37. G. P. Lepage and S. J. Brodsky, Phys. Rev. D **22**, 2157 (1980).
38. N. N. Nikolaev and B. G. Zakharov, Z. Phys. C **64**, 631 (1994) [hep-ph/9306230].
39. B. G. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **64**, 737 (1996) [hep-ph/9612431].
40. P. Aurenche and B. G. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **85**, 181 (2007) [hep-ph/0612343].
41. R. Baier, Nucl. Phys. A **715**, 209 (2003) [hep-ph/0209038].
42. K. M. Burke et al. [JET Collaboration] Phys. Rev. C **90**, 014909 (2014) [arXiv:1312.5003].
43. P. Lévai and U. Heinz, Phys. Rev. C **57**, 1879 (1998).
44. O. Kaczmarek and F. Zantow, Phys. Rev. D **71**, 114510 (2005) [hep-lat/0503017].
45. J. D. Bjorken, Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).
46. B. G. Zakharov, Phys. Atom. Nucl. **61**, 838 (1998) [hep-ph/9807540].
47. N. N. Nikolaev and B. G. Zakharov, Phys. Lett. B **327**, 149 (1994).
48. E. V. Shuryak, Rev. Mod. Phys. **65**, 1 (1993).
49. B. G. Zakharov, Письма в ЖЭТФ **76**, 236 (2002) [hep-ph/0207206].
50. Yu. L. Dokshitzer, V. A. Khoze, and S. I. Troyan, Phys. Rev. D **53**, 89 (1996).