ЖЭТФ, 2019, том 156, вып. 4 (10), стр. 638–650

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ НАКОПИТЕЛЯХ И ПОИСК ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДИПОЛЬНЫХ МОМЕНТОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

С. Н. Вергелес [*]***, Н. Н. Николаев***

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Московский физико-технический институт
141707, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 22 апреля 2019 г.,
после переработки 22 апреля 2019 г.
Принята к публикации 30 апреля 2019 г.

Изучаются вызванные искривленным пространством-временем в поле вращающейся Земли ложные сигналы в опытах по поиску электрического дипольного момента заряженных частиц по вращению спина в чисто электростатических накопителях. Основное внимание уделено эффектам суточного вращения Земли. Обнаружено, что вращение плоскости электростатического накопителя вместе с Землей приводит к отличному от нуля магнитному полю. Локально по кольцу накопителя линейная по суточному вращению Земли частота прецессии спина существенно выше искомой частоты сигнала прецессии за счет электрических дипольных моментов. Показано, что для частицы на идеальной орбите знакопеременность вклада вращения Земли вдоль кольца накопителя приводит к исчезновению интегрального ложного вращения спина. Квадратичный по вращению Земли фоновый сигнал конечен, но численно мал.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова

DOI: 10.1134/S0044451019100067

1. ВВЕДЕНИЕ

Наблюдение P- и T-неинвариантного электрического дипольного момента (ЭДМ) заряженных частиц в накопителях может пролить свет на механизмы несохранения CP-инвариантности вне Стандартной Модели, без которых объяснение наблюдаемой барионной асимметрии Вселенной невозможно [1–3]. Если параметризовать ЭДМ d нуклонов и ядер в единицах ядерного магнетона μ_N, т. е., $d = \eta_{EDM}\mu_N$, то широко обсуждаемые модели несохранения CP-инвариантности дают $\eta_{EDM} \sim \sim 10^{-10}$, в то время как в Стандартной Модели $\eta_{EDM} \sim 10^{-17}$ [3–5]. Экспериментальный сигнал ЭДМ — это прецессия спина в электрическом поле. Для заряженных частиц такой сигнал наблюдаем только в накопительных кольцах, когда электрическое поле участвует в удержании частиц на орбите. В обсуждаемых ниже экспериментах с протонами в накопителях в принципе достижима чувствительность к ЭДМ $d_p \sim 10^{-29}e \cdot \text{см} \sim 10^{-15}\mu_N$ с угловой частотой вращения спина за счет ЭДМ $\eta_{EDM} \cdot 1$ МГц $\sim 10^{-9}$ рад/с [6, 7]. Здесь 1 МГц — это масштаб циклотронной частоты для протонов средней энергии. Выделение столь малых эффектов требует понимания спиновой динамики и контроля фоновых эффектов на этом же уровне. Для исключения ложного сигнала от вращения магнитного дипольного момента (МДМ) в магнитных полях предлагается искать сигнал ЭДМ в чисто электростатическом накопителе при так называемом магическом импульсе протонов 704 МэВ$/c$, когда исчезает паразитное взаимодействие МДМ протона с переносным магнитным полем — это так называемый режим замороженного спина [8].

В физике ускорителей эффектами Общей Теории Относительности (ОТО) в поле вращающейся Земли, в частности гравитационным притяжением накопленных частиц к Земле, всегда пренебрегали. Действительно, пучки частиц автоматически зани-

[*] E-mail: vergeles@itp.ac.ru

мают равновесное положение, в котором притяжение к Земле компенсируется фокусирующими полями в ускорителе. Само смещение орбиты при этом пренебрежимо мало и ненаблюдаемо. Однако в задаче поиска ЭДМ эту малость надо сравнивать с предельной малостью интересных ЭДМ $\eta_{EDM} \sim 10^{-15}$. В 2012 г. Орлов, Фланаган и Семерцидис [9] заметили, что при обсуждаемых предельных значениях ЭДМ фокусирующие электрические поля, компенсирующие гравитационное поле Земли, вызывают вращение спина, существенно превышающее искомое вращение спина за счет ЭДМ в накопителе с замороженным спином. Этот результат был по сути подтвержден в 2016 г. в работе Обухова, Силенко и Теряева [10], в которой только не был явно выписан магический импульс. В 2017 г. ошибочная работа [11] вызвала оживленную дискуссию о роли гравитации [12] с не вполне корректным обсуждением практически интересного случая чисто электрического накопителя в работе [13]. Полное согласие между работами [9, 10] было установлено в 2018 г. в докладе [14].

Однако полная трактовка роли гравитации Земли, особенно суточного вращения Земли в экспериментах по поиску ЭДМ протона на чисто электрических накопителях с замороженным спином, остается открытой. Эта задача становится актуальной как в свете результата Орлова и др. [9], так и планов созданной в 2018 г. коллаборации CPEDM по строительству прототипа чисто электростатического накопителя протонов [6, 7]. Решение, приводимое в этой работе, представляет как общеметодический интерес с точки зрения спиновой динамики в ОТО, так и практическое значение в поисках сигнала ЭДМ. На первый взгляд, ожидаемые поправки на ОТО в поле вращающейся Земли численно крайне малы. Так, отношение гравитационного радиуса Земли к ее радиусу составляет величину порядка 10^{-9}. Отношение скорости $v_\omega = \omega\rho$ за счет суточного вращения Земли с угловой скоростью ω для частицы в накопительном кольце радиуса $\rho \sim 50$ м к скорости света c порядка 10^{-11}.

В то же время при указанных выше предельно малых ЭДМ $\eta_{EDM} \sim 10^{-15}$ угловая скорость суточного вращения Земли на пять порядков превышает угловую скорость вращения спина за счет ЭДМ. Ложный сигнал ЭДМ за счет гравитационного притяжения к Земле, превышающий истинный сигнал ЭДМ, в принципе устраним сравнением вращения спина для частиц, вращающихся по одной орбите по часовой стрелке и против нее [9]. Это возможно в чисто электростатических накопителях, но идентичность траекторий нарушается магнитными полями. Один эффект, который в физике ускорителей ранее не обсуждался, — это магнитные поля в электростатическом накопителе, индуцированные вращением кольца накопителя совместно с Землей. Действительно, кольцо такого накопителя представляет собой цилиндрический конденсатор. Вращение такого накопителя вместе с Землей порождает как электрические токи разного знака от двух противоположно заряженных цилиндров, так и магнитное поле порядка $v_\omega/c \sim 10^{-11}$ от электростатического поля на орбите накопителя. При обсуждаемых значениях $\eta_{EDM} \sim 10^{-15}$ роль всех указанных выше эффектов требует внимательного анализа.

План дальнейшего изложения следующий. Мы уделяем основное внимание недостаточно освещенным в литературе по поискам ЭДМ методическим вопросам; приложения к ускорительным экспериментам требуют отдельного анализа. В случае Земли достаточно учитывать эффекты ОТО в приближении слабого поля и нерелятивистского описания эффектов суточного вращения. В разд. 2 изложена редукция метрики Керра, которая применяется для описания эффектов ОТО в лабораторной системе координат вращающейся Земли, в которой накопительное кольцо покоится. Здесь же изложен сопутствующий тетрадный формализм, используемый для описания циклотронного движения частиц и прецессии спина с учетом гравитации вращающейся Земли. В разд. 3 рассмотрены циклотронное движение и релятивистская спиновая динамика в ОТО. Здесь возникают как нетривиальные релятивистская зависимость вклада центробежного и кориолисова ускорений в циклотронное вращение и прецессию спина, так и поправки на кривизну пространства. В частности, найдена релятивистская зависимость эффекта Лензе – Тирринга [15]. В разд. 4 обсуждается компенсация гравитационных сил фокусирующим электрическим полем. Мы приводим поправки за счет вращения Земли к результатам работ [9, 10]. Предмет разд. 5 — это вывод магнитного поля, индуцируемого в электростатическом накопителе вращением Земли, и обсуждение его роли. Это поле можно назвать внутренним, так как, в отличие от магнитного поля Земли, оно не может быть экранировано магнитной защитой. В Заключении подведены основные результаты.

2. ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

2.1. Метрика Керра и суточное вращение Земли

В инерциальной стационарной системе отсчета K', связанной со звездами, координаты обозначаем

$x^{\mu\prime} = (x^{0\prime}, x^{i\prime})$. Далее переходим в жестко связанную с Землей систему отсчета K, равномерно вращающуюся относительно системы K' с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Координаты в системе K обозначаются $x^\mu = (x^0, x^i)$, причем $x^0 = x^{0\prime}$.

В слабом поле Земли метрика в системе K может быть получена разложением метрики Керра [16] в системе отсчета K' по гравитационному радиусу Земли r_g и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ ее суточного вращения с последующим переходом к системе отсчета K. Таким образом, в линейном приближении по r_g, билинейном по r_g и $\boldsymbol{\omega}$ и квадратичном по $\boldsymbol{\omega}$, получаем

$$\begin{gathered} ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^i dx^0 + g_{ij}dx^i dx^j, \\ g_{00} = 1 - \frac{r_g}{R} - \frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^2}{c^2}, \\ g_{0i} = -\left(1 + \frac{r_g}{R} - \frac{2kC}{c^2R^3}\right)\frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^i}{c}, \\ g_{ij} = -\left(1 + \frac{r_g}{R}\right)\delta^{ij}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $C = IM_\oplus R_\oplus^2$ — момент инерции Земли относительно полярной оси с $I = 0.3307$ [17], $M_\oplus = 5.972\cdot 10^{27}$ г — масса Земли, $R_\oplus = 6.378\cdot 10^8$ см — радиус Земли, гравитационная постоянная $k = 6.674\cdot 10^{-8}$ см$^3\cdot$г$^{-1}\cdot$с$^{-2}$, гравитационный радиус Земли $r_g = 2kM_\oplus/c^2 = 0.887$ см. Собственное время t в лабораторной системе и время x^0 в (1) связаны как

$$dt = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0. \tag{2}$$

2.2. Выбор тетрады

Следуя [16], приведем метрику (1) к сумме квадратов

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{00}\left(dx^0 + \frac{g_{0i}dx^i}{g_{00}}\right)^2 - \\ - \left(-g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right)dx^i dx^j = \\ = \eta_{ab}\left(e^a_\mu dx^\mu\right)\left(e^b_\nu dx^\nu\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где поле $e^a_\mu(x)$ называется тетрадой, $a, b = 0, 1, 2, 3$, $a = (0, \alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, $\eta_{ab} \equiv \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Здесь

$$\mathfrak{g}_{ij} \equiv -g_{ij} + \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \tag{4}$$

играет роль чисто пространственной метрики в лабораторной системе отсчета.

В указанном выше приближении из (3) получаем

$$\begin{gathered} e^0_0 = \sqrt{g_{00}} = 1 - \frac{r_g}{2R} - \frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^2}{2c^2}, \quad e^\alpha_0 = 0, \\ e^0_i = \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} = -\left(1 + \frac{3r_g}{2R} - \frac{2kC}{c^2R^3}\right)\frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^i}{c}, \\ e^\alpha_i = \left(1 + \frac{r_g}{2R}\right)\delta^\alpha_i + \frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^\alpha[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^i}{2c^2}. \end{gathered} \tag{5}$$

В выборе тетрады есть произвол. В нашей конкретной задаче тетрада (5) оказывается заметно удобнее тетрад, использованных в работах [10, 18, 19]. Определим также локальный ортонормированный базис (ОНБ) $\tilde{e}^\mu_a(x)$, $a = 0, \ldots, 3$, такой что

$$e^a_\mu(x)\tilde{e}^\mu_b(x) = \delta^a_b, \quad g_{\mu\nu}\tilde{e}^\mu_a\tilde{e}^\nu_b = \eta_{ab}.$$

Выпишем явно ОНБ:

$$\begin{gathered} \tilde{e}^0_0 = 1 + \frac{r_g}{2R} + \frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^2}{2c^2}, \quad \tilde{e}^{\,i}_0 = 0, \\ \tilde{e}^0_\alpha = \left(1 + \frac{3r_g}{2R} - \frac{2kC}{c^2R^3}\right)\frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^\alpha}{c}, \\ \tilde{e}^i_\alpha = \left(1 - \frac{r_g}{2R}\right)\delta^i_\alpha - \frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^i[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^\alpha}{2c^2}. \end{gathered} \tag{6}$$

Нам понадобится также обратный метрический тензор $g^{\mu\nu} = \eta^{ab}\tilde{e}^\mu_a\tilde{e}^\nu_b$:

$$\begin{gathered} g^{00} = 1 + \frac{r_g}{R}, \\ g^{0i} = -\left(1 + \frac{r_g}{R} - \frac{2kC}{c^2R^3}\right)\frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^i}{c}, \\ g^{ij} = -\left(1 - \frac{r_g}{R}\right)\delta^{ij} + \frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^i[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^j}{c^2}. \end{gathered} \tag{7}$$

Правила перехода из координатного базиса в ОНБ и обратно стандартные:

$$X^a = e^a_\mu X^\mu, \quad X^\mu = e^\mu_a X^a, \quad \xi_a = e^\mu_a \xi_\mu.$$

В ОНБ тензорные индексы опускаются и поднимаются при помощи метрических тензоров η_{ab} и η^{ab}. Ковариантная производная векторного поля X^ν в координатном базисе и в ОНБ соотносятся как

$$\nabla_\mu X^a \equiv e^a_\nu \nabla_\mu X^\nu = \partial_\mu X^a + \gamma^a_{b\mu}X^b,$$

$$\tilde{e}^\mu_c\nabla_\mu X^a = \tilde{e}^\mu_c\partial_\mu X^a + \gamma^a_{bc}X^b,$$

где $\gamma^a_{bc} \equiv \tilde{e}^\mu_c\gamma^a_{b\mu}$ — совокупность коэффициентов связности и по определению

$$\gamma_{abc} \equiv \eta_{ad}\gamma^d_{bc} = -\gamma_{bac}. \tag{8}$$

Коэффициенты связности определяются однозначно из (8) и требования отсутствия кручения

$$\partial_\mu e^a_\nu - \partial_\nu e^a_\mu + \gamma^a_{b\mu}e^b_\nu - \gamma^a_{b\nu}e^b_\mu = 0 \tag{9}$$

с результатом

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{\alpha 00} = \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{g}_0 - [\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]]\right)^\alpha, \\
&\gamma_{\alpha 0\beta} = \gamma_{\alpha\beta 0} = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\left\{\left(1 - \frac{r_g}{2R_\oplus}(1-I)\right)\frac{\boldsymbol{\omega}^\sigma}{c} + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{r_g}{R_\oplus}\left(1 - \frac{3}{2}I\right)\frac{(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}_\oplus)\mathbf{n}_\oplus^\sigma}{c}\right\}, \\
&\gamma_{\alpha\beta\rho} = \varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\left\{-\varepsilon_{\sigma\rho\delta}\frac{\mathbf{g}_0^\delta}{c^2} + \frac{3}{2c^2}\boldsymbol{\omega}^\sigma[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]^\rho\right\},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где $\mathbf{n}_\oplus = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор, $\mathbf{g}_0/c^2 \equiv -(r_g/2R^2)\mathbf{n}_\oplus$ — ускорение свободного падения без поправки на центробежное ускорение (гравиметры измеряют их совокупность). В дальнейшем мы обсуждаем движение заряженных частиц и динамику их спина в накопителе на поверхности Земли и $|\mathbf{R}| = R_\oplus$.

3. ЦИКЛОТРОННОЕ ДВИЖЕНИЕ И СПИНОВАЯ ДИНАМИКА В ОТО

3.1. Орбитальное движение частицы

Пусть $ds \equiv \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}$ обозначает бесконечно малый интервал при движении частицы вдоль мировой линии. Введем обозначение

$$
\frac{DX^\mu}{ds} \equiv u^\nu\nabla_\nu X^\mu, \quad u^\nu \equiv \frac{dx^\nu}{ds}. \tag{11}
$$

Известное уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле в искривленном пространстве,

$$
mc\frac{Du^\mu}{ds} = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{12}
$$

переписывается в ОНБ в компонентах как

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\gamma}{dt} = (\gamma_{\alpha 0c}u^c)\mathbf{v}^\alpha + \frac{q}{mc}\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{\beta} \equiv \frac{\mathbf{v}}{c}, \\
&\frac{du^\alpha}{dt} = c\Big((\gamma_{\alpha 0c}u^c) + (\gamma_{\alpha\beta c}u^c)\boldsymbol{\beta}^\beta\Big) + \\
&\qquad + \frac{q}{mc}\left(\mathbf{E}^\alpha + [\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{H}]^\alpha\right), \\
&u^a = (\gamma, \mathbf{u}) = \gamma(1, \boldsymbol{\beta}), \quad ds = \frac{c}{\gamma}\,dt.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Здесь используются стандартные обозначения

$$
\mathbf{E}^\alpha \equiv F^{\alpha 0}, \quad \mathbf{H}^\alpha \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}F^{\beta\gamma}. \tag{14}
$$

Для обоснования уравнений движения (13) воспользуемся уравнением Дирака в представлении Фолди–Вотхойзена (ФВ) [20, 21]. Поскольку влияние спина на пространственное движение протона пренебрежимо мало [18, 19], мы используем стандартный дираковский гамильтониан без вкладов ЭДМ и аномального МДМ.

Перейдем к нормальным координатам Римана y^μ с центром в произвольной точке p:

$$
\begin{aligned}
e^a_\mu(y) &= \delta^a_\mu + \frac{1}{6}\,\mathfrak{R}^a_{\nu\lambda\mu}(p)y^\nu y^\lambda + O(y^3), \\
\gamma_{ab\,\mu}(y) &= \frac{1}{2}\,\mathfrak{R}_{ab\,\nu\mu}(p)y^\nu + O(y^2),
\end{aligned}
\tag{15}
$$

где $\mathfrak{R}_{ab\,\nu\mu}$ — тензор Римана. Эта координатная система далее называется K_0, и она не совпадает с системами координат K и K', что видно из сравнения формул (1) и (15). Координатная система K_0 является математической моделью «свободно падающего лифта», т. е. такой системой, в которой гравитация влияет на динамику в минимально возможной степени. В этих координатах влияние гравитации проявляется исключительно через тензор Римана, который имеет размерность см$^{-2}$. Размеры «лифта» (расстояние от точки p) входят квадратичным множителем при тензоре Римана. В нормальных координатах Римана удобно устанавливать фундаментальные уравнения и затем переписывать их в произвольных системах, руководствуясь принципом общей ковариантности. Далее мы рассматриваем уравнение Дирака в нормальных координатах Римана в малой окрестности центра координат p с тем, чтобы обосновать уравнения (13) для частицы со спином.

Будем пользоваться совместной с (15) калибровкой

$$
A_0 = 0, \; \gamma_0^{ab} = 0, \quad e_0^\alpha = 0, \; \tilde{e}_0^{\,i} = 0. \tag{16}
$$

Тогда одночастичный дираковский гамильтониан принимает вид

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H} = \gamma^0\left\{c\gamma^\alpha p_\alpha + mc^2\right\}, \\
&p_\alpha \equiv -i\hbar\tilde{e}^i_\alpha\mathcal{D}_i, \quad \mathcal{D}_i \equiv \partial_i + \frac{1}{2}\sigma^{ab}\gamma_{abi} + \frac{iq}{\hbar c}A_i.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Везде γ^a — матрицы Дирака и $\sigma^{ab} \equiv (1/4)[\gamma^a, \gamma^b]$.

Оператор $(\gamma^0\gamma^\alpha p_\alpha)$ эрмитов относительно функциональной метрики $\int d^{(3)}x\sqrt{-g}\Psi_1^\dagger\Psi_2$, т. е.

$$
(\gamma^\alpha p_\alpha)^\dagger\gamma^0 = \gamma^0(\gamma^\alpha p_\alpha). \tag{18}
$$

Применим квантовое каноническое преобразование ФВ к спинорам и операторам согласно правилу

$$
\begin{aligned}
&\Psi' = e^{iS}\Psi, \quad \mathcal{H}' = \left(e^{-iS}\right)^\dagger\mathcal{H}e^{-iS}, \\
&S \equiv -\frac{1}{2mc}\left(i\gamma^\alpha p_\alpha\right)w(\phi), \quad \phi \equiv \frac{\sqrt{(i\gamma^\alpha p_\alpha)^2}}{mc}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

При помощи (17)–(19) находим

$$\mathcal{H}' = \gamma^0 e^{-2iS}\left(c\gamma^\alpha p_\alpha + mc^2\right) = = \gamma^0\left[\cos(\phi w) - \frac{\gamma^\alpha p_\alpha}{\sqrt{(i\gamma^\alpha p_\alpha)^2}}\sin(\phi w)\right] \times \times \left(c\gamma^\alpha p_\alpha + mc^2\right) = mc^2\gamma^0\left\{[\cos(\phi w) + \phi\sin(\phi w)] + + \frac{\gamma^\alpha p_\alpha}{\sqrt{(i\gamma^\alpha p_\alpha)^2}}[\phi\cos(\phi w) - \sin(\phi w)]\right\}. \quad (20)$$

Если положить $\phi w = \operatorname{arctg}\phi$, то последнее слагаемое в правой части выражения (20) обращается в нуль, так что

$$\mathcal{H}' = \gamma^0 c\sqrt{m^2c^2 + (i\gamma^\alpha p_\alpha)^2} \equiv \gamma^0\mathcal{E}, \quad (21)$$

где $\mathcal{E}$ — энергия частицы.

Операторами координат частицы в представлении ФВ являются координаты Римана y^α. Имеем

$$[y^i,\, p_\alpha] = i\hbar\tilde{e}^i_\alpha, \quad [p_\alpha,\, p_\beta] = -i\frac{\hbar q}{c}F_{\alpha\beta} - \frac{\hbar^2}{2}\sigma^{ab}\,\mathfrak{R}_{\alpha\beta ab}\,. \quad (22)$$

Для положительно-частотной частицы (протон), когда можно заменить $\gamma^0 \to 1$, оператор скорости имеет вид

$$\mathbf{v}^\alpha \equiv \frac{i}{\hbar}e^\alpha_i[\mathcal{H}',\, y^i] = \frac{cp_\alpha}{\sqrt{m^2c^2 + (i\gamma^\alpha p_\alpha)^2}} = \frac{c^2p_\alpha}{\mathcal{E}}.$$

Мы пренебрегаем проблемой расстановки операторов, которая возникает при коммутировании сложных операторов, поскольку нас интересует классический предел, в котором слагаемые с лишними степенями постоянной Планка исчезают. Оператор $\mathcal{E}\mathbf{v}^\alpha/c^2 = p_\alpha$ является квантовым аналогом введенного выше классического импульса $m\mathbf{u}^\alpha$. Для скорости изменения p_α имеем

$$\frac{d}{dy^0}p_\alpha = \frac{i}{\hbar c}[\mathcal{H}',\, p_\alpha] = \frac{q}{\mathcal{E}}[\mathbf{p}\times\mathbf{H}]^\alpha + + \frac{q}{c}\frac{\partial}{\partial y^0}A_\alpha + \ldots \quad (23)$$

Второе слагаемое в правой части выражения (23) получается, если к фермионной части гамильтониана $\mathcal{H}'$ в (23) добавляется гамильтониан электромагнитного поля

$$\mathcal{H}_{EM} = \int\frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi}\,d^{(3)}y.$$

Поскольку

$$\left[E^i(\mathbf{x}),\, A^j(\mathbf{y})\right] = 4\pi i\hbar c\delta^{ij}\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

коммутатор $[\mathcal{H}_{EM},\, p_\alpha]$ приводит к упомянутому слагаемому.

Многоточие в (23) означает вклад, пропорциональный тензору Римана и спиновым матрицам (см. (22)), т. е. вклад в орбитальное движение, обусловленный наличием спина. Более подробное изучение проблемы влияния спина на орбитальное движение содержится в работах [18, 19]. Мы ограничимся утверждением, что в нашей основной задаче об электростатическом накопителе для поиска ЭДМ этой поправкой можно пренебречь. При этом уравнение (23) воспроизводит уравнение (13) в нормальных координатах Римана, когда частица находится в их центре. Этот факт абсолютно прозрачен в случае $\mathfrak{R}_{abcd} = 0$ и $\mathbf{H} = \mathbf{E} = 0$, когда все силы, включая гравитационные, отсутствуют. В произвольных координатах следует пользоваться уравнениями (12) или (13).

Угловая скорость циклотронного вращения частицы,

$$\mathbf{\Omega}_c = \frac{1}{\mathbf{v}^2}\left[\mathbf{v}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right], \quad (24)$$

обусловленная электромагнитным полем, известна:

$$\mathbf{\Omega}^{EM}_c = -\frac{q}{mc\gamma}\mathbf{H} + \frac{q}{mc\gamma\boldsymbol{\beta}^2}\times \times\Big((\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} + [\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}]\Big). \quad (25)$$

Вычисление вклада ОТО в циклотронное вращение дает в лабораторной системе угловую скорость

$$\mathbf{\Omega}^{Gr}_c = \frac{1}{\gamma\mathbf{v}^2}\left[\mathbf{v}\times\left\{\left(\frac{2\gamma^2-1}{\gamma}\mathbf{g}_0 + \gamma\big[\boldsymbol{\omega}\times[\mathbf{R}\times\boldsymbol{\omega}]\big]\right) + + 2\gamma\left(\left(1 - \frac{r_g}{2R_\oplus}(1-I)\right) + \frac{3\big(\mathbf{v}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]\big)}{4c^2}\right)[\mathbf{v}\times\boldsymbol{\omega}] + + \frac{2\gamma r_g}{R_\oplus}\left(1 - \frac{3}{2}I\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}_\oplus)[\mathbf{v}\times\mathbf{n}_\oplus]\right\}\right]. \quad (26)$$

Полная угловая скорость вращения импульса частицы во вращающейся с Землей лабораторной системе равна

$$\mathbf{\Omega}_c = \mathbf{\Omega}^{Gr}_c + \mathbf{\Omega}^{EM}_c, \quad \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{\Omega}_c = 0. \quad (27)$$

Обсудим подробнее выражение в фигурных скобках во вкладе ОТО (26). Заметим сначала, что часто встречающееся векторное произведение $[\mathbf{R}\times\mathbf{v}]$ напоминает об орбитальном моменте протона относительно Земли

$$\mathbf{L}_\oplus \equiv \gamma m\big[\mathbf{R}_\oplus\times\mathbf{v}\big] = \big[\mathbf{R}_\oplus\times\mathbf{p}\big].$$

Первый член в этом разложении отвечает притяжению релятивистской частицы к центру Земли в совокупности со вкладом центробежного ускорения, входящего с релятивистским фактором γ. При $\gamma \to 1$ воспроизводится обычный нерелятивистский результат. Второй член описывает ускорение Кориолиса с релятивистским фактором γ. Он содержит поправку на ОТО, пропорциональную $r_g/R_\oplus$, а также поправку на вращение Земли. Занятно, что последняя напоминает известное взаимодействие Лензе–Тирринга [15] между орбитальным моментом протона относительно Земли, $\mathbf{L}_\oplus$, и спином центрального тела, $\mathbf{S}_\oplus \equiv IM_\oplus R_\oplus^2 \boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{3\gamma\big(\mathbf{v}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]\big)}{4c^2} = \frac{3}{4mc^2}\,\frac{\mathbf{S}_\oplus\cdot\mathbf{L}_\oplus}{IM_\oplus R_\oplus^2}\,. \tag{28}$$

Предостережем, однако, что в циклическом ускорителе частица движется в электромагнитных полях и $\mathbf{L}_\oplus$ не является сохраняющейся величиной. Последний член в фигурных скобках в (26) есть поправка на ОТО, пропорциональная $\mathbf{L}_\oplus$.

3.2. Релятивистское движение спина при наличии МДМ и ЭДМ

Пусть $\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{d}$ — соответственно МДМ и ЭДМ частицы, покоящейся в начале координат системы K_0 с нормальными координатами Римана. В этом случае уравнение для прецессии вектора поляризации $\mathbf{S}$ имеет обычный нерелятивистский вид:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{2\mu}{\hbar}\big[\mathbf{S}\times\mathbf{H}\big] + \frac{2d}{\hbar}\big[\mathbf{S}\times\mathbf{E}\big]. \tag{29}$$

В стандартном описании динамики спина релятивистской частицы в лабораторной системе вводится 4-вектор поляризации P^a такой, что в системе K_0 он равен $P^a = (0,\mathbf{S})$, а в лабораторной системе, в которой частица движется с 4-скоростью u^a, этот 4-вектор получается путем преобразования Лоренца:

$$\begin{gathered}\mathbf{P} = \mathbf{S} + \frac{\gamma^2}{c^2(\gamma+1)}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v},\\ P^0 = \frac{\gamma}{c}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}), \quad u_aP^a = 0.\end{gathered} \tag{30}$$

С учетом вклада ЭДМ релятивистское динамическое уравнение для 4-вектора поляризации в лабораторной системе имеет вид [22, 23]

$$\frac{dP^a}{ds} + (\gamma^a_{bc}u^c)P^b = \frac{2}{\hbar c}\Big\{\mu F^a{}_bP^b - \mu' u^a F^b{}_c u_b P^c - dF^{*\,a}{}_bP^b + du^aF^{*\,b}{}_cu_bP^c\Big\}, \tag{31}$$

где

$$\begin{gathered}F^{*\,ab} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{abcd}F_{cd}, \quad \varepsilon^{0123} = 1,\\ \mu \equiv (G+1)\frac{q\hbar}{2mc}, \quad \mu' = G\frac{q\hbar}{2mc}, \quad G = \frac{g-2}{2},\\ d = \eta_{EDM}\frac{q\hbar}{2mc}.\end{gathered} \tag{32}$$

Левая часть уравнения (31) вытекает из того факта, что в отсутствие электромагнитных полей вектор поляризации частицы переносится параллельно вдоль мировой линии частицы, что с очевидностью имеет место в системе K_0 согласно уравнению (29).

Для оправдания правой части уравнения (31) перейдем в систему координат K_0, в которой, согласно (30), $\mathbf{P} = \mathbf{S}$, $d\mathbf{P}/dt = d\mathbf{S}/dt$ и пространственные части второго и четвертого 4-векторов в фигурных скобках в (31) исчезают. Тогда в обеих частях уравнения (31) пространственные вклады воспроизводят уравнение (29). Далее, свернем уравнение (31) с 4-вектором скорости u_a. Вследствие уравнений (12), (30) и (32) мы получим тождество. Тем самым справедливость уравнения (31) установлена.

3.3. Вклад в прецессию поляризации от МДМ, ЭДМ и гравитации

Релятивистское уравнение (31) не является окончательным продуктом, нам нужно уравнение прецессии для экспериментально измеряемого вектора поляризации $\mathbf{S}$. Рассмотрим последовательно вклады в прецессию от МДМ, ЭДМ и гравитации.

3.3.1. Вклад от МДМ

Этот вклад был получен в классических работах Френкеля [24] и Томаса [25], а в используемой в физике ускорителей форме — в работе [26]:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}_{MDM} &= -\frac{2\mu+2\mu'(\gamma-1)}{\gamma\hbar}\mathbf{H} + \frac{2\mu'\gamma}{(\gamma+1)\hbar}(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} + \\ &+ \frac{2\mu+2\mu'\gamma}{(\gamma+1)\hbar}[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}] = \\ &= -\frac{q}{mc}\left\{\left(G+\frac{1}{\gamma}\right)\mathbf{H} - \frac{\gamma G(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\beta})}{\gamma+1}\boldsymbol{\beta} - \left(G+\frac{1}{\gamma+1}\right)[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}]\right\}.\end{aligned} \tag{33}$$

3.3.2. Вклад от ЭДМ

Вклад в угловую скорость прецессии спина ЭДМ был обсужден ранее в работах [22, 23]. Его можно элементарно получить из результата (33) для МДМ, сделав, согласно (31), замены $\mu \to -d$, $\mu' \to -d$, $\mathbf{E} \to \mathbf{H}$ и $\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$. После этих подстановок в формулу (33) мы приходим к вкладу в угловую частоту прецессии спина, обусловленному ЭДМ,

$$\boldsymbol{\Omega}_{EDM} = \\ = \eta_{EDM}\frac{q}{mc}\left\{-\mathbf{E}+\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}+[\mathbf{H}\times\boldsymbol{\beta}]\right\}. \quad (34)$$

3.3.3. Вклад от гравитации

Согласно (13) и (31), этот вклад получается из вклада от МДМ, если в (33) положить $2\mu = q\hbar/mc$, $\mu' = d = 0$ и сделать замены [18]

$$\begin{gathered}\frac{q}{mc^2}\mathbf{E}^\alpha \to (\gamma_{\alpha 0c}u^c),\\ \frac{q}{mc^2}\mathbf{H}^\alpha \to \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\rho}(\gamma_{\beta\rho c}u^c).\end{gathered} \quad (35)$$

Таким образом находим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}^{Gr} &= \frac{2\gamma+1}{\gamma+1}\frac{[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{g}_0]}{c} - \left(\frac{2\gamma-1}{\gamma}\left(1-\frac{r_g}{2R_\oplus}\right) + \right.\\ &\left.+\frac{5\gamma+3}{2(\gamma+1)}\frac{\big(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]\big)}{c}\right)\boldsymbol{\omega} + \frac{\gamma}{\gamma+1}\Bigg((\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta}) - \\ &- \frac{r_g}{R_\oplus}\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})-(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}_\oplus)(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}_\oplus)\right)\Bigg)\boldsymbol{\beta} + \\ &+\frac{\gamma}{(\gamma+1)c}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}] - \frac{2\gamma-1}{\gamma}\frac{r_g}{R_\oplus}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}_\oplus)\mathbf{n}_\oplus - \\ &- \frac{r_g I}{2R_\oplus}\left[\frac{2\gamma-1}{\gamma}\Big(\boldsymbol{\omega}-3(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}_\oplus)\mathbf{n}_\oplus\Big) - \right.\\ &\left. - \frac{\gamma}{\gamma+1}\Big((\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta}) - 3(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}_\oplus)(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}_\oplus)\Big)\boldsymbol{\beta}\right]. \quad (36)\end{aligned}$$

Здесь первый член описывает геодетический эффект де Ситтера [27] с установленной в работах [18, 19] релятивистской зависимостью. Второй член, пропорциональный $\boldsymbol{\omega}$, есть эффект вращения Земли с релятивистским множителем $(2\gamma-1)/\gamma$ и с поправкой на ОТО. Еще одна поправка, пропорциональная $\big(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]\big)$, сходна с обсужденной выше релятивистской поправкой к ускорению Кориолиса. Третий член, пропорциональный $\boldsymbol{\beta}$, описывает прецессию спина вокруг импульса — она есть во вкладах и от МДМ, и от ЭДМ. Четвертый член — это прецессия спина относительного вклада $[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]$ вращения Земли в скорость частицы. Наконец, последние два члена этого разложения, пропорциональные моменту инерции Земли I, есть не что иное, как релятивистское обобщение вклада Лензе – Тирринга в прецессию спина [15].

3.3.4. Полная относительная скорость прецессии спина

Экспериментаторов интересует полная относительная прецессия спина $\boldsymbol{\Omega}^{rel}$, которая определяется как полная скорость прецессии спина за вычетом полной циклотронной угловой скорости:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}^{rel} &\equiv \boldsymbol{\Omega}_{MDM} + \boldsymbol{\Omega}_{EDM} + \boldsymbol{\Omega}_{Gr} - \boldsymbol{\Omega}_c = \\ &= -\frac{q}{mc}\left\{G\mathbf{H} - \frac{\gamma}{\gamma+1}\left(G-\frac{1}{\gamma-1}\right)(\mathbf{H}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \right.\\ &\left. - \left(G - \frac{1}{\gamma^2-1}\right)[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}]\right\} + \\ &+ \eta\frac{q}{mc}\left\{-\mathbf{E}+\frac{\gamma}{\gamma+1}(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}+[\mathbf{H}\times\boldsymbol{\beta}]\right\} + \boldsymbol{\Omega}^{rel}_{Gr}. \quad (37)\end{aligned}$$

Вычитание $\boldsymbol{\Omega}_c$ означает переход к представлению взаимодействия, в котором за нулевое приближение берется прецессия импульса частицы:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}^{rel}_{Gr} &= -\frac{1}{\gamma\boldsymbol{\beta}^2}\frac{[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{g}_0]}{c} + \frac{1}{\gamma}\left(1-\frac{r_g}{2R_\oplus}(1-I)\right)\boldsymbol{\omega} + \\ &+ \frac{1}{\gamma\boldsymbol{\beta}^2}\frac{\big(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]\big)}{c}\boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\gamma\boldsymbol{\beta}^2}\frac{(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]}{c} + \\ &+ \frac{1}{\gamma}\frac{r_g}{R_\oplus}\left(1-\frac{3}{2}I\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}_\oplus)\mathbf{n}_\oplus - \\ &- \frac{\gamma+1}{\gamma\boldsymbol{\beta}^2}\left(1+\frac{3\gamma\big(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]\big)}{2c(\gamma+1)}\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} + \\ &+ \frac{\gamma+1}{\gamma\boldsymbol{\beta}^2}\frac{r_g}{2R_\oplus}(1-I)(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta} - \\ &- \frac{\gamma+1}{\gamma\boldsymbol{\beta}^2}\frac{r_g}{R_\oplus}\left(1-\frac{3}{2}I\right)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}_\oplus)(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}_\oplus)\boldsymbol{\beta}. \quad (38)\end{aligned}$$

4. ЗАМКНУТАЯ ОРБИТА В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ И СИГНАЛ ЭДМ

Тактика экспериментального поиска крайне медленного вращения поляризации частицы за счет ЭДМ следующая [8]. Чтобы исключить взаимодействие МДМ с паразитными магнитными полями [28], накопитель должен быть чисто электростатическим: $\mathbf{H} = 0$. Чтобы исключить взаимодействие МДМ протона с переносным магнитным полем, пропорциональным $[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}]$, следует работать при так называемой магической энергии, когда

$$\beta^2 = \frac{1}{1+G}\,. \quad (39)$$

Тогда без учета эффектов ОТО спин прецессировал бы вокруг радиального электрического поля только за счет ЭДМ:

$$\mathbf{\Omega}_{EDM} = -\eta_{EDM}\frac{q}{mc}\mathbf{E}\,. \qquad (40)$$

Для полноты картины полезно решить задачу об эффектах ОТО для произвольной энергии. Разобьем электрическое поле на два слагаемых, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_f$, где фокусирующее поле $\mathbf{E}_f$ полностью компенсирует гравитационный вклад в движение импульса и обеспечивает замкнутость траектории в ускорителе и сохранение энергии. Трактуя это как малую поправку, далее можно пользоваться метрикой Минковского. В плоскости кольца удерживающее поле $\mathbf{E}_0$ чисто радиальное, скорость частицы лежит в плоскости кольца и ортогональна удерживающему полю, $(\mathbf{E}_0\boldsymbol{\beta}) = 0$, и $\mathbf{n}_\oplus$ есть нормаль к плоскости кольца, так что $\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{n}_\oplus = 0$ и $\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_\oplus = 0$. В дальнейшем удобно будет выделить проекцию $\boldsymbol{\omega}$ на плоскость кольца накопителя; эта проекция $\boldsymbol{\omega}_t$ направлена по касательной к меридиану. С учетом вклада ОТО и фокусирующего поля уравнение движения для импульса имеет вид

$$\frac{du^\alpha}{dt} = \frac{q}{mc}\mathbf{E}_0^\alpha + \\ + \left\{c\left[(\gamma_{\alpha 0c}u^c) + (\gamma_{\alpha\beta c}u^c)\boldsymbol{\beta}^\beta\right] + \frac{q}{mc}\mathbf{E}_f^\alpha\right\} \qquad (41)$$

и дает

$$\frac{q}{mc}\mathbf{E}_f = \gamma\Bigg\{ -\frac{(2\gamma^2-1)\mathbf{g}_0}{\gamma^2 c} + \frac{(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{g}_0)\boldsymbol{\beta}}{c} + \\ + \frac{[\boldsymbol{\omega}\times[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]]}{c} + \\ + \left(2 - \frac{r_g}{R_\oplus}(1-I) + \frac{3}{2c}\big(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}]\big)\right)[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\beta}] - \\ - \frac{r_g}{R_\oplus}(2-3I)(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{n}_\oplus)[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{n}_\oplus]\Bigg\}. \qquad (42)$$

Важно, что поле $\mathbf{E}_f$ может быть реализовано электростатически. Действительно, так как $\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{g}_0 = \boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}_\oplus = 0$, нетрудно убедиться, что вдоль кольца накопителя $\oint \mathbf{E}_f d\mathbf{r} = 0$, т. е. поле $\mathbf{E}_f$ является потенциальным.

После компенсации эффектов ОТО циклотронное движение частицы в накопителе такое же, как в метрике Минковского для движения в чисто радиальном поле $\mathbf{E}_0$. Поэтому поправка на ОТО сводится к вкладу фокусирующего поля $\mathbf{E}_f$ во вращение магнитного момента (33) в совокупности со вкладом гравитации (36), так что для вращения спина относительно импульса получаем

$$\mathbf{\Omega}_f^{rel} = \left(G + \frac{1}{\gamma+1}\right)\frac{q}{mc}[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}_f] + \mathbf{\Omega}_{Gr} = \\ = \mathbf{\Omega}_g^{rel} + \mathbf{\Omega}_\omega^{rel} = \frac{1-(2\gamma^2-1)G}{\gamma}\frac{|\mathbf{g}|_0}{c}[\mathbf{n}_\oplus\times\boldsymbol{\beta}] - \\ - \gamma G\frac{R}{c}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\beta})[\boldsymbol{\omega}_t\times\mathbf{n}_\oplus] + \\ + \Bigg[-\frac{1-2(\gamma^2-1)G}{\gamma}\left(1 - \frac{r_g}{2R_\oplus}(1-I)\right) + \\ + \frac{1}{2\gamma}\left(\left(5\gamma^2-3\right)G - 3\right)\frac{R_\oplus}{c}\big(\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{\omega}_t\times\mathbf{n}_\oplus]\big)\Bigg]\boldsymbol{\omega} + \\ + \left(\frac{2(\gamma^2-1)}{\gamma}G - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{r_g}{R_\oplus}\left(1-\frac{3}{2}I\right)(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\mathbf{n}_\oplus)\mathbf{n}_\oplus - \\ - \left(2\gamma G + \frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\Bigg(\left(1-\frac{r_g}{2R_\oplus}(1-I)\right)(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\boldsymbol{\beta}) + \\ + \frac{r_g}{R_\oplus}\left(1-\frac{3}{2}I\right)(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\mathbf{n}_\oplus)(\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n}_\oplus)\Bigg)\boldsymbol{\beta} - \\ - \left(\gamma G + \frac{\gamma}{\gamma+1}\right)\frac{3}{2}\frac{\big(\boldsymbol{\beta}[\boldsymbol{\omega}_t\times\mathbf{r}]\big)}{c}(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}. \qquad (43)$$

Этот же результат может быть получен из общей формулы (37), если в ней положить $\mathbf{H} = 0$ и выделить сумму вкладов от $\mathbf{\Omega}_{Gr}^{rel}$ и $\mathbf{E}_f$ согласно (38) и (42). Тем самым отдельно учитываются все гравитационные эффекты с учетом замкнутости траектории частицы.

В (43) мы выделили отдельный вклад $\mathbf{\Omega}_g^{rel}$ от компенсации релятивизованной силы тяжести:

$$\mathbf{\Omega}_g^{rel} = \frac{1-G(2\gamma^2-1)}{\gamma}\frac{|\mathbf{g}|_0}{c}[\mathbf{n}_\oplus\times\boldsymbol{\beta}]\,. \qquad (44)$$

Эта формула для произвольных энергий была получена ранее в 2016 г. Обуховым и др. [10], а в специальном случае магической энергии протонов она воспроизводит [14] результат 2012 г. Орлова и др. [9]

$$\mathbf{\Omega}^{rel} = \sqrt{G}\,\frac{|\mathbf{g}|_0}{c}\,\mathbf{e}_r, \qquad (45)$$

где $\mathbf{e}_r$ — единичный радиальный вектор в накопительном кольце. Кстати, если выполнено условие магической энергии (39), то выражение для угловой скорости (43) просто переходит в (38). Далее мы сконцентрируемся на вкладе вращения Земли, $\mathbf{\Omega}_\omega^{rel}$.

Роль трех компонент в разложении

$$\mathbf{\Omega}_\omega^{rel} = \Omega_{\omega,r}^{rel}[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{n}_\oplus] + \Omega_{\omega,\beta}^{rel}\boldsymbol{\beta} + \Omega_{\omega,n}^{rel}\mathbf{n}_\oplus \qquad (46)$$

разная. На качественном уровне отличная от нуля проекция $\mathbf{\Omega}_f^{rel}$ на нормаль $\mathbf{n}_\oplus$ к плоскости накопителя нарушала бы условие замороженности спина. Вращение спина за счет отличной от нуля проекции $\boldsymbol{\Omega}_{\omega}^{rel}$ на скорость $\boldsymbol{\beta}$ нарушала бы накопление вертикальной поляризации — главного сигнала ЭДМ. Нежелательным фоном к сигналу ЭДМ была бы проекция $\boldsymbol{\Omega}_{f}^{rel}$ на радиальную ось накопителя, пропорциональная $[\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{n}_{\oplus}]$. Детальное обсуждение полной динамики спина с учетом всех поправок на ОТО выходит за рамки этой статьи, мы ограничимся здесь рядом простых замечаний.

Начнем с возможного ложного сигнала ЭДМ:

$$\Omega_{\omega,r}^{rel} \equiv \frac{1}{\beta^2}\left([\mathbf{n}_{\oplus}\times\boldsymbol{\beta}]\cdot\boldsymbol{\Omega}_{Gr}^{(0)}\right) = -\frac{1-2G(\gamma^2-1)}{\gamma\beta^2}\times \times\left(1-\frac{r_g}{2R_{\oplus}}(1-I)\right)\left(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}_t\times\mathbf{n}_{\oplus}]\right)+\gamma G\frac{R_{\oplus}}{c\beta^2}(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\boldsymbol{\beta})^2+ +\left(\frac{1}{2\gamma}\left(5\gamma^2-3\right)G-3\right)\frac{R_{\oplus}}{c\beta^2}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}_t\times\mathbf{n}_{\oplus}]\right)^2. \quad (47)$$

Здесь первый член порядка угловой скорости суточного вращения Земли $\omega = 7.3\cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$. Формально при предельно малых обсуждаемых $\eta_{EDM}\sim 10^{-15}$ это гигантская угловая скорость, на пять порядков превышающая угловую скорость вращения спина за счет ЭДМ. Однако векторы $\boldsymbol{\omega}_t$ и $\mathbf{n}_{\oplus}$ постоянны в лабораторной системе, и при движении частицы по орбите этот член знакопеременный. Поэтому на качественном уровне для частицы на идеальной орбите его интегральный за один оборот вклад во вращение спина обращается в нуль:

$$\frac{1}{2\pi}\oint d\theta\left(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}_t\times\mathbf{n}_{\oplus}]\right) = 0\,, \quad (48)$$

где θ — азимутальный угол. Для нецентральных частиц в реальных накопителях точность этой компенсации надо устанавливать детальным численным моделированием. Усреднение по обороту вклада квадратичных членов дает

$$\langle(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\boldsymbol{\beta})^2\rangle = \langle\left(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}_t\times\mathbf{n}_{\oplus}]\right)^2\rangle = \frac{1}{2}\beta^2\omega_t^2 \quad (49)$$

и ЭДМ-подобный вклад в угловую скорость вращения спина вокруг радиальной оси накопителя порядка

$$\Omega_{\omega^2,r}^{rel}\sim\frac{R_{\oplus}\omega}{c}\omega\approx 10^{-10}\ \text{с}^{-1}\,, \quad (50)$$

что при $\eta_{EDM}\sim 10^{-15}$ всего на один порядок меньше сигнала ЭДМ.

Обратимся к вращению спина вокруг скорости $\boldsymbol{\beta}$:

$$\Omega_{\omega,\beta}^{rel} = \frac{1}{\beta^2}\left(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\Omega}_{Gr}^{(0)}\right) = -\left[\left(1-\frac{r_g}{2R_{\oplus}}(1-I)\right)+ +\frac{3\left(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}_t\times\mathbf{R}]\right)}{2c}\right]\frac{1}{\beta^2}(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\boldsymbol{\beta}). \quad (51)$$

Ситуация полностью повторяет разобранную выше. Интегральный за один оборот вклад линейного по суточному вращению Земли члена обращается в нуль. Квадратичный вклад имеет малость (50). Все сказанное выше относится и к вращению спина относительно нормали к плоскости кольца накопителя:

$$\Omega_{\omega,\beta}^{rel} = \left(\mathbf{n}_{\oplus}\cdot\boldsymbol{\Omega}_{Gr}^{(0)}\right) = \frac{2(\gamma^2-1)G-1}{\gamma}\times \times\left(1+\frac{r_g}{2R_{\oplus}}(1-2I)\right)(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\mathbf{n}_{\oplus})+ +\left(\left(\gamma+\frac{3(\gamma^2-1)}{2\gamma}\right)G-\frac{3}{2\gamma}\right)\times \times\frac{\left(\boldsymbol{\beta}\cdot[\boldsymbol{\omega}_t\times\mathbf{R}]\right)}{c}(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\mathbf{n}_{\oplus}). \quad (52)$$

5. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ НАКОПИТЕЛЯ И ЭДМ

Здесь мы обсудим еще один фоновый магнитный эффект в чисто электростатическом накопителе, связанный с суточным вращением Земли. Поясним его на примере накопителя на Северном полюсе, когда вектор $\boldsymbol{\omega}$ направлен по нормали к плоскости кольца накопителя. Сам накопитель представляет собой цилиндрический конденсатор с зазором d между цилиндрами, много меньшим высоты h цилиндров, которая, в свою очередь, много меньше радиуса цилиндров $r_{1,2}=\rho\pm d/2$:

$$d\ll h\ll\rho.$$

Введем локальные декартовы координаты x, y, z с центром координат в центре кольца накопителя и с $\mathbf{r}=(x,\,y)$ в плоскости кольца. Равновесная траектория частиц идет по центру зазора, и в силу геометрии задачи зависимостью от вертикальной координаты z можно пренебречь. Тогда направленное к центру кольца электрическое поле в зазоре конденсатора равно

$$\mathbf{E}_0 = -\mathcal{E}_0\frac{\rho\mathbf{r}}{r^2} = -\nabla A_0(r), \quad A_0(r)=\mathcal{E}_0\rho\ln\frac{r}{\rho}. \quad (53)$$

Статические заряды на цилиндрах имеют противоположные знаки. С точки зрения наблюдателя в инерциальной системе неподвижных звезд K', вращение цилиндров с угловой скоростью вращения Земли означает, что в системе имеются два противоположных тока. В зазоре между цилиндрами,

$r_1 < r < r_2$, генерируемые двумя цилиндрами магнитные поля складываются конструктивно. В инерциальной системе линейные скорости нерелятивистского движения зарядов на цилиндрах равны $\mathbf{v}(\mathbf{r}_{1,2}) = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{1,2}]$. Простое вычисление полей в зазоре дает однородное магнитное поле, связанное с электрическим полем соотношением

$$\mathbf{H}'_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\big[\mathbf{v}(\mathbf{r}) \times \mathbf{E}_0(\mathbf{r})\big]. \tag{54}$$

На первый взгляд, это паразитное с точки зрения ЭДМ магнитное поле вносит асимметрию между пучками, вращающимися в накопителе по и против часовой стрелки.

Однако на Северном полюсе это чисто переносное магнитное поле обращается в нуль после перехода к связанной с Землей лабораторной системе, в которой кольцо накопителя покоится. На произвольной широте картина токов сложнее и эта компенсация не выполняется. Очевидно, что для накопителя радиусом $\rho \sim 50$ м параметр малости паразитного магнитного поля есть

$$\eta_{\boldsymbol{\omega}} = \frac{|\boldsymbol{\omega}|\rho}{c} \sim 10^{-11}. \tag{55}$$

В отличие от магнитного поля Земли, это внутреннее паразитное поле не может быть скомпенсировано магнитной экранировкой кольца накопителя. Несмотря на очевидную малость $\eta_{\boldsymbol{\omega}}$, для интерпретации экспериментов по поиску ЭДМ с предполагаемой чувствительностью $\eta_{EDM} \sim 10^{-15}$ требуется аккуратный анализ решения уравнений Максвелла с учетом вращения Земли. Такая специфическая задача о паразитных магнитных полях в электростатическом накопителе ранее не обсуждалась, и здесь мы приведем ее общий анализ для представляющего практический интерес случая статической метрики с $g_{0i} \neq 0$.

Нам интересен специальный случай электростатического накопителя в отсутствие электрических токов. Решаем уравнения Максвелла в искривленном пространстве со статической метрикой с $g_{0i} \neq 0$:

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\partial_\nu F_{\lambda\rho} = 0, \tag{56}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,F^{\nu\mu}\right) = 4\pi J^\mu, \tag{57}$$

$$g \equiv \det g_{\mu\nu}. \tag{58}$$

Имеем статические заряд и нулевые токи:

$$J^0 \neq 0, \quad J^i = 0\,. \tag{59}$$

Наш выбор тетрады (5) удобен тем, что дает нулевую пространственную компоненту тока, и в ОНБ

$$J^a = e^a_\mu J^\mu = \left(e^0_0 J^0,\, e^\alpha_i J^i\right) = \left(e^0_0 J^0,\, 0,0,0\right). \tag{60}$$

Подчеркнем, что это свойство имеет место не для всех тетрад (см., например, работу [19]).

Разрешим однородные уравнения (56) традиционным выбором $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. В нашем статическом случае тензор $F^{\mu\nu}$ с верхними индексами равен

$$F^{i0} = \left(g^{ij}g^{00} - g^{0i}g^{0j}\right)F_{j0} + g^{ij}g^{0k}F_{jk}, \tag{61}$$

$$F^{ij} = g^{ik}g^{jl}F_{kl} + \left(g^{ik}g^{0j} - g^{jk}g^{0i}\right)F_{k0}. \tag{62}$$

При помощи (6) и (14) находим связь с полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, которые входят в динамические уравнения для импульса и спина в ОНБ:

$$F^{i0} = \tilde{e}_a^{\,i}\tilde{e}_b^{\,0}F^{ab} = \tilde{e}_0^{\,0}\tilde{e}_\alpha^{\,i}\mathbf{E}^\alpha - \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\tilde{e}_\alpha^{\,i}\tilde{e}_\beta^{\,0}\mathbf{H}^\gamma, \tag{63}$$

$$F^{ij} = \tilde{e}_a^{\,i}\tilde{e}_b^{\,j}F^{ab} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\tilde{e}_\alpha^{\,i}\tilde{e}_\beta^{\,j}\mathbf{H}^\gamma. \tag{64}$$

Пусть $\overline{g}_{ij}$ — матрица, обратная к матрице g^{ij} и $\overline{g} = \det\overline{g}_{ij}$. Приравнивая правые части уравнений (62) и (64) и опуская верхние индексы «ij» при помощи матрицы $\overline{g}_{ik}$, получаем равенство

$$F_{ij} = g^{0l}\left(\overline{g}_{li}F_{j0} - \overline{g}_{lj}F_{i0}\right) + \frac{\overline{g}}{\sqrt{-g}}\varepsilon_{ijl}e^0_0\tilde{e}_\alpha^{\,l}\mathbf{H}^\alpha. \tag{65}$$

Вследствие уравнений (56) с $\mu = 0$ имеем $\varepsilon_{ijk}\partial_k F_{ij} = 0$, и потому равенство (65) приводит к уравнению

$$\partial_k\left(\frac{\overline{g}}{\sqrt{-g}}e^0_0\tilde{e}_\alpha^{\,k}\mathbf{H}^\alpha\right) = \varepsilon_{ijk}\partial_k\big(g^{0l}\overline{g}_{lj}F_{i0}\big) = \\ = \varepsilon_{ijk}F_{i0}\partial_k\big(g^{0l}\overline{g}_{lj}\big). \tag{66}$$

Здесь мы учли, что в статической задаче $\varepsilon_{ijk}\partial_k F_{i0} = \varepsilon_{ijk}\partial_k\partial_i A_0 \equiv 0$. Поправки на ОТО входят через производную $\partial_k\overline{g}_{lj}$ и имеют относительную малость порядка $r_g/R_\oplus \sim 10^{-9}$.

Отсюда видно, что если $F_{i0} \neq 0$ и $g^{0i} \neq 0$, что имеет место в нашем случае, то правая часть уравнения (66), вообще говоря, не равна нулю. Это означает, что во вращающейся системе отсчета K при наличии статических электрических зарядов возможно отличное от нуля магнитное поле даже в отсутствие электрических токов.

Далее мы проводим вычисления с точностью до первого порядка по $\boldsymbol{\omega}$, опуская поправки, пропорциональные $r_g/R_\oplus$, а также полагаем $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$. Тогда, согласно выражениям (1), (5), (6) и (7),

$$
\begin{gathered}
g_{00} = g^{00} = 1, \quad g_{0i} = g^{0i} = -\frac{[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}]^i}{c}, \\
g_{ij} = \overline{g}_{ij} = g^{ij} = -\delta^{ij}, \quad g = \overline{g} = -1, \\
e_0^0 = 1, \quad e_i^0 = -\frac{\left[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right]^i}{c}, \quad e_i^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad e_0^\alpha = 0, \\
\tilde{e}_0^0 = 1, \quad \tilde{e}_\alpha^0 = \frac{\left[\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right]^\alpha}{c}, \quad \tilde{e}_\alpha^i = \delta_\alpha^i, \quad \tilde{e}_0^i = 0.
\end{gathered} \tag{67}
$$

Поскольку $\tilde{e}_\alpha^0 = O(\boldsymbol{\omega})$, в силу (66) и (67) имеем $H = O(\boldsymbol{\omega})$. Поэтому, согласно (63) и (67), в этом же приближении

$$
F^{i0} = \mathbf{E}_0^i = -F_{i0} = -\partial_i A_0, \tag{68}
$$

так что уравнение (58) с $\mu = 0$ переходит в уравнение Пуассона для потенциала A_0:

$$
\operatorname{div}\mathbf{E}_0 = -\Delta A_0 = 4\pi J^0. \tag{69}
$$

При помощи (67) уравнение (66) переписывается как

$$
\operatorname{div}\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{2}{c}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{E}_0). \tag{70}
$$

Это есть центральный результат нашего анализа. Здесь и ниже индекс «$\boldsymbol{\omega}$» указывает на вращение Земли как источник этого магнитного поля $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}}$. В этом же приближении в силу уравнений (58) с $\mu = 1$, 2, 3 имеем $\operatorname{rot}\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}} = 0$ во всем пространстве, так что

$$
\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}} = -\nabla\psi, \tag{71}
$$

$$
\Delta\psi = \frac{2}{c}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{E}_0). \tag{72}
$$

В соответствии с (53) ищем магнитный потенциал ψ в (71) в виде

$$
\psi = f(r)(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\mathbf{r}). \tag{73}
$$

Нижний индекс «t» означает, что берется компонента вектора в плоскости xy. Тогда имеем

$$
\mathbf{H}_\omega = -\nabla\psi = -f\boldsymbol{\omega}_t - f'(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{r}}{r}, \tag{74}
$$

$$
\Delta\psi = \left(\frac{3f'}{r} + f''\right)(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\mathbf{r}) = -\frac{2\mathcal{E}_0\rho}{cr^2}(\boldsymbol{\omega}_t\cdot\mathbf{r}) \tag{75}
$$

с решением

$$
f(r) = -\frac{\mathcal{E}_0\rho}{c}\left(\ln\frac{r}{\rho} + \zeta\right) = -\frac{A_0(r)}{c} - \frac{\mathcal{E}_0\rho}{c}\zeta, \tag{76}
$$

где ζ — константа, подлежащая определению из граничных условий. Используя явный вид функции $f(r)$, можно записать разложение по неприводимым тензорным структурам:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{H}_\omega^i = \Bigg\{\frac{A_0}{c}\delta_{ij} + \frac{\mathcal{E}_0\rho}{c}\times \\
\times\left[\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{2}(\delta_{ij} - 2\mathbf{n}_i\cdot\mathbf{n}_j)\right]\Bigg\}\boldsymbol{\omega}_t^j,
\end{aligned} \tag{77}
$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

Для постановки граничного условия для ζ выпишем формальное решение уравнения (72). С учетом (68) имеем

$$
\begin{aligned}
\psi(\mathbf{r}) = \frac{2\boldsymbol{\omega}_t^j}{c}\int d^{(2)}y\,\Delta^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{y})\mathbf{E}_0^j(\mathbf{y}) = \\
= -\frac{2\boldsymbol{\omega}_t^j}{c}\int d^{(2)}y\,\partial_j\Delta^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{y})A_0(\mathbf{y}).
\end{aligned} \tag{78}
$$

Здесь $\Delta^{-1}(\mathbf{r}) = (1/2\pi)\ln|\mathbf{r}|$ — оператор, обратный к оператору Лапласа. Так как суммарный заряд системы конденсаторов равен нулю и потенциал $A_0(\mathbf{r})$ достаточно быстро убывает на больших расстояниях от кольца, что играет роль граничного условия, при преобразовании в (78) поверхностные члены не возникают. Согласно (71), искомое магнитное поле можно записать как

$$
\begin{gathered}
\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega},i}(\mathbf{r}) = \frac{2\boldsymbol{\omega}_t^j}{c}A_{ij}(\mathbf{r}), \\
A_{ij}(\mathbf{r}) = \int d^{(2)}y\,\partial_i\partial_j\Delta^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{y})A_0(\mathbf{y}).
\end{gathered} \tag{79}
$$

Заметим, что матрица A_{ij} симметричная и

$$
\operatorname{Tr}A(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}). \tag{80}
$$

Матрицу A_{ij} общего вида разлагаем по неприводимым тензорам, при этом коэффициент при символе Кронекера нам уже известен из (80):

$$
A_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij}A_0(\mathbf{r}) + \sigma(\mathbf{r})(\delta_{ij} - 2\mathbf{n}^i\cdot\mathbf{n}^j)\,. \tag{81}
$$

Сравнение с (77) немедленно дает

$$
\sigma(r) = \frac{1}{4}\mathcal{E}_0\rho, \quad \zeta = \frac{1}{2}. \tag{82}
$$

Тем самым задача решена.

Найденное поле $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}}$ лежит в плоскости кольца. По сравнению с электрическим полем оно имеет малость η_ω. При электрическом поле $|\mathbf{E}| = 7$ МВ/м речь идет о паразитных магнитных полях $|\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}}| \approx$ $\approx 3\cdot 10^{-13}$ Тл, много меньших магнитного поля Земли. Но, в отличие от магнитного поля Земли, оно неустранимо внешней магнитной экранировкой. Столь слабые поля не имеют никакого значения в большинстве практических приложений; исключением является задача поиска ЭДМ, когда $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}}$ может в принципе влиять на динамику спина при $\eta_{EDM} < \eta_\omega$, т. е. при $d_p < 3 \cdot 10^{-27} e \cdot$ см. Так, фундаментальной для электростатических накопителей является возможность исключения систематических фоновых эффектов сравнением вращения спина для встречных пучков на идентичных траекториях, а магнитное поле $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}}$ разводит траектории частиц, вращающихся по часовой стрелке и против нее.

Для частицы на центральной орбите $r = \rho$ и $A_0(r) = 0$, так что постоянная компонента $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}}$ обращается в нуль и остается только квадрупольная компонента. Как обсуждалось в предыдущем разделе, «опасна» постоянная радиальная проекция $\mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}}$. Интегральный за оборот вклад квадрупольной компоненты в принципе обращается в нуль,

$$\oint d\theta\, \mathbf{H}_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{r}) = 0, \tag{83}$$

так что можно рассчитывать на заметное подавление роли этого неожиданного магнитного поля.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенный анализ был инициирован с практической стороны планами [6, 7] строительства прототипа чисто электростатического накопителя-прототипа протонов с энергией 30 МэВ для изучения систематических ошибок, которые могут оказаться существенными в электростатическом накопителе с замороженным при магической энергии спине. С другой стороны, стимулом было важное наблюдение Орлова, Фланагана и Семерцидиса [9], что при предельно достижимой чувствительности к ЭДМ протонов, $\eta_{EDM} \sim 10^{-15}$, гравитационное поле Земли приводит к ложному вращению спина частиц, существенно превышающему сигнал ЭДМ.

Основной результат данной работы — последовательный анализ спиновой динамики в электростатических накопителях релятивистских заряженных частиц с учетом поправок на ОТО, включая эффекты от вращения Земли. Некоторые из найденных нами поправок имеют скорее академический интерес. Но при $\eta_{EDM} \sim 10^{-15}$ угловая скорость вращения спина в электрическом поле электростатического накопителя за счет ЭДМ порядка 10^{-9} рад/с, и по сравнению с этим локально по кольцу имитирующий ЭДМ вклад суточного вращения Земли оказывается просто гигантским. Качественное рассмотрение показывает, что линейный по угловой скорости вращения Земли вклад оказывается знакопеременным вдоль орбиты частицы и в идеальном кольце его интегральный эффект обращается в нуль. Этот вывод о подавлении фона на пять и более порядков требует проверки численным моделированием с реалистической динамикой пучка в накопителе. Квадратичная по угловой скорости Земли поправка конечна, но численно примерно на порядок меньше искомого сигнала ЭДМ.

Неожиданный результат — это отличные от нуля магнитные поля в чисто электростатическом накопителе заряженных частиц, индуцируемые вращением кольца электростатического накопителя вместе с Землей. Это внутреннее поле во вращающемся накопителе примечательно тем, что, в отличие от магнитного поля Земли, оно не может быть подавлено магнитными экранами. Его вклад в локальное вращение спина тоже численно велик по сравнению со вкладом ЭДМ, но он тоже знакопеременный вдоль кольца накопителя, и его интегральный вклад обращается в нуль. В любом случае роль найденных эффектов в поисках ЭДМ заряженных частиц в практических опытах на электростатических накопителях требует отдельного обсуждения в духе формализма, развитого, например, в работе [28].

Благодарности. Авторы благодарны А. Ф. Андрееву и А. В. Бялко за приглашение представить эту статью к публикации в выпуске ЖЭТФ, посвященном 100-летнему юбилею Исаака Марковича Халатникова. Мы крайне признательны юбиляру, Исааку Марковичу, за честь быть с середины 1970-х в числе сотрудников созданного им уникального Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау.

Мы благодарим за полезные обсуждения С. С. Вергелеса, А. Я. Мальцева и А. А. Старобинского.

Финансирование. Данная работа выполнена в рамках Государственной Программы 0033-2019-0005.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Сахаров, Письма в ЖЭТФ **5**, 32 (1967); УФН **161**(5), 61 (1991).
2. W. Bernreuther, Lect. Notes Phys. **591**, 237 (2002).
3. T. Chupp, P. Fierlinger, M. Ramsey-Musolf, and J. Singh, Rev. Mod. Phys. **91**, 015001 (2019).
4. Л. Б. Окунь, УФН **89**, 603 (1966).

5. I. B. Khriplovich and S. K. Lamoreaux, *CP Violation without Strangeness*, Springer, Berlin (1997).

6. F. Rathmann, Plenary Talk at the 23rd Internat. Spin Physics Symposium — SPIN2018, Ferrara, Italy, September 10–14, 2018 (to be published in Proceedings of Science).

7. F. Abusaif et al. [CPEDM Collaboration], arXiv: 1812.08535 [physics.acc-ph].

8. V. Anastassopoulos et al. [srEDM Collaboration], Rev. Sci. Instrum. **87**, 115116 (2016).

9. Y. Orlov, E. Flanagan, and Y. Semertzidis, Phys. Lett. A **376**, 2822 (2012).

10. Y. N. Obukhov, A. J. Silenko, and O. V. Teryaev, Phys. Rev. D **94**, 044019 (2016).

11. T. Morishima, T. Futamase, and H. M. Shimizu, PTEP **2018**, 089201 (2018).

12. J. P. Miller and B. L. Roberts, arXiv:1805.01944 [hep-ph].

13. A. Laszlo and Z. Zimboras, Class. Quant. Grav. **35**, 175003 (2018).

14. N. Nikolaev, F. Rathmann, A. Saleev, and A. Silenko, Invited Talk at the 23rd Internat. Spin Physics Symposium — SPIN2018, Ferrara, Italy, September 10–14, 2018 (to be published in Proceedings of Science).

15. J. Lense and H. Thirring, Phys. Z. **19**, 156 (1918).

16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, Наука, Москва (1988).

17. K. A. Dunn and J. G. Williams, Astronom. J. **108**, 711 (1994).

18. И. Б. Хриплович, А. А. Померанчук, ЖЭТФ **86**, 839 (1998).

19. А. А. Померанчук, Р. А. Сенков, И. Б. Хриплович, УФН **43**, 1055 (2000).

20. С. Швебер, *Введение в релятивистскую квантовую теорию поля*, Изд-во иностр. лит. (1963).

21. A. J. Silenko and O. V. Teryaev, Phys. Rev. D **71**, 064016 (2005).

22. D. F. Nelson, A. A. Schupp, R. W. Pidd, and H. R. Crane, Phys. Rev. Lett. **2**, 492 (1959).

23. T. Fukuyama and A. J. Silenko, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1350147 (2013).

24. J. Frenkel, Z. Phys. **37**, 243 (1926).

25. L. H. Thomas, Nature **117**, 514 (1926).

26. V. Bargmann, L. Michel, and V. L. Telegdi, Phys. Rev. Lett. **2**, 435 (1959).

27. W. de Sitter, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **77**, 155 (1916).

28. A. Saleev et al. [JEDI Collaboration], Phys. Rev. Accel. Beams. **20**, 072801 (2017).