

# КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ С ОТСКОКОМ И ГЕНЕЗИСОМ В ТЕОРИИ ХОРНДЕСКИ И ЕЕ РАСШИРЕНИИ

*В. Е. Волкова*<sup>a\*</sup>, *С. А. Миронов*<sup>a,c,d\*\*</sup>, *В. А. Рубаков*<sup>a,b\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт ядерных исследований Российской академии наук  
117312, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Физический факультет, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова  
117218, Москва, Россия*

<sup>d</sup> *Институт теоретической и математической физики,  
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 июня 2019 г.,  
после переработки 7 июня 2019 г.  
Принята к публикации 8 июня 2019 г.

Представлен краткий обзор результатов недавних исследований космологических сценариев без начальной сингулярности, типа отскока и генезиса, и их устойчивости в подклассе скалярно-тензорных теорий гравитации со старшими производными — в расширенных теориях Хорндески. Обсуждаются общие результаты анализа устойчивости несингулярных решений в расширенных теориях Хорндески, включая такие аспекты, как причина отсутствия теоремы запрета, справедливой для обычных (не расширенных) теорий Хорндески, сингулярный характер дисформного преобразования от расширенных к обычным теориям Хорндески, допустимость сингулярностей в коэффициентах квадратичного действия для возмущений в унитарной калибровке ( $\gamma$ -кроссинг). Рассмотрены конкретные примеры моделей ранней Вселенной с космологическим отскоком или эпохой генезиса, в которых среди линеаризованных возмущений над однородным изотропным фоном не возникает духов и градиентных неустойчивостей на протяжении всей эволюции.

*Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова*

DOI: 10.1134/S0044451019100079

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Космологические сценарии с отскоком или генезисом являются примерами моделей ранней Вселенной, которые дополняют стандартную теорию горячего Большого взрыва. В обоих этих сценариях на ранних временах пространство-время имеет малую четырехмерную кривизну (параметр Хаббла и его производные по времени малы). Модель с отскоком предполагает, что изначально происходит сжатие Вселенной, которое в некоторый момент

времени (момент «отскока») сменяется расширением (см. обзоры [1–3]). Сценарий с генезисом описывает ускоренное расширение Вселенной из асимптотически пустого пространства Минковского; с течением времени плотность энергии экзотической материи, определяющей динамику системы в эту эпоху, растет, соответственно растет и темп расширения (параметр Хаббла), а на некотором этапе, когда плотность энергии и параметр Хаббла уже велики, энергия экзотической материи переходит в тепловую энергию и эволюция выходит на стандартную горячую стадию [4, 5].

Характерным свойством обоих сценариев является отсутствие начальной сингулярности, которая составляет проблему стандартной теории горячего Большого взрыва, так и не нашедшую своего

\* E-mail: volkova.viktoriya@physics.msu.ru

\*\* E-mail: sa.mironov\_1@physics.msu.ru

\*\*\* E-mail: rubakov@inr.ac.ru

элегантного решения с появлением теории инфляции [6, 7]. Сценарии с отскоком и генезисом могут рассматриваться в равной степени как дополняющие инфляционный сценарий, так и альтернативные ему [3, 8].

Одним из вопросов, возникающих при построении моделей с отскоком, является наличие или отсутствие явления Белинского – Лифшица – Халатникова [9] (БЛХ). Оно может приводить к полному отсутствию однородности и изотропии пространства к концу стадии сжатия, что недопустимо в согласованной космологической модели, см. обсуждение в работе [10] и обзоре [1]. Одним из решений этой проблемы в рамках общей теории относительности (ОТО) служит использование на стадии сжатия материи с жестким уравнением состояния  $p \geq \rho$ , где  $\rho$  и  $p$  — соответственно плотность энергии и эффективное давление. Простая возможность состоит в том, что на стадии сжатия доминирует однородное безмассовое скалярное поле, для которого уравнение состояния имеет вид  $p = \rho$ ; эта возможность следует из результатов Халатникова и Каменщика [11]. Другие возможности реализуются, например, в сценарии экпирозиса [12]. В любом случае, одним из критериев жизнеспособности модели с отскоком является отсутствие БЛХ-поведения при сжатии.

Исключительно важной особенностью космологических сценариев без начальной сингулярности — с отскоком или генезисом — является необходимость использовать в модели специфическую материю, которая, если оставаться в рамках ОТО и пренебречь кривизной трехмерного пространства, должна нарушать изотропное условие энергодоминантности (Null Energy Condition, NEC), см., например, обзор [13],

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu > 0, \quad (1)$$

где  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса, а  $n^\mu$  — произвольный изотропный вектор, т. е.  $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$ . В более общем случае, когда речь идет о теориях с модифицированной гравитацией, говорят о нарушении изотропного условия сходимости (Null Convergence Condition, NCC) [14]

$$R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu > 0, \quad (2)$$

где  $R_{\mu\nu}$  — тензор Риччи. Необходимость введения материи, которая нарушала бы NEC, становится очевидной, если рассмотреть комбинацию уравнений Эйнштейна для пространственно-плоской, однородной и изотропной Вселенной:

$$\dot{H} = -4\pi G(\rho + p), \quad (3)$$

где  $H$  — параметр Хаббла. Действительно, выбирая  $n^\mu = (1, a^{-1}q^i)$ , где  $q^2 = 1$ , получим, что условие NEC (1) для описанного космологического фона имеет вид

$$p + \rho > 0. \quad (4)$$

При условии выполнения NEC (4) из закона эволюции параметра Хаббла (3) следует, что  $\dot{H} < 0$ , т. е., если Вселенная сжималась в прошлом, она продолжит сжиматься, пока не достигнет сингулярности<sup>1)</sup>. Аналогично, отсутствие во Вселенной вещества, нарушающего NEC, не допускает сценария с генезисом: этот сценарий предполагает рост параметра Хаббла в эпоху генезиса, что прямо противоречит (3). Таким образом, космологические решения с отскоком и генезисом для своей реализации требуют материи, которая нарушала бы NEC (а в модифицированной гравитации требуют нарушения NCC). Данное свойство относит указанные космологические сценарии к категории нестандартных, поскольку NEC/NCC удовлетворяет существенная часть известных типов материи, а попытки нарушить эти энергетические условия, как правило, приводят к возникновению неустойчивостей типа духов, градиентных неустойчивостей и тахионов среди линеаризованных возмущений над однородным изотропным фоном, см., например, обзоры [13, 16].

Одним из возможных претендентов на роль необычной материи, нарушающей NEC/NCC, является теория обобщенных галилеонов [17–20] или, что то же самое, теория Хорндески [21]. Теория Хорндески является наиболее общей скалярно-тензорной теорией модифицированной гравитации, характеризующейся наличием вторых производных в лагранжиане, которые тем не менее не приводят к появлению производных третьего и более высоких порядков в уравнениях поля. Таким образом, благодаря специально подобранной структуре лагранжиана в теории не возникает духов Остроградского, как этого можно было бы ожидать, а количество динамических степеней свободы равно  $(2 + 1)$  (две тензорные моды и одна скалярная над однородным изотропным фоном). Сравнительно недавно было обнаружено, что существует более широкий класс скалярно-тензорных теорий, в которых наличие старших производных в лагранжиане не приводит к появлению духов Остроградского — это так называемые «вырожденные скалярно-тензорные теории со старшими производными» (degenerate higher order scalar-

<sup>1)</sup> Рассуждение не относится к случаю закрытой Вселенной, где отскок возможен, если плотность энергии и давление при сжатии растут медленнее, чем  $a^{-2}$  [15].

tensor theories, DHOST theories) [22–30] и «U-вырожденные теории» [31]. Их существенное отличие от теорий Хорндески заключается в том, что соответствующие уравнения поля имеют третий порядок по производным, но количество степеней свободы оказывается неизменным и равным трем. Кроме этого, любопытным фактом является связь между некоторыми подклассами DHOST-теорий и теориями Хорндески: они переходят друг в друга при обратимом дисформном преобразовании метрики [32–35]

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(\pi, X)g_{\mu\nu} + \Gamma(\pi, X)\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi, \quad (5)$$

где  $\pi$  — скалярное поле галилеона,  $X = g^{\mu\nu}\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi$ , а  $\Omega^2(\pi, X)$  и  $\Gamma(\pi, X)$  — произвольные функции. Отметим, что первые примеры DHOST-теорий из подкласса так называемых расширенных теорий Хорндески были получены с помощью применения дисформного преобразования (5) к одной из теорий Хорндески [22].

Характерной особенностью теории Хорндески и ее расширений является возможность нарушения NEC/NCC за счет наличия старших производных в лагранжиане. При этом нарушение NEC/NCC не противоречит требованию устойчивости решения на линеаризованном уровне [16]; здесь и далее под устойчивостью решения подразумевается отсутствие духов и градиентных неустойчивостей. Это приводит к идее использовать данный класс теорий для построения нестандартных космологических моделей типа отскока и генезиса. Так, был предложен целый ряд моделей с отскоком, где фаза с нарушением NEC/NCC реализовывалась за счет наличия поля галилеона, описываемого той или иной конкретной теорией Хорндески [36–43]. Для предложенных решений было проверено, что они являются устойчивыми на протяжении некоторого периода эволюции системы, включающего в себя эпоху с нарушенным NEC/NCC. Различные варианты теории Хорндески использовались также для описания моделей ранней Вселенной с генезисом [5, 44–50]. Отдельно исследовалась проблема сверхсветового распространения возмущений в оригинальной модели генезиса [51, 52].

Однако впоследствии было показано, что построение в теории Хорндески полных космологических моделей без начальной сингулярности (т. е. моделей, где эволюция прослеживается на всех ее этапах, формально от  $t \rightarrow -\infty$  до  $t \rightarrow +\infty$ ) сталкивается с трудностями, связанными с проблемой устойчивости. Для кубического подкласса теорий Хорндески была сформулирована и доказана запрещающая теорема, утверждающая, что полностью устой-

чивые модели с отскоком или генезисом построить невозможно, поскольку среди возмущений над однородным изотропным фоном рано или поздно неизбежно возникают градиентные неустойчивости и/или духи [53]. Аналогичная теорема была доказана для случая, когда кроме поля галилеона присутствует дополнительное скалярное поле, для которого NEC выполняется [54]. Указанные запрещающие теоремы были далее обобщены на случай теории Хорндески наиболее общего вида [55], а также на системы с несколькими полями галилеонного типа [56]. Таким образом, было сформулировано общее утверждение о том, что теории Хорндески не подходят для построения космологических моделей без начальной сингулярности, которые были бы устойчивы на протяжении всей своей эволюции (см. также [16, 57]).

Свое дальнейшее развитие это направление получило при исследовании возможности обойти запрещающую теорему путем введения в рассмотрение одного из подклассов DHOST/U-вырожденных теорий, получившего название расширенных теорий Хорндески (beyond Horndeski или GLVP) [23, 24]. В работах [58, 59] в рамках эффективной теории поля было показано, что новые слагаемые в лагранжиане, специфические для расширенной теории Хорндески, вносят принципиальные изменения в условие устойчивости, лежащее в основе обсуждавшейся выше запрещающей теоремы. Это стало сильным указанием на неприменимость запрещающей теоремы в расширенной теории Хорндески. Первые явные примеры устойчивых космологических решений без сингулярности были приведены в работах [60, 61], где, в отличие от эффективной теории поля, был использован так называемый ковариантный подход. Преимуществом ковариантного формализма является возможность явно выписать лагранжиан теории и проверить выполнение уравнений движения, что невозможно сделать в рамках подхода эффективной теории поля. Как следствие, были предложены явные примеры лагранжианов расширенной теории Хорндески, допускающие полностью устойчивые решения в виде отскока [60, 61], а также устойчивое решение, подобное генезису [60].

Особенностью сценариев с отскоком и модифицированным генезисом, предложенных в работе [60], является форма асимптотик теории при  $t \rightarrow \pm\infty$ : на поздних временах расширенная теория Хорндески трансформируется в теорию обычного безмассового скалярного поля в рамках ОТО, однако на ранних временах ( $t \rightarrow -\infty$ ) лагранжиан почти не упрощается и соответствует модифицированной грави-

тации, существенно отличающейся от ОТО со скалярным полем и описываемой расширенной теорией Хорндески. Простота формы асимптотик теории — необязательное требование, но она является преимуществом, если указанные космологические сценарии оценивать с точки зрения перспективы их использования для построения реалистичных моделей ранней Вселенной. Как обсуждалось в работе [60], сложность построения отскока или генезиса с простыми асимптотиками заключается в так называемом  $\gamma$ -кроссинге, который изначально считался недопустимым. Подробности, связанные с проблемой  $\gamma$ -кроссинга, приведены в разд. 2.3. Там мы отмечаем, что в действительности, как показано в работах [62, 63],  $\gamma$ -кроссинг допустим. На этой основе в работах [63] и [64] были предложены примеры моделей с полностью устойчивыми отскоком и генезисом в расширенной теории Хорндески, чьи асимптотики описываются ОТО с безмассовым скалярным полем. Дополнительным преимуществом предложенной в работе [63] модели с отскоком служит отсутствие, благодаря доминированию безмассового скалярного поля, явления БЛХ на стадии сжатия.

Итак, на сегодняшний день имеются примеры полностью устойчивых космологических решений типа отскока и генезиса в рамках расширенных теорий Хорндески. При этом возникает вопрос: как согласуется возможность обойти запрещающую теорему путем использования расширенных теорий Хорндески с тем, что рассматриваемые теории связаны дисформными преобразованиями (5) с обычными теориями Хорндески (для которых запрещающая теорема работает)? Действительно, дисформное преобразование (5) — это не что иное, как замена полевых переменных, которая, на первый взгляд, не влияет на вопрос об устойчивости решения. Тонкость состоит в том, что дисформное преобразование, которое связывает расширенную и обычную теории Хорндески, в интересующей нас ситуации (с полностью устойчивым решением в расширенной теории) оказывается сингулярным в определенный момент времени. Данный результат был получен в рамках эффективной теории поля в работе [59]. Одна из наших целей в этой работе заключается в демонстрации указанного свойства в рамках ковариантного подхода, использованного в работах [60, 63, 64]. Этому посвящен разд. 3.

Данный краткий обзор имеет следующую структуру. В разд. 2 рассмотрены результаты построения и исследования устойчивости космологических моделей с отскоком и генезисом в расширенной теории Хорндески. В частности, в разд. 2.2 обсужда-

ется запрещающая теорема, справедливая в теории Хорндески, а также способы ее обойти; разд. 2.3 описывает природу  $\gamma$ -кроссинга и проясняет его роль в космологических решениях с отскоком или генезисом. В разд. 2.4 сформулирован способ построения полностью устойчивых решений с отскоком и генезисом в расширенных теориях Хорндески и рассмотрены конкретные модели, которые были предложены в работах [60, 63, 64]. В разд. 3 обсуждается связь теорий Хорндески и их расширений через дисформное преобразование; в рамках ковариантной теории показано, что преобразования от расширенных теорий Хорндески, где имеются полностью устойчивые несингулярные решения, к соответствующим (нерасширенным) теориям Хорндески обязательно сингулярны. Краткое заключение приведено в разд. 4.

## 2. УСТОЙЧИВОСТЬ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ СЦЕНАРИЕВ БЕЗ НАЧАЛЬНОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ В РАСШИРЕННОЙ ТЕОРИИ ХОРНДЕСКИ

Данный раздел посвящен обзору известных результатов, касающихся построения космологических решений в обычных и расширенных теориях Хорндески и анализа их устойчивости. Здесь и далее мы придерживаемся обозначений, введенных в работе [65], которые впоследствии также были использованы в работах [60, 63, 64].

### 2.1. Лагранжиан и условия устойчивости

В общем случае лагранжиан расширенной теории Хорндески имеет вид (используется метрика с сигнатурой  $(+, -, -, -)$ )

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_5 + \mathcal{L}_{\mathcal{BH}}), \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_2 = F(\pi, X), \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_3 = K(\pi, X) \square \pi, \quad (8)$$

$$\mathcal{L}_4 = -G_4(\pi, X) R + 2G_{4X}(\pi, X) \times \left[ (\square \pi)^2 - \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu} \right], \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\pi, X) G^{\mu\nu} \pi_{;\mu\nu} + \frac{1}{3} G_{5X} \times \left[ (\square \pi)^3 - 3 \square \pi \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\nu} + 2 \pi_{;\mu\nu} \pi^{;\mu\rho} \pi_{;\rho}{}^\nu \right], \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{BH}} = F_4(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'} + F_5(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\mu'\nu'\rho'\sigma'}\pi_{,\mu}\pi_{,\mu'}\pi_{;\nu\nu'}\pi_{;\rho\rho'}\pi_{;\sigma\sigma'}. \quad (11)$$

Здесь  $\pi$  — скалярное (галилеонное) поле,  $X = g^{\mu\nu}\pi_{,\mu}\pi_{,\nu}$ ,  $\pi_{,\mu} = \partial_\mu\pi$ ,  $\pi_{;\mu\nu} = \nabla_\nu\nabla_\mu\pi$ ,  $\square\pi = g^{\mu\nu}\nabla_\nu\nabla_\mu\pi$ ,  $G_{4X} = \partial G_4/\partial X$  и т. д.;  $R$  в (9) и  $G^{\mu\nu}$  в (10) — скаляр кривизны и тензор Эйнштейна соответственно. Вклады (7)–(10) описывают теорию Хорндески, куда входят четыре независимые функции  $F(\pi, X)$ ,  $K(\pi, X)$ ,  $G_4(\pi, X)$  и  $G_5(\pi, X)$ . Функции  $F_4(\pi, X)$  и  $F_5(\pi, X)$  в слагаемом (11) относятся к расширенной теории Хорндески. Отметим, что действие (6) уже содержит гравитационную часть (см. (9) и (10)): действие Эйнштейна – Гильберта восстанавливается в пределе  $G_4(\pi, X) = 1/2\kappa$  и  $G_5(\pi, X) = 0$ , где  $\kappa = 8\pi G$ , а  $G$  — гравитационная постоянная. Кубические теории Хорндески, упоминавшиеся ранее и особенно популярные в литературе, описываются лагранжианом вида

$$\mathcal{L}_{cub} = -\frac{1}{2\kappa}R + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3. \quad (12)$$

Добавление к (12) вкладов (9) и (10) приводит к теориям Хорндески соответственно четвертого и пятого порядков.

Как видно, лагранжиан обычной теории Хорндески — теории (6) с  $F_4 = F_5 = 0$  — содержит вторые производные как поля галилеона  $\pi$ , так и метрики. При этом от вторых производных в лагранжиане в общем случае нельзя избавиться интегрированием по частям. Тем не менее, все полевые уравнения являются уравнениями с производными не выше второго порядка. Расширенные теории Хорндески с  $F_4 \neq 0$  и/или  $F_5 \neq 0$  таким свойством не обладают, однако, как мы говорили во Введении, они описывают столько же распространяющихся степеней свободы, сколько их имеется в обычной теории Хорндески — две тензорные и одну скалярную. Это же справедливо для еще более общих DHOST- и U-вырожденных теорий, лагранжианы которых мы не приводим, см. [30, 31]. Для наших целей достаточно ограничиться изучением теорий вида (6). Кроме того, для сокращения формул в дальнейшем мы положим

$$G_5 = 0, \quad F_5 = 0.$$

Ничего принципиально нового для наших задач в общем случае  $G_5 \neq 0$ ,  $F_5 \neq 0$  не возникает, но формулы становятся необозримыми.

Нас интересуют космологические модели, описываемые пространственно-плоской метрикой Фридмана – Леметра – Робертсона – Уокера (FLRW):

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j. \quad (13)$$

При этом фоновое поле галилеона однородно,  $\pi = \pi(t)$ . В этом случае независимые полевые уравнения в теории с действием (6) имеют вид

$$\delta g^{00}: \quad F - 2F_X X - 6HK_X X \dot{\pi} + K_\pi X + 6H^2 G_4 + 6HG_{4\pi} \dot{\pi} - 24H^2 X(G_{4X} + G_{4XX} X) + 12HG_{4\pi X} X \dot{\pi} - 6H^2 X^2(5F_4 + 2F_{4X} X) = 0, \quad (14)$$

$$\delta g^{ii}: \quad F - X(2K_X \ddot{\pi} + K_\pi) + 2(3H^2 + 2\dot{H})G_4 - 12H^2 G_{4X} X - 8\dot{H}G_{4X} X - 8HG_{4X} \ddot{\pi} \dot{\pi} - 16HG_{4XX} X \ddot{\pi} \dot{\pi} + 2(\ddot{\pi} + 2H\dot{\pi})G_{4\pi} + 4XG_{4\pi X}(\ddot{\pi} - 2H\dot{\pi}) + 2XG_{4\pi\pi} - 2F_4 X(3H^2 X + 2\dot{H}X + 8H\dot{\pi}\ddot{\pi}) - 8HF_{4X} X^2 \ddot{\pi} \dot{\pi} - 4HF_{4\pi} X^2 \dot{\pi} = 0, \quad (15)$$

где  $H = \dot{a}/a$  — параметр Хаббла. Уравнения, получаемые при вариации по  $\pi$ , являются линейными комбинациями уравнений (14), (15) и их производных.

Ключевым для космологических моделей служит вопрос об их устойчивости относительно линеаризованных неоднородных возмущений. В линеаризованной теории мы рассматриваем как возмущения метрики, так и возмущения скалярного поля  $\pi$ . Введем следующие обозначения для компонент полной метрики с учетом малых возмущений:

$$g_{00} = 1 + 2\alpha, \quad g_{0i} = -\partial_i\beta, \quad (16)$$

$$g_{ij} = -a^2(2\zeta\delta_{ij} + h_{ij}^T),$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\zeta$  — скалярные возмущения,  $h_{ij}^T$  — тензорные возмущения, для которых выполняются условия бесследовости ( $h_{ii}^T = 0$ ) и поперечности ( $\partial_i h_{ij}^T = 0$ ). Отметим, что нетривиальных векторных возмущений в рассматриваемых скалярно-тензорных теориях нет и в параметризации (16) частично использована калибровочная свобода. Возмущения над однородным фоновым полем галилеона  $\pi_c$  обозначаются как  $\chi$ :

$$\pi \rightarrow \pi_c(t) + \chi(t, r). \quad (17)$$

В общем случае линеаризованная теория инвариантна относительно инфинитезимальных преобразований координат вида

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu, \quad (18)$$

где  $\xi^\mu$  — малые параметры. Часть этой калибровочной свободы уже использована в (16). Оставшаяся

калибровочная свобода связана с единственной калибровочной функцией  $\xi^0$ . В терминах введенной параметризации возмущений в (16) и (17) преобразования (18) скалярных мод сводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} \chi &\rightarrow \chi + \xi^0 \dot{\pi}, & \alpha &\rightarrow \alpha + \xi^0 \dot{\zeta}, & \beta &\rightarrow \beta - \xi^0 \dot{\zeta}, \\ \zeta &\rightarrow \zeta + \xi^0 \frac{\dot{a}}{a}. \end{aligned} \quad (19)$$

Зафиксируем оставшуюся калибровочную свободу таким образом, чтобы в скалярном секторе нетривиальными остались только величины  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\zeta$ , т. е. положим  $\chi = 0$  (унитарная калибровка). Тогда квадратичное действие для возмущений в теории с лагранжианом (6) имеет вид

$$\begin{aligned} S = \int dt d^3x a^3 &\left[ \left( \frac{\mathcal{G}_T}{8} (h_{ij}^T)^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{8a^2} (\partial_k h_{ij}^T)^2 \right) + \right. \\ &+ \left( -3\mathcal{G}_T \dot{\zeta}^2 + \mathcal{F}_T \frac{(\nabla\zeta)^2}{a^2} - 2(\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi})\alpha \frac{\Delta\zeta}{a^2} + \right. \\ &\left. \left. + 2\mathcal{G}_T \dot{\zeta} \frac{\Delta\beta}{a^2} + 6\Theta\alpha\dot{\zeta} - 2\Theta\alpha \frac{\Delta\beta}{a^2} + \Sigma\alpha^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

где  $(\nabla\zeta)^2 = \delta^{ij}\partial_i\zeta\partial_j\zeta$ ,  $\Delta = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ , коэффициенты  $\mathcal{G}_T$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{F}_T$ ,  $\Theta$  и  $\Sigma$  выражаются через функции лагранжиана как

$$\mathcal{G}_T = 2G_4 - 4G_{4X}X - 2F_4X^2, \quad (21)$$

$$\mathcal{D} = 2F_4X\dot{\pi}, \quad (22)$$

$$\mathcal{F}_T = 2G_4, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Theta = &-K_X X \dot{\pi} + 2G_4 H - 8HG_{4X}X - 8HG_{4XX}X^2 + \\ &+ G_{4\pi}\dot{\pi} + 2G_{4\pi X}X\dot{\pi} - 10HF_4X^2 - 4HF_{4X}X^3, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Sigma = &F_X X + 2F_{XX}X^2 + 12HK_X X \dot{\pi} + \\ &+ 6HK_{XX}X^2\dot{\pi} - K_\pi X - K_{\pi X}X^2 - 6H^2G_4 + \\ &+ 42H^2G_{4X}X + 96H^2G_{4XX}X^2 + 24H^2G_{4XXX}X^3 - \\ &- 6HG_{4\pi}\dot{\pi} - 30HG_{4\pi X}X\dot{\pi} - 12HG_{4\pi XX}X^2\dot{\pi} + \\ &+ 90H^2F_4X^2 + 78H^2F_{4X}X^3 + 12H^2F_{4XX}X^4. \end{aligned} \quad (25)$$

Отметим, что фиксация калибровки непосредственно в квадратичном действии (20) корректна, поскольку уравнение поля галилеона является следствием уравнений (14), (15) (см. обсуждение в [65] и подробности в [31]).

Из структуры квадратичного действия (20) видно, что  $\alpha$  и  $\beta$  — нединамические степени свободы. Варьируя действие (20) по  $\alpha$  и  $\beta$ , получим два уравнения связи:

$$\frac{\Delta\beta}{a^2} = \frac{1}{\Theta} \left( 3\Theta\dot{\zeta} - (\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}) \frac{\Delta\zeta}{a^2} + \Sigma\alpha \right), \quad (26)$$

$$\alpha = \frac{\mathcal{G}_T \dot{\zeta}}{\Theta}. \quad (27)$$

Разрешив связи (26) и (27), действие (20) можно записать в терминах только динамических степеней свободы:

$$\begin{aligned} S = \int dt d^3x a^3 &\left[ \frac{\mathcal{G}_T}{8} (h_{ij}^T)^2 - \frac{\mathcal{F}_T}{8a^2} (\partial_k h_{ij}^T)^2 + \right. \\ &\left. + \mathcal{G}_S \dot{\zeta}^2 - \mathcal{F}_S \frac{(\nabla\zeta)^2}{a^2} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathcal{G}_S = \frac{\Sigma\mathcal{G}_T^2}{\Theta^2} + 3\mathcal{G}_T, \quad (29)$$

$$\mathcal{F}_S = \frac{1}{a} \frac{d\xi}{dt} - \mathcal{F}_T, \quad (30)$$

$$\xi = \frac{a(\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi})\mathcal{G}_T}{\Theta}. \quad (31)$$

Таким образом, действие (28) содержит одну скалярную ( $\zeta$ ) и две тензорных ( $h_{ij}^T$ ) степени свободы. Квадраты скоростей звука для скалярных и тензорных мод имеют следующий вид соответственно:

$$c_{\mathcal{T}}^2 = \frac{\mathcal{F}_T}{\mathcal{G}_T}, \quad c_S^2 = \frac{\mathcal{F}_S}{\mathcal{G}_S}. \quad (32)$$

В качестве отступления обсудим главные типы неустойчивостей, которые могут обнаруживаться в квадратичном действии (28) для расширенной теории Хорндески. Для однородного изотропного фона коэффициенты  $\mathcal{G}_T$ ,  $\mathcal{F}_T$ ,  $\mathcal{G}_S$  и  $\mathcal{F}_S$  являются функциями времени. Наиболее опасными являются неустойчивости, возникающие в высокоэнергетическом режиме, когда пространственные и временные изменения полей  $\zeta$  и  $h_{ij}^T$  характеризуются масштабами, существенно меньшими, чем характерный временной масштаб изменения однородного фона. В таком приближении коэффициенты  $\mathcal{G}_{S,T}$  и  $\mathcal{F}_{S,T}$  можно считать не зависящими от времени. Тогда возможны следующие случаи (обозначение  $\mathcal{G}_{S,T}$ ,  $\mathcal{F}_{S,T}$  относится к паре величин  $\mathcal{G}_S$ ,  $\mathcal{F}_S$  или  $\mathcal{G}_T$ ,  $\mathcal{F}_T$ ):

1) решение с градиентными неустойчивостями (экспоненциальный рост возмущений):

$$\mathcal{G}_{S,T} > 0, \quad \mathcal{F}_{S,T} < 0 \quad \text{или} \quad \mathcal{G}_{S,T} < 0, \quad \mathcal{F}_{S,T} > 0;$$

2) решение с духами (катастрофическая неустойчивость вакуума, см. обсуждение в [13]):

$$\mathcal{G}_{S,T} < 0, \quad \mathcal{F}_{S,T} < 0; \quad (33)$$

3) устойчивое решение:

$$\mathcal{G}_{S,T} > 0, \quad \mathcal{F}_{S,T} > 0. \quad (34)$$

Отметим, что, в силу вида действия (28) в унитарной калибровке, в системе не возникает неустойчивостей типа тахионов.

Таким образом, согласно (34) отсутствие духовых и градиентных неустойчивостей на фоне однородного решения требует выполнения следующих ограничений, наложенных на коэффициенты квадратичного действия (28):

$$\mathcal{G}_T \geq \mathcal{F}_T > \epsilon > 0, \quad \mathcal{G}_S \geq \mathcal{F}_S > \epsilon > 0. \quad (35)$$

Здесь и далее  $\epsilon$  обозначает некоторую положительную константу, значение которой для нас несущественно и может быть разным в разных формулах. В (35) она введена с целью избежать случаев, когда  $\mathcal{G}_{S,T}, \mathcal{F}_{S,T} \rightarrow 0$ , что по крайней мере наивно соответствует режиму сильной связи<sup>2)</sup>. Выполнение неравенств (35) также обеспечивает распространение и скалярных, и тензорных возмущений со скоростями, меньшими или равными скорости света.

Как упоминалось выше, в работах [53, 55] было показано, что в теории Хорндески, где  $F_4(\pi, X) = F_5(\pi, X) = 0$  (см. (11)), добиться выполнения неравенств (35) на протяжении всей эволюции невозможно. Указанный результат был сформулирован в виде теоремы, запрещающей существование в общей теории Хорндески полностью устойчивых несингулярных космологических решений типа отскока и генезиса. Следующий раздел посвящен обсуждению этой запрещающей теоремы, что позволит затем продемонстрировать, каким образом добавление слагаемых с  $F_4(\pi, X)$  (и  $F_5(\pi, X)$ ) в лагранжиан теории принципиально меняет структуру условий устойчивости космологических решений.

## 2.2. Запрещающая теорема в теории Хорндески

В исследовании на устойчивость космологических сценариев в теории Хорндески, для которых масштабный фактор  $a$  ограничен снизу положительной величиной (что гарантирует геодезическую

полноту), центральное утверждение опирается на условие отсутствия градиентных неустойчивостей (см. (30)):

$$\frac{d\xi}{dt} = a(\mathcal{F}_S + \mathcal{F}_T) > \epsilon > 0. \quad (36)$$

Согласно (36) величина

$$\xi = \frac{a\mathcal{G}_T^2}{\Theta} \quad (37)$$

должна быть монотонно растущей функцией. Заметим, что в определении (37) учтено, что в случае теории Хорндески  $\mathcal{D} = 0$  (ср. с (31)). Из условия (36), которое должно выполняться в любой момент времени, при учете (35) мы получаем, что  $\xi \rightarrow -\infty$  при  $t \rightarrow -\infty$  и  $\xi \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а значит,  $\xi$  обязательно пересекает нуль в некоторый(е) момент(ы) времени, независимо от того, обращается  $\Theta$  в нуль или нет. Заметим, что данный вывод о поведении величины  $\xi$  справедлив как в теории Хорндески, так и в расширенной теории Хорндески (когда  $\mathcal{D} \neq 0$  и  $\xi$  определяется выражением (31)), поскольку условие (36) справедливо для обоих классов теорий. Однако из определения (37) следует, что добиться необходимого поведения  $\xi$  в теории Хорндески невозможно: поскольку  $a > 0$  и  $\mathcal{G}_T > \epsilon > 0$ ,  $\xi$  может пересекать нуль, только если  $\Theta \rightarrow \infty$ , что соответствует сингулярности в классическом решении. Отсюда и следует, что полностью устойчивые модели без начальной сингулярности в теории Хорндески невозможны. Отметим, что все эти результаты справедливы и при  $G_5 \neq 0$  (но  $F_4 = F_5 = 0$ ).

Сделаем замечание относительно попыток обойти запрещающую теорему в теории Хорндески [43, 55]. Одна из них состоит в предположении, что требуемое пересечение нуля величиной  $\xi$  происходит, когда  $\Theta = 0$  и одновременно  $\mathcal{G}_T = 0$  (что противоречит условиям (35)). Это не только предполагает тонкую подстройку параметров, но также и проблему сильной связи в тензорном секторе (см. (28)). Другая возможность заключается в ослаблении требований к асимптотическому поведению теории, так что  $\mathcal{F}_{S,T} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$  и/или  $t \rightarrow +\infty$ , и требование  $\dot{\xi} > \epsilon > 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  не выполняется. В данном случае возникает потенциальная проблема сильной связи в асимптотическом прошлом и/или асимптотическом будущем.

В расширенной теории Хорндески ситуация принципиально иная: в определение  $\xi$  (31) входит  $\mathcal{D} \neq 0$ , которое зависит от новой функции  $F_4(\pi, X)$  (и  $F_5(\pi, X)$ ). Коэффициент  $\mathcal{G}_T$  по-прежнему определяет устойчивость тензорного сектора и должен

<sup>2)</sup> Мы не рассматриваем специальный случай «теории духового конденсата» [66].

быть всегда положительным, но на комбинацию  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$  такого ограничения нет, и она может принимать отрицательные значения и пересекать нуль. Именно за счет вклада  $\mathcal{D}$  появляется возможность добиться того, чтобы  $\xi$  была монотонно растущей функцией и пересекала нуль в некоторый момент времени, и тем самым обойти запрещающую теорему. Таким образом, изменение структуры условий устойчивости (35) в расширенной теории Хорндески указывает на возможность построить решения в виде космологического отскока и генезиса, которые свободны от духовых и градиентных неустойчивостей в течение всей эволюции.

### 2.3. $\gamma$ -кроссинг

Прежде чем перейти к обсуждению примеров решений с отскоком и генезисом в расширенной теории Хорндески, вновь обратимся к поведению коэффициента  $\Theta$  в (31) и так называемому явлению  $\gamma$ -кроссинга, когда коэффициент  $\Theta = 0$  (в исходных работах [43, 62, 67], в которых обсуждался данный вопрос, коэффициент  $\Theta$  обозначен как  $\gamma$ , откуда и появилось название явления). В работе [67] было показано, что  $\gamma$ -кроссинг — это не что иное, как переход с одной ветви решения уравнения (14), рассматриваемого как уравнение относительно параметра Хаббла, на другую. Как было отмечено выше,  $\gamma$ -кроссинг не дает возможности обойти запрещающую теорему в теории Хорндески, однако это явление играет заметную роль в вопросе об асимптотическом поведении теории при  $t \rightarrow \pm\infty$ . А именно, если требовать от искомого космологического решения, чтобы лагранжиан соответствующей теории и в асимптотическом прошлом, и в асимптотическом будущем описывал безмассовое скалярное поле в рамках ОТО, функция  $\Theta(t)$  должна пересекать нуль в некоторый момент  $t_* \in (-\infty, +\infty)$ . Необходимость  $\gamma$ -кроссинга следует из того факта, что требуемая форма асимптотик предполагает  $F_4 \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$ , что, в свою очередь, означает  $\mathcal{D} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  (см. (22)). Как мы говорили,  $\xi < 0$  при  $t \rightarrow -\infty$  и  $\xi > 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , поэтому из  $\mathcal{D} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \pm\infty$  следует, что  $\Theta < 0$  при  $t \rightarrow -\infty$  и  $\Theta > 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а это подразумевает обращение коэффициента  $\Theta$  в нуль в некоторый конечный момент времени  $t_*$ .

Выражения для  $\mathcal{G}_S$  и  $\mathcal{F}_S$  в (29), (30) говорят о сингулярности обоих коэффициентов в момент  $\gamma$ -кроссинга. На первый взгляд, это недопустимо, поэтому  $\Theta$  считалось строго положительным в одном из первых полностью устойчивых отскоковых

решений, предложенных в работе [60]. В полном согласии с изложенным выше отсутствие  $\gamma$ -кроссинга не позволило построить модель отскока, в которой обе асимптотики  $t \rightarrow \pm\infty$  описывались ОТО, и в решении [60] гравитация в асимптотическом прошлом существенно отличалась от ОТО. Однако из тех же выражений (29), (30) следует, что дисперсионное соотношение  $c_S^2 = \mathcal{F}_S/\mathcal{G}_S$  остается конечным в момент  $\gamma$ -кроссинга, а это свидетельствует в пользу того, что на самом деле проблем не возникает. И действительно, в работе [62] было показано, что уравнения для возмущений не имеют сингулярностей в ньютоновой калибровке. Позднее были также проведены явные вычисления в унитарной калибровке [63], которые показали, что в результате  $\gamma$ -кроссинга в решении для скалярной степени свободы  $\zeta$  расходимости нет. Тем самым было доказано, что  $\gamma$ -кроссинг допустим. Последнее позволило построить космологические решения с отскоком и генезисом, асимптотики которых имеют простое поведение при  $t \rightarrow \pm\infty$ , описываемое ОТО с безмассовым скалярным полем [63, 64].

В следующем разделе приводятся примеры моделей с полностью устойчивым отскоком и генезисом в расширенной теории Хорндески, которые были построены в работах [60, 63, 64]. Особое внимание уделяется тому, как обходится запрещающая теорема в каждом решении, а также описываются характерные свойства предложенных моделей.

### 2.4. Примеры полностью устойчивых сценариев с отскоком и генезисом

Мы не будем детально описывать процедуру построения решения, которая подробно изложена в работах [60, 63, 64], и ограничимся формулировкой основных идей и результатов.

Искомые модели удобно строить методом реконструкции, использовавшимся ранее, например, в работах [42, 53]<sup>3)</sup>. Идея состоит в том, чтобы подобрать лагранжевы функции  $F$ ,  $K$ ,  $G_4$ ,  $F_4$  в (7)–(11) так, чтобы теория с лагранжианом (6) имела интересующее нас решение (мы по-прежнему считаем, что  $G_5 = F_5 = 0$ ). Прежде всего, с помощью замены полевой переменной однородное поле галилеона всегда можно выбрать так, что на решении

$$\pi_c(t) = t. \tag{38}$$

Тогда  $X_c = g^{\mu\nu} \partial_\mu \pi_c \partial_\nu \pi_c = 1$ . В полевые уравнения (14), (15) и условия устойчивости (35) те-

<sup>3)</sup> Упомянем также обсуждение решений [42] в работе [67].



перь входят функции времени  $F(\pi_c, X_c) = F(t, 1)$ ,  $F_X(\pi_c, X_c) = (\partial F / \partial X)(t, 1) \equiv F_X(t, 1)$  и т. д., причем все эти функции независимы (в то время как, например, функция  $G_{4,\pi}$  равна  $\dot{G}_4(t, 1)$ ). Эти функции и необходимо подобрать, задав явно поведение параметра Хаббла  $H(t)$ . При этом накладываются следующие требования: 1) должны выполняться уравнения поля (14), (15); 2) решение должно быть устойчиво, т. е. должны удовлетворяться условия (35) с коэффициентами, заданными в (21)–(25). Разумеется, эти требования не определяют однозначно все функции  $F(t, 1)$ ,  $F_X(t, 1)$ , ...,  $F_{4XX}(t, 1)$ , входящие в (14), (15), (35): на них имеется всего два уравнения (14), (15), а условия (35) носят характер неравенств. Поэтому рассматриваемое построение допускает существенный произвол; часть указанных функций выбирается исключительно из соображений удобства.

В качестве дополнительного ограничения, которое, вообще говоря, не является обязательным, можно потребовать определенного асимптотического поведения теории при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Например, в случае решений, описанных ниже, мы требуем, чтобы расширенная теория Хорндески в асимптотическом будущем (а во втором и третьем случаях и в асимптотическом прошлом) стремилась к ОТО с безмассовым скалярным полем. Напомним в связи с этим, что безмассовое однородное скалярное поле с минимальной связью с гравитацией характеризуется уравнением состояния  $p = \rho$ , так что в ОТО пространственно-плоское решение имеет вид

$$a(t) \propto |t|^{1/3}, \quad H(t) = \frac{1}{3t},$$

а каноническое скалярное поле ведет себя как  $\phi_c(t) = \pm\sqrt{2/3} \ln |t|$ , откуда с учетом (38) следует соотношение

$$\pi = \exp\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\phi\right),$$

которое должно выполняться в соответствующей асимптотике. Здесь и далее мы полагаем

$$\kappa = 8\pi G = 1.$$

### 2.4.1. Космологический отскок с экзотической стадией сжатия

Один из первых примеров полностью устойчивых решений с отскоком в расширенной теории Хорндески, для которых был приведен явный вид лагранжиана, представлен в работе [60]. Его особенностью является запрет  $\gamma$ -кроссинга, в результате чего, как обсуждалось выше, невозможно иметь

асимптотику с ОТО при  $t \rightarrow \pm\infty$  и добиться полной устойчивости решения одновременно. Таким образом, в данной модели  $\Theta > 0$  в любой момент времени и требование простой формы асимптотики теории в виде ОТО с безмассовым скалярным полем накладывается только при  $t \rightarrow +\infty$ .

Параметр Хаббла для данной модели выбран в виде

$$H(t) = \frac{t}{3(\tau^2 + t^2)}, \quad a(t) = (\tau^2 + t^2)^{1/6}, \quad (39)$$

при этом отскок происходит при  $t = 0$ ; параметр  $\tau$  определяет продолжительность эпохи отскока (в дальнейшем полагаем для простоты  $\tau = 10$ ), а асимптотика  $H(t)|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow (3t)^{-1}$  соответствует требуемому поведению теории при  $t \rightarrow +\infty$ . Согласно процедуре реконструкции мы выбираем часть функций так, чтобы выполнялись условия устойчивости (35) и требования к асимптотическому поведению функций, а оставшиеся функции находим из фоновых уравнений движения с учетом выбора  $H(t)$  в (39).

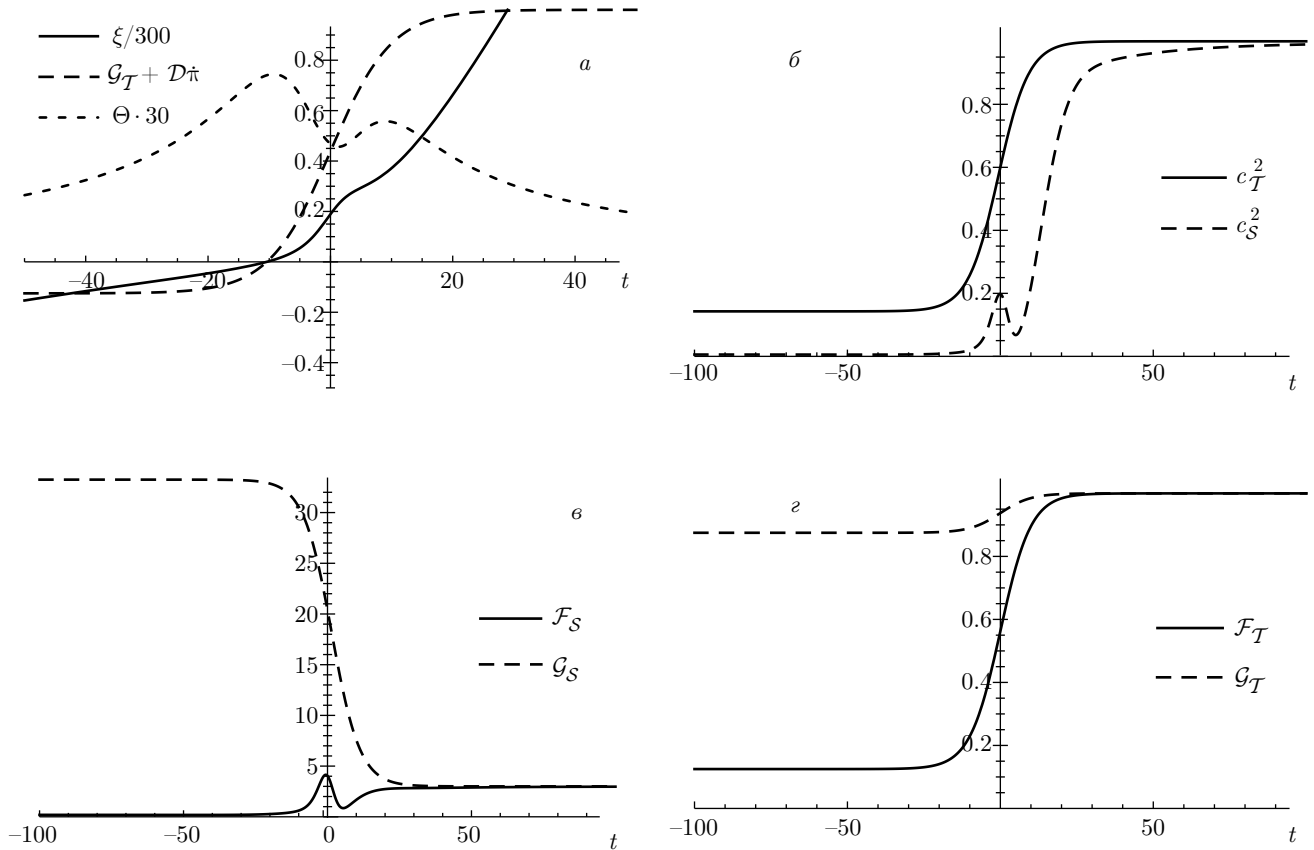
Поскольку в данном сценарии  $\Theta > 0$  всегда, запрещающая теорема обходится с помощью выбора функции  $F_4(\pi, X)$ , входящей в  $\mathcal{D}$  в (31), так что  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi} < 0$  при  $t \rightarrow -\infty$  и  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi} > 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . На рис. 1а представлено поведение  $\xi$ ,  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$  и  $\Theta$  для данного сценария, и видно, что ключевая для запрещающей теоремы величина  $\xi$  монотонно растет и пересекает нуль одновременно с  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$ . Отсутствие духов и градиентных неустойчивостей в найденном решении с параметром Хаббла (39) подтверждается положительностью на протяжении всего времени эволюции коэффициентов  $\mathcal{G}_T$ ,  $\mathcal{F}_T$ ,  $\mathcal{G}_S$  и  $\mathcal{F}_S$  в квадратичном действии (28), см. рис. 1б,г.

Квадраты скоростей звука для скалярного и тензорного сектора приведены на рис. 1б. Обе скорости всегда положительны и стремятся к скорости света при  $t \rightarrow +\infty$  в согласии с требованием асимптотического соответствия теории на поздних временах случаю ОТО с безмассовым скалярным полем.

Наконец, приведем асимптотический вид лагранжиана при  $t \rightarrow \pm\infty$ . На поздних временах, как и требовалось, лагранжиан имеет простую форму за счет выбора асимптотического поведения лагранжевых функций и соответствует теории безмассового скалярного поля и эйнштейновской гравитации:

$$\mathcal{L}|_{t \rightarrow +\infty} = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{3} \frac{(\partial\pi)^2}{\pi^2} = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}(\partial\phi)^2. \quad (40)$$

На ранних временах модель отскока без  $\gamma$ -кроссинга описывается лагранжианом, соответствующим расширенной теории Хорндески:



**Рис. 1.** а) Графики зависимости от времени  $\xi$ ,  $\mathcal{G}_T + D\dot{\pi}$  и  $\Theta$  для сценария [60]:  $\xi$  пересекает нуль при  $t \approx -1.039$  из-за поведения  $\mathcal{G}_T + D\dot{\pi}$ ;  $\Theta$  всегда положительна, т. е.  $\gamma$ -кроссинга не происходит. б) Поведение квадратов скоростей звука для скалярных и тензорных мод:  $c_S^2 \rightarrow 0.006$ ,  $c_T^2 \rightarrow 0.18$  при  $t \rightarrow -\infty$ ;  $c_S^2, c_T^2 \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow +\infty$ . в) Коэффициенты  $\mathcal{G}_S$  и  $\mathcal{F}_S$  в зависимости от  $t$ ; оба конечны при  $t \rightarrow -\infty$ :  $\mathcal{F}_S \rightarrow 0.193$ . г) Коэффициенты  $\mathcal{G}_T$  и  $\mathcal{F}_T$  в зависимости от  $t$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}|_{t=-\infty} = & C_0 \frac{1}{\pi^2} + \left( \frac{1}{3} + C_1 \right) \frac{(\partial\pi)^2}{\pi^2} + C_2 \frac{(\partial\pi)^4}{\pi^2} + \\ & + 2 \frac{(\partial\pi)^2}{\pi} \square\pi - \frac{1}{16} (\partial\pi)^2 R + \frac{1}{8} [(\square\pi)^2 - \nabla^{\mu\nu}\pi \nabla_{\mu\nu}\pi] + \\ & + \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\mu'\nu'\rho'} \sigma \nabla_\mu \pi \nabla_{\nu'} \pi \nabla_{\nu\nu'} \pi \nabla_{\rho\rho'} \pi, \quad (41) \end{aligned}$$

где  $C_0 = 2.43$ ,  $C_1 = -5.53$ ,  $C_2 = 1.06$  — модельно зависимые константы. Теория (41) не сводится к ОТО, что полностью соответствует обсуждавшимся выше последствиям запрещенного  $\gamma$ -кроссинга.

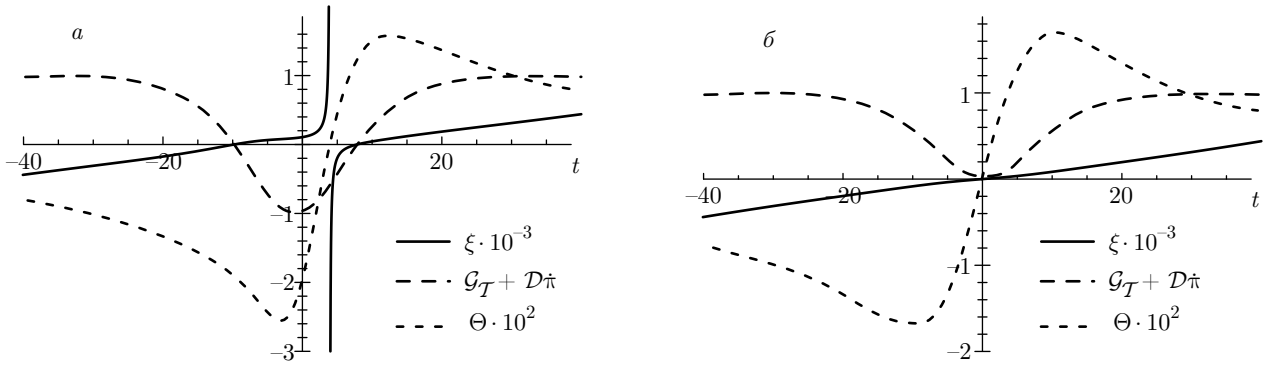
**2.4.2. Космологический отскок с  $\gamma$ -кроссингом и двумя простыми асимптотиками**

Модель отскока с  $\gamma$ -кроссингом [63] является модификацией модели, описанной выше. Отличие данного решения от предыдущего заключается в наличии  $\gamma$ -кроссинга в некоторый момент времени, что позволяет иметь простое асимптотическое поведение,

которое описывается лагранжианом (40) как при  $t \rightarrow +\infty$ , так и при  $t \rightarrow -\infty$ .

Параметр Хаббла для данной модели был выбран таким же, как в предыдущей модели, см. (39). Поскольку требуемая форма асимптотик теории при  $t \rightarrow \pm\infty$  соответствует ОТО, из соображений удобства функции лагранжиана  $G_4(\pi, X)$  и  $F_4(\pi, X)$  были выбраны так, что  $\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T = 1$  на протяжении всей эволюции. Таким образом, в тензорном секторе возмущений неустойчивостей нет, а гравитационные волны всегда распространяются со скоростью света,  $c_T^2 = 1$ .

Как обсуждалось в разд. 2.3, благодаря  $\gamma$ -кроссингу, т. е. смене знака  $\Theta$ , становится возможным выбрать функцию лагранжиана  $F_4$  (по-прежнему  $G_5 = F_5 = 0$ ) так, что  $D|_{t \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$ , и одновременно добиться выполнения неравенства  $\dot{\xi} > \epsilon > 0$  в (36), которое соответствует условию отсутствия градиентных неустойчивостей в скалярном секторе.



**Рис. 2.** Графики зависимости от времени  $\xi$ ,  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$  и  $\Theta$  а) для сценария [63]:  $\xi$  пересекает нуль дважды благодаря поведению  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$ ;  $\Theta$  пересекает нуль и меняет знак; б) для случая тонкой подстройки параметров:  $\xi$  остается конечным при  $\gamma$ -кроссинге

Как следует из рис. 2, функция  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$  пересекает нуль дважды и  $(\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi})|_{t \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 1$  в соответствии с тем, что в данном сценарии  $\mathcal{G}_T = 1$  в любой момент времени. При этом  $\xi$  по-прежнему пересекает нуль в тех же точках, что и  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$ , а правильный знак  $\xi$  при  $t \rightarrow -\infty$  в данной модели обеспечивается поведением  $\Theta$ . Таким образом,  $\gamma$ -кроссинг действительно позволяет построить теорию с полностью устойчивым отскоком, в которой обе асимптотики описываются ОТО с безмассовым скалярным полем. Для полноты изложения на рис. 2б изображен случай с тонкой подстройкой параметров: несмотря на наличие  $\gamma$ -кроссинга,  $\xi$  остается всюду конечным за счет касания нуля функцией  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$  в момент, когда  $\Theta = 0$ .

Устойчивость в скалярном секторе в найденном решении подтверждается поведением  $\mathcal{G}_S$  и  $\mathcal{F}_S$ , изображенным на рис. 3а: оба коэффициента положительны и расходятся в момент  $\gamma$ -кроссинга, однако их отношение остается конечным и строго положительным (см. рис. 3б), что согласуется с выражениями (29) и (30).

### 2.4.3. Генезис и его модификации в теориях Хорндески и их расширениях

В работе [53], где была сформулирована запрещающая теорема для кубической теории Хорндески (12), в том же кубическом классе был впервые предложен сценарий модифицированного генезиса, в котором был найден способ обойти запрещающую теорему: за счет того, что масштабный фактор стремился к нулю при  $t \rightarrow -\infty$  (но так, что кривизна пространства-времени тоже стремилась к нулю), в решении не возникало духов и градиентных неустойчивостей на протяжении всей эволюции. Иными сло-

вами, полная устойчивость модифицированного генезиса достигалась за счет геодезической неполноты решения при  $t \rightarrow -\infty$ . В отличие от оригинального сценария, предложенного в [4], где  $H \propto (-t)^{-3}$ , параметр Хаббла в эпоху, подобную генезису, имеет следующую зависимость от времени:

$$H = -\frac{h}{t}, \quad a(t) \propto \frac{1}{(-t)^h}, \quad h = \text{const}, \quad (42)$$

$$h > 1, \quad t < 0,$$

а плотность энергии  $\rho$  и давление  $p$  убывают как  $t^{-2}$  при  $t \rightarrow -\infty$  (в оригинальном сценарии  $\rho \propto t^{-6}$ ,  $p \propto t^{-4}$ ).

Позднее аналог описанного сценария модифицированного генезиса был построен в расширенной теории Хорндески в [60]. Параметр Хаббла и соответствующий ему масштабный фактор были выбраны в виде

$$H(t) = \frac{1}{3\sqrt{\tau^2 + t^2}}, \quad a(t) = \left[ t + \sqrt{\tau^2 + t^2} \right]^{1/3}, \quad (43)$$

где  $\tau$  — характерный временной масштаб модели. Существенным отличием предложенного решения в расширенной теории Хорндески является медленное поведение  $a(t) \propto |t|^{-2/3}$  при  $t \rightarrow -\infty$  и, соответственно, геодезическая полнота, которая была проверена явно.

Для нового решения (43) запрещающая теорема обходилась аналогично тому, как это было сделано в описанном выше отскоковом решении без  $\gamma$ -кроссинга. В данной модели  $\gamma$ -кроссинг также был запрещен, в результате чего асимптотика теории при  $t \rightarrow -\infty$  описывается существенно модифицированной гравитацией типа расширенной теории

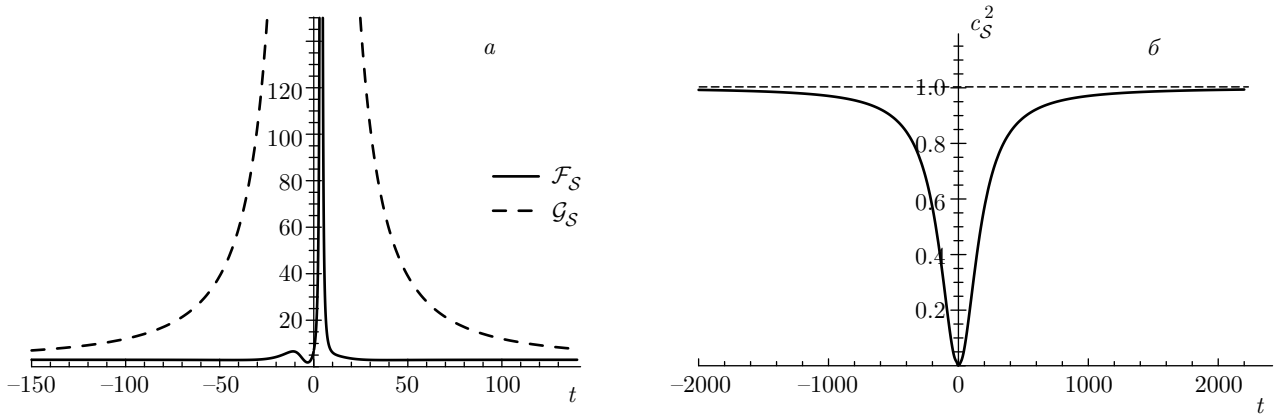


Рис. 3. Поведение коэффициентов  $\mathcal{G}_S$  и  $\mathcal{F}_S$  (а): оба коэффициента строго положительны и расходятся в момент  $\gamma$ -кроссинга, но их отношение, равное квадрату скорости звука скалярных мод  $c_S^2$  (б), всегда конечно и строго положительно:  $\min(c_S^2) \approx 0.001$

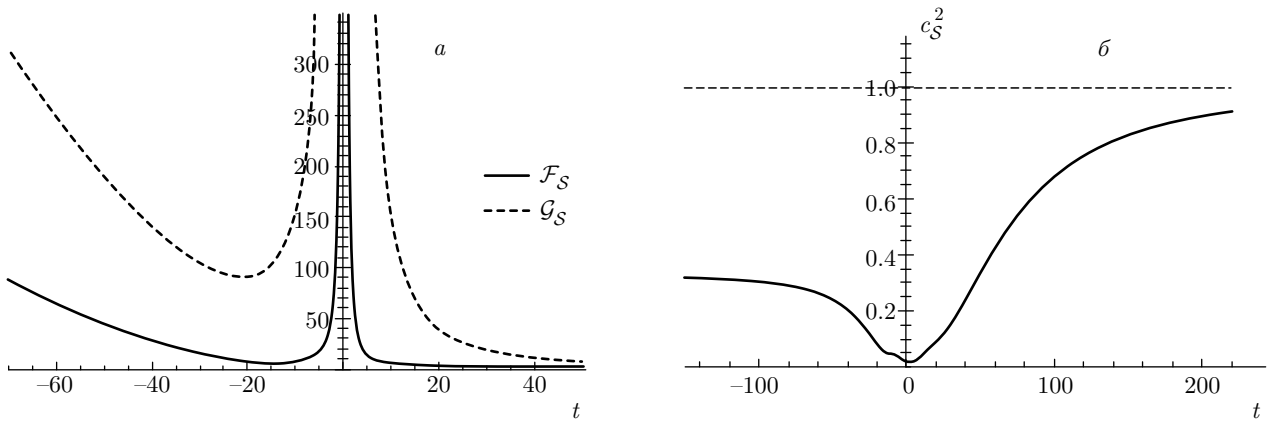


Рис. 4. Поведение коэффициентов  $\mathcal{G}_S$  и  $\mathcal{F}_S$  (а): оба коэффициента строго положительны и расходятся в момент  $\gamma$ -кроссинга, однако их отношение, равное квадрату скорости звука скалярных мод  $c_S^2$  (б), всегда конечно и строго положительно:  $\min(c_S^2) \approx 0.02$

Хорндески. При  $t \rightarrow +\infty$ , как и в исходном геодезически неполном решении (42), теория асимптотически описывается лагранжианом безмассового скалярного поля и ОТО (40).

Наконец, в работе [64] был предложен полностью устойчивый пример субсветового генезиса в расширенной теории Хорндески с простым асимптотическим поведением. На ранних временах теория совпадает с оригинальным сценарием [5]:

$$\begin{aligned}
 t \rightarrow -\infty : \quad H &= \frac{f^3}{4\Lambda^3} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)}{|t|^3}, \\
 a(t) &= 1 + \frac{f^3}{8\Lambda^3} \frac{\left(1 + \frac{\alpha}{3}\right)}{|t|^2},
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

где  $\Lambda$ ,  $f$  и  $\alpha$  — те же параметры, что и в работе [5]. Лагранжиан теории в эпоху генезиса соответствует кубическому подклассу теорий Хорндески:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{t \rightarrow -\infty} &= -\frac{1}{2}R - \frac{3f^3}{4\Lambda^3} \frac{1 + \alpha}{\pi^4} X + \frac{3f^3}{4\Lambda^3} \frac{1 + \alpha/3}{\pi^4} X^2 - \\
 &\quad - \frac{f^3}{2\Lambda^3} \frac{X}{\pi^3} \square\pi,
 \end{aligned}
 \tag{45}$$

который после замены

$$\phi = f \log \left( -\sqrt{\frac{3f}{2\Lambda^3}} \frac{1}{\pi} \right)$$

совпадает с приведенным в [5]. За счет  $\gamma$ -кроссинга асимптотика построенной теории на поздних временах также описывается ОТО: при  $t \rightarrow +\infty$  лагран-

жиан принимает стандартный вид (40), а  $H = (3t)^{-1}$ .

Параметр Хаббла для модели с описанными асимптотиками был выбран в виде

$$H(t) = \left[ \left( 4 \frac{\Lambda^3}{f^3} \frac{1 - \text{th}(t/\tau)}{2(1 + \alpha/3)} + 3 \frac{1 + \text{th}(t/\tau)}{2} \right) \times \sqrt{2\tau^2 + t^2} \right]^{-1}. \quad (46)$$

Процедура реконструкции полной теории во многом повторяет случай отскокового решения с  $\gamma$ -кроссингом:  $\mathcal{G}_T = \mathcal{F}_T = 1$  в любой момент времени, так что тензорные моды всегда распространяются со скоростью света ( $c_T^2 = 1$ ); поведение ключевых для запрещающей теоремы величин  $\xi$ ,  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$  и  $\Theta$  совпадает с изображенным на рис. 2а. Графики зависимости от времени коэффициентов  $\mathcal{G}_S$  и  $\mathcal{F}_S$ , определяющих устойчивость в скалярном секторе, приведены на рис. 4, где  $\mathcal{G}_S|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 3$ ,  $\mathcal{F}_S|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 3$ ,  $c_S^2|_{t \rightarrow +\infty} \rightarrow 1$ . На ранних временах ( $t \rightarrow -\infty$ ) имеем  $\mathcal{G}_S|_{t \rightarrow -\infty} \propto |t|^2$  и  $\mathcal{F}_S|_{t \rightarrow -\infty} \propto |t|^2$ , что является характерной особенностью сценария с генезисом, а  $c_S^2|_{t \rightarrow -\infty} < 1$ .

### 3. ДИСФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ЗАПРЕЩАЮЩАЯ ТЕОРЕМА

Как упоминалось во Введении, некоторые подклассы DHOST- и U-вырожденных теорий однозначно связаны с общими теориями Хорндески посредством обратимого дисформного преобразования [32] метрики (5), которое является обобщением стандартного конформного преобразования  $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(\pi)g_{\mu\nu}$  [29, 30, 34, 35]. Отметим несколько свойств дисформных преобразований. Дисформные преобразования (5) с функциями  $\Omega^2(\pi)$  и  $\Gamma(\pi)$ , которые зависят от скалярного поля  $\pi$ , но не от кинетического члена  $X$ , будучи примененными к теории Хорндески  $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$ , не выводят за пределы этого подкласса теорий. Обратимые преобразования с  $\Omega^2(\pi, X) = 1$  и произвольным  $\Gamma(\pi, X)$  позволяют получить из теорий Хорндески  $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4$  их расширение с  $F_4(\pi, X) \neq 0$  [22, 33]. Это, в частности, означает, что лагранжиан вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F, K, G_4, F_4) = & F(\pi, X) + K(\pi, X)\square\pi - \\ & - G_4(\pi, X)R + (2G_{4X}(\pi, X) - F_4(\pi, X)X) \times \\ & \times \left[ (\square\pi)^2 - \pi_{;\mu\nu}\pi^{;\mu\nu} \right] + 2F_4(\pi, X) \times \\ & \times \left[ \pi^{;\mu}\pi_{;\mu\nu}\pi^{;\nu}\square\pi - \pi^{;\mu}\pi_{;\mu\lambda}\pi^{;\nu\lambda}\pi_{;\nu} \right], \quad (47) \end{aligned}$$

который приводит к устойчивым решениям, описанным в предыдущем разделе, может быть преобразован с помощью дисформного преобразования к виду  $\bar{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\bar{F}, \bar{K}, \bar{G}_4)$ , т. е. к лагранжиану (нерасширенной) теории Хорндески.

В контексте запрещающей теоремы, справедливой в теории Хорндески, и возможности обойти ее в расширенных теориях Хорндески естественно задать следующий вопрос: как согласуется существование полностью устойчивого решения в расширенном классе теорий (47) с запрещающей теоремой, справедливой в теории Хорндески с  $F_4(\pi, X) = 0$ , если эти теории связаны преобразованием полей? Ответ на этот вопрос был дан в терминах эффективной теории в работе [59]: в соответствующих законах преобразования функций лагранжиана возникает сингулярность именно в тот момент, когда  $\xi$  в (36) пересекает нуль. В работе [59] этот факт был установлен на уровне эффективного действия для возмущений наиболее общего вида. Целью данного раздела является подтверждение этого результата на языке ковариантной теории.

Рассмотрим дисформное преобразование

$$\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \Gamma_4(\pi, X)\partial_\mu\pi\partial_\nu\pi, \quad (48)$$

которое позволяет перейти к общей теории Хорндески в лагранжиане (47):

$$\mathcal{L}_4[G_4] + \mathcal{L}_4[F_4] = \bar{\mathcal{L}}_4[\bar{G}_4]. \quad (49)$$

Уравнение для функции  $\Gamma_4(\pi, X)$ , позволяющей осуществить переход (49), было найдено в ковариантной форме в работах [24, 35]:

$$\Gamma_{4X} = \frac{F_4}{G_4 - 2G_{4X}X - F_4X^2}. \quad (50)$$

Там же была приведена связь новой функции  $\bar{G}_4$  в теории Хорндески  $\bar{\mathcal{L}}_4$  с исходной функцией  $G_4$  в расширенной теории Хорндески  $\mathcal{L}_4$ :

$$\bar{G}_4(\pi, \bar{X}) = \frac{G_4(\pi, X)}{\sqrt{1 + X\Gamma_4}}, \quad \bar{X} = \frac{X}{1 + X\Gamma_4}. \quad (51)$$

Покажем, что преобразованная функция  $\bar{G}_{4\bar{X}}$  сингулярна в тот момент времени, когда  $\xi$  вместе с  $\mathcal{G}_T + \mathcal{D}\dot{\pi}$  в (31) пересекает нуль.

Из преобразований (51) следует, что функции  $\bar{G}_{4\bar{X}}$  и  $G_{4X}$ , явно входящие в лагранжианы двух теорий, связаны следующим соотношением:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{4\bar{X}} = & \frac{\partial\bar{G}_4}{\partial\bar{X}} = \frac{\sqrt{1 + X\Gamma_4}}{1 - X^2\Gamma_{4X}} \times \\ & \times \left( G_{4X}(1 + X\Gamma_4) - \frac{1}{2}G_4(\Gamma_4 + X\Gamma_{4X}) \right). \quad (52) \end{aligned}$$

Перепишем  $\Gamma_{4X}$  в (50) в терминах обозначений (21) и (22):

$$\Gamma_{4X} = \frac{\mathcal{D}\dot{\pi}}{X^2(\mathcal{G}_{\mathcal{T}} + 2\mathcal{D}\dot{\pi})}. \quad (53)$$

Обратимся теперь к знаменателю преобразования (52) и подставим в него явное выражение для  $\Gamma_{4X}$  (53):

$$\frac{1}{1 - X^2\Gamma_{4X}} = \frac{\mathcal{G}_{\mathcal{T}} + 2\mathcal{D}\dot{\pi}}{\mathcal{G}_{\mathcal{T}} + \mathcal{D}\dot{\pi}}. \quad (54)$$

Из (54) следует, что знаменатель в преобразовании (52) обращается в нуль в тот момент, когда  $\xi = 0$  (31). Действительно, как обсуждалось в разд. 2.2, обойти запрещающую теорему в расширенной теории Хорндески возможно благодаря тому, что  $\mathcal{D} \neq 0$ . Это позволяет добиться необходимого поведения  $\xi$  в (36). Последнее подразумевает существование момента(моментов), когда  $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} + \mathcal{D}\dot{\pi} = 0$ . Таким образом, расширенные теории Хорндески, в которых существует полностью устойчивое решение без начальной сингулярности, оказываются связаны с теориями Хорндески сингулярными дисформными преобразованиями. Поэтому противоречия между существованием полностью устойчивых решений и запрещающей теоремой в дисформно-связанных теориях действительно не возникает.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном обзоре мы ставили перед собой цель дать краткое описание результатов исследований космологических решений без начальных сингулярностей и их устойчивости в расширенных теориях Хорндески.

Были описаны конкретные примеры моделей Вселенной с отскоком или генезисом в расширенной теории Хорндески, свободных от градиентных и духовых неустойчивостей на линеаризованном уровне в течение полного времени эволюции системы от  $t \rightarrow -\infty$  до  $t \rightarrow +\infty$ . Привлекательной особенностью некоторых из предложенных моделей является простая форма асимптотик теории при  $t \rightarrow \pm\infty$ , которая соответствует ОТО с обычным безмассовым скалярным полем. Преимущество простого асимптотического поведения становится очевидным, если рассматривать описанные сценарии с точки зрения их возможного использования в реалистичных моделях ранней Вселенной. Действительно, модели используют специфическую способность галилееонов безопасно нарушать NEC/NCC, что делает возможным отскок или фазу генезиса, и одновременно избегают появления экзотической, нестандартной мате-

рии вне NEC/NCC-нарушающей фазы. Анализ феноменологических следствий таких космологических сценариев без начальной сингулярности выходит за рамки данного обзора, однако данное направление исследований весьма перспективно и популярно в современной литературе.

Отдельное обсуждение вопроса о связи теорий Хорндески с их расширениями через дисформное преобразование было призвано собрать воедино уже существующие частные результаты, полученные в ковариантном формализме. Вопрос о том, как согласуются запрещающая теорема в теории Хорндески и существование полностью устойчивых решений в расширенной теории Хорндески с учетом связи этих теорий через замену полей, неоднократно поднимался и после публикации [59]. Подтверждение вывода работы [59] в рамках ковариантной теории нам представляется полезным дополнением, которое дает исчерпывающий ответ на поставленный вопрос.

**Благодарности.** Авторы благодарны Р. Колеватову и Н. Сухову за плодотворное сотрудничество, а также Е. Бабичеву и А. Викману за полезные обсуждения.

**Финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-12-00393).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. J. L. Lehners, Phys. Rep. **465**, 223 (2008) [arXiv:0806.1245 [astro-ph]].
2. M. Novello and S. E. P. Bergliaffa, Phys. Rep. **463**, 127 (2008) [arXiv:0802.1634 [astro-ph]].
3. D. Battfeld and P. Peter, Phys. Rep. **571**, 1 (2015) [arXiv:1406.2790 [astro-ph.CO]].
4. P. Creminelli, M. A. Luty, A. Nicolis, and L. Senatore, JHEP **0612**, 080 (2006) [hep-th/0606090].
5. P. Creminelli, A. Nicolis, and E. Trincherini, JCAP **1011**, 021 (2010) [arXiv:1007.0027 [hep-th]].
6. A. Borde, A. H. Guth, and A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **90**, 151301 (2003) [gr-qc/0110012].
7. A. Borde and A. Vilenkin, Int. J. Mod. Phys. D **5**, 813 (1996) [gr-qc/9612036].
8. F. Finelli and R. Brandenberger, Phys. Rev. D **65**, 103522 (2002) [hep-th/0112249].

9. В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН **102**, 463 (1970); V. A. Belinsky, I. M. Khalatnikov, and E. M. Lifshitz, Adv. Phys. **19**, 525 (1970).
10. J. K. Erickson, D. H. Wesley, P. J. Steinhardt, and N. Turok, Phys. Rev. D **69**, 063514 (2004) [hep-th/0312009].
11. I. M. Khalatnikov and A. Y. Kamenshchik, Phys. Lett. B **553**, 119 (2003) [gr-qc/0301022].
12. J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, Phys. Rev. D **64**, 123522 (2001) [hep-th/0103239]; E. I. Buchbinder, J. Khoury, and B. A. Ovrut, Phys. Rev. D **76**, 123503 (2007) [hep-th/0702154].
13. В. А. Рубаков, УФН **184**, 137 (2014) [V. A. Rubakov, Phys. Usp. **57**, 128 (2014)] [arXiv:1401.4024 [hep-th]].
14. F. J. Tipler, Phys. Rev. D **17**, 2521 (1978).
15. A. A. Starobinsky, Sov. Astron. Lett. **4**, 82 (1978).
16. T. Kobayashi, arXiv:1901.07183 [gr-qc].
17. A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini, Phys. Rev. D **79**, 064036 (2009) [arXiv:0811.2197 [hep-th]].
18. C. Deffayet, G. Esposito-Farese, and A. Vikman, Phys. Rev. D **79**, 084003 (2009) [arXiv:0901.1314 [hep-th]].
19. C. Deffayet, S. Deser, and G. Esposito-Farese, Phys. Rev. D **80**, 064015 (2009) [arXiv:0906.1967 [gr-qc]].
20. C. Deffayet, X. Gao, D. A. Steer, and G. Zahariade, Phys. Rev. D **84**, 064039 (2011) [arXiv:1103.3260 [hep-th]].
21. G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. **10**, 363 (1974).
22. M. Zumalacárregui and J. García-Bellido, Phys. Rev. D **89**, 064046 (2014) [arXiv:1308.4685 [gr-qc]].
23. J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, Phys. Rev. Lett. **114**, 211101 (2015) [arXiv:1404.6495 [hep-th]].
24. J. Gleyzes, D. Langlois, F. Piazza, and F. Vernizzi, JCAP **1502**, 018 (2015) [arXiv:1408.1952 [astro-ph.CO]].
25. D. Langlois and K. Noui, JCAP **1607**, 016 (2016) [arXiv:1512.06820 [gr-qc]].
26. M. Crisostomi, K. Koyama, and G. Tasinato, JCAP **1604**, 044 (2016) [arXiv:1602.03119 [hep-th]].
27. J. Ben Achour, M. Crisostomi, K. Koyama, D. Langlois, K. Noui, and G. Tasinato, JHEP **1612**, 100 (2016) [arXiv:1608.08135 [hep-th]].
28. D. Langlois, M. Mancarella, K. Noui, and F. Vernizzi, JCAP **1705**, 033 (2017) [arXiv:1703.03797 [hep-th]].
29. D. Langlois and K. Noui, JCAP **1602**, 034 (2016) [arXiv:1510.06930 [gr-qc]].
30. D. Langlois, Int. J. Mod. Phys. D **28**, 1942006 (2019) [arXiv:1811.06271 [gr-qc]].
31. A. De Felice, D. Langlois, S. Mukohyama, K. Noui, and A. Wang, Phys. Rev. D **98**, 084024 (2018) [arXiv:1803.06241 [hep-th]].
32. J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **48**, 3641 (1993) [gr-qc/9211017].
33. D. Bettoni and S. Liberati, Phys. Rev. D **88**, 084020 (2013) [arXiv:1306.6724 [gr-qc]].
34. J. Ben Achour, D. Langlois, and K. Noui, Phys. Rev. D **93**, 124005 (2016) [arXiv:1602.08398 [gr-qc]].
35. M. Crisostomi, M. Hull, K. Koyama, and G. Tasinato, JCAP **1603**, 038 (2016) [arXiv:1601.04658 [hep-th]].
36. T. Qiu, J. Evslin, Y. F. Cai, M. Li, and X. Zhang, JCAP **1110**, 036 (2011) [arXiv:1108.0593 [hep-th]].
37. D. A. Easson, I. Sawicki, and A. Vikman, JCAP **1111**, 021 (2011) [arXiv:1109.1047 [hep-th]].
38. M. Osipov and V. Rubakov, JCAP **1311**, 031 (2013) [arXiv:1303.1221 [hep-th]].
39. Y. F. Cai, D. A. Easson, and R. Brandenberger, JCAP **1208**, 020 (2012) [arXiv:1206.2382 [hep-th]].
40. L. Battarra, M. Koehn, J. L. Lehnert, and B. A. Ovrut, JCAP **1407**, 007 (2014) [arXiv:1404.5067 [hep-th]].
41. T. Qiu and Y. T. Wang, JHEP **1504**, 130 (2015) [arXiv:1501.03568 [astro-ph.CO]].
42. A. Ijjas and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **117**, 121304 (2016) [arXiv:1606.08880 [gr-qc]].
43. A. Ijjas and P. J. Steinhardt, Phys. Lett. B **764**, 289 (2017) [arXiv:1609.01253 [gr-qc]].
44. L. Perreault Lévassieur, R. Brandenberger, and A. C. Davis, Phys. Rev. D **84**, 103512 (2011) [arXiv:1105.5649 [astro-ph.CO]].
45. Z. G. Liu, J. Zhang, and Y. S. Piao, Phys. Rev. D **84**, 063508 (2011) [arXiv:1105.5713 [astro-ph.CO]].
46. Z. G. Liu and Y. S. Piao, Phys. Lett. B **718**, 734 (2013) [arXiv:1207.2568 [gr-qc]].

47. K. Hinterbichler, A. Joyce, J. Khoury, and G. E. J. Miller, JCAP **1212**, 030 (2012) [arXiv:1209.5742 [hep-th]].
48. S. Nishi and T. Kobayashi, JCAP **1503**, 057 (2015) [arXiv:1501.02553 [hep-th]].
49. S. Nishi and T. Kobayashi, Phys. Rev. D **95**, 064001 (2017) [arXiv:1611.01906 [hep-th]].
50. Y. A. Ageeva, O. A. Evseev, O. I. Melichev, and V. A. Rubakov, arXiv:1810.00465 [hep-th].
51. P. Creminelli, K. Hinterbichler, J. Khoury, A. Nicolis, and E. Trincherini, JHEP **1302**, 006 (2013) [arXiv:1209.3768 [hep-th]].
52. D. A. Easson, I. Sawicki, and A. Vikman, JCAP **1307**, 014 (2013) [arXiv:1304.3903 [hep-th]].
53. M. Libanov, S. Mironov, and V. Rubakov, JCAP **1608**, 037 (2016) [arXiv:1605.05992 [hep-th]].
54. R. Kolevato and S. Mironov, Phys. Rev. D **94**, 123516 (2016) [arXiv:1607.04099 [hep-th]].
55. T. Kobayashi, Phys. Rev. D **94**, 043511 (2016) [arXiv:1606.05831 [hep-th]].
56. S. Akama and T. Kobayashi, Phys. Rev. D **95**, 064011 (2017) [arXiv:1701.02926 [hep-th]].
57. S. Mironov, Universe **5**, 52(2) (2019) doi:10.3390/universe5020052.
58. Y. Cai, Y. Wan, H. G. Li, T. Qiu, and Y. S. Piao, JHEP **1701**, 090 (2017) [arXiv:1610.03400 [gr-qc]].
59. P. Creminelli, D. Pirtskhalava, L. Santoni, and E. Trincherini, JCAP **1611**, 047 (2016) [arXiv:1610.04207 [hep-th]].
60. R. Kolevato, S. Mironov, N. Sukhov, and V. Volkova, JCAP **1708**, 038 (2017) [arXiv:1705.06626 [hep-th]].
61. Y. Cai and Y. S. Piao, JHEP **1709**, 027 (2017) [arXiv:1705.03401 [gr-qc]].
62. A. Ijjas, JCAP **1802**, 007 (2018) [arXiv:1710.05990 [gr-qc]].
63. S. Mironov, V. Rubakov, and V. Volkova, JCAP **1810**, 050 (2018) [arXiv:1807.08361 [hep-th]].
64. S. Mironov, V. Rubakov, and V. Volkova, arXiv:1905.06249 [hep-th].
65. T. Kobayashi, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, Progr. Theor. Phys. **126**, 511 (2011) [arXiv:1105.5723 [hep-th]].
66. N. Arkani-Hamed, H. C. Cheng, M. A. Luty, and S. Mukohyama, JHEP **0405**, 074 (2004) [hep-th/0312099].
67. D. A. Dobre, A. V. Frolov, J. T. G. Ghersi, S. Ramazanov, and A. Vikman, JCAP **1803**, 020 (2018), doi:10.1088/1475-7516/2018/03/020 [arXiv:1712.10272 [gr-qc]].