

ВЗРЫВНОЕ РАЗВИТИЕ КВАНТОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬВИНА – ГЕЛЬМГОЛЬЦА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ He-II

Н. М. Зубарев^{a,b}, П. М. Лушников^{c,d**}*

^a *Институт электрофизики Уральского отделения Российской академии наук
620016, Екатеринбург, Россия*

^b *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

^c *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

^d *Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico
87131-0001 NM, USA*

Поступила в редакцию 12 мая 2019 г.,
после переработки 12 мая 2019 г.
Принята к публикации 15 мая 2019 г.

Исследуется нелинейная динамика квантовой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца свободной поверхности He-II, развивающейся при встречном движении нормальной и сверхтекучей компонент жидкого гелия. Продемонстрировано, что вблизи порога линейной устойчивости эволюция границы описывается моделью $|\phi|^4$ — уравнением Клейна–Гордона для комплексной амплитуды возбуждаемой волны с кубической нелинейностью. Важно, что при любых соотношениях плотностей компонент гелия нелинейность играет дестабилизирующую роль, ускоряя развитие линейной неустойчивости границы. В рамках метода интегральных неравенств сформулированы условия взрывного роста возмущений свободной поверхности. Обсуждается аналогия между квантовой неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца и электрогидродинамической неустойчивостью заряженной электронами свободной поверхности жидкого гелия.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова

DOI: 10.1134/S0044451019100134

1. ВВЕДЕНИЕ

Тангенциальный разрыв скоростей как внутри одной жидкости, так и на границе раздела двух жидкостей приводит к возникновению классической неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (НКГ) [1]. В последние годы НКГ активно изучалась в сверхтекучих жидкостях, включая неустойчивость границы раздела различных сверхтекучих фаз ^3He [2–6] и неустойчивость свободной поверхности ^4He [7–9] в сверхтекучей фазе (так называемая фаза He-II, возникающая при температуре ниже 2.17 K [10]). Пер-

вый случай, реализующийся для ^3He , наиболее близок к классической НКГ (фазы находятся по разные стороны границы), в то время как второй случай принципиально отличен — неустойчивость возникает из-за разнонаправленного движения сверхтекучей и нормальной компонент ^4He под свободной поверхностью. В настоящей работе рассматривается второй случай, который естественно назвать квантовой НКГ, поскольку обе компоненты находятся по одну сторону свободной поверхности и их сосуществование в одном объеме является квантовым эффектом, не имеющим классического аналога. Типичная экспериментальная ситуация, в которой реализуется такое относительное движение компонент, проиллюстрирована на рис. 1. Экспериментальные исследования возникновения неустойчивостей свободной плоской поверхности сверхтекучего

* E-mail: nick@iep.uran.ru

** E-mail: lushniko@itp.ac.ru

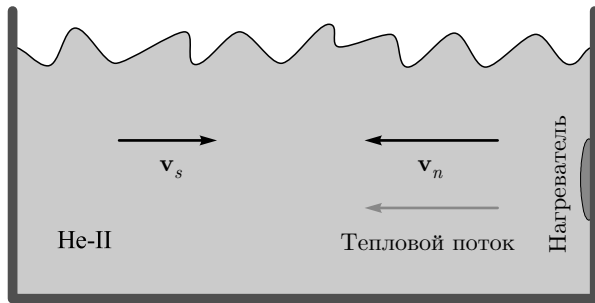


Рис. 1. Встречное движение (со скоростями $v_{s,n}$) сверхтекучей и нормальной компонент сверхтекучего ^4He , вызванное потоком тепла от нагревательного элемента, переносимого нормальной компонентой. Обе компоненты находятся в одном и том же объеме ^4He и перемещаются по касательной к общей свободной поверхности

He-II при протекании теплового потока в объеме жидкости были поставлены и активно проводятся в Лаборатории квантовых кристаллов ИФТТ РАН по инициативе И. М. Халатникова, см., например, работы [8, 11–14].

Мы используем двухжидкостное приближение для описания динамики ^4He [10] с плотностями сверхтекучей ρ_s и нормальной ρ_n компонент (общая плотность жидкости есть $\rho = \rho_n + \rho_s$). Обе компоненты рассматриваются как несжимаемые жидкости ($\rho_n = \text{const}$ и $\rho_s = \text{const}$).

Инкремент квантовой НКГ для линейных возмущений, пропорциональных $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\perp - i\omega t}$, плоской горизонтальной поверхности при наличии гравитации и капиллярности, дается следующим дисперсионным соотношением, найденным в работах [15, 16]:

$$\omega_k^2 = \rho_s(\omega - \mathbf{V}_s \cdot \mathbf{k})^2 + \rho_n(\omega - \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{k} + i2\nu_n k^2)^2 + 4\rho_n \nu_n^2 k^3 m_n, \quad (1)$$

где \mathbf{V}_s и \mathbf{V}_n — средние скорости сверхтекучей и нормальной компонент, \mathbf{r}_\perp — горизонтальная координата, t — время, ν_n — кинематическая вязкость нормальной компоненты, определяемая как динамическая вязкость, нормализованная на ρ_n , \mathbf{k} и ω — волновой вектор и частота возмущения, $k = |\mathbf{k}|$ и $m_n = [k^2 - i(\omega - \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{k})/\nu_n]^{1/2}$. Так же

$$\omega_k^2 \equiv gk + \alpha k^3 / \rho \quad (2)$$

— закон дисперсии гравитационно-капиллярных волн в отсутствие среднего движения компонент жидкости, g — ускорение поля тяжести, α — коэффициент поверхностного натяжения.

В рамках простейшего бездиссипативного двухжидкостного описания [15, 16] течение обеих фаз

считается потенциальным. В таком случае скорости фаз можно представить в виде $\mathbf{v}_{n,s} = \nabla\Phi_{n,s}$, где $\Phi_{n,s}$ — потенциалы скоростей, которые удовлетворяют (в силу $\rho_n = \text{const}$ и $\rho_s = \text{const}$) уравнениям Лапласа

$$\nabla^2\Phi_n = 0, \quad \nabla^2\Phi_s = 0, \quad (3)$$

а дисперсионное соотношение (1) сводится к виду

$$(\omega - \mathbf{V}_m \cdot \mathbf{k})^2 = \omega_k^2 - \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})^2, \quad (4)$$

где $\mathbf{V}_m \equiv (\rho_n \mathbf{V}_n + \rho_s \mathbf{V}_s) / \rho$ — средняя скорость движения центра масс жидкости и $\mathbf{V} \equiv \mathbf{V}_s - \mathbf{V}_n$ — средняя относительная скорость компонент жидкости. Ниже без потери общности мы полагаем $\mathbf{V}_m = 0$, подразумевая переход в соответствующую движущуюся систему отсчета.

Дисперсионное соотношение (4) позволяет найти [15, 16] пороговое значение относительной скорости

$$V_c = \left(\frac{4\rho^3 g \alpha}{\rho_n^2 \rho_s^2} \right)^{1/4}, \quad (5)$$

которое соответствует значению волнового числа $k = k_0 \equiv \sqrt{\rho g / \alpha}$. Линейная НКГ возникает при относительной скорости $V \equiv |\mathbf{V}| > V_c$.

Заметим, что закон дисперсии квантовой НКГ примет такой же вид, что и обычный закон дисперсии НКГ для границы раздела двух идеальных несмешивающихся жидкостей (см., например, [1], стр. 346), если в уравнении (4) для ω_k вместо (2) будет использовано классическое дисперсионное соотношение $\omega_{k, \text{classical}}^2 = (\rho_s - \rho_n)gk / \rho + \alpha k^3 / \rho$ для гравитационно-капиллярных волн в отсутствие среднего движения компонент жидкости (в этом случае подразумевается, что жидкость с плотностью ρ_n находится выше границы раздела, а с плотностью ρ_s — ниже). Чтобы вернуться от $\omega_{k, \text{classical}}$ к (2) достаточно произвести замену $\rho_n \rightarrow -\rho_n$ (без изменения полной плотности ρ) в $\omega_{k, \text{classical}}$. Остальные члены в (4) не зависят от g и поэтому не меняются вне зависимости от того, расположена ли вторая жидкость с плотностью ρ_n под свободной поверхностью (квантовый случай) или выше границы раздела (классический случай). Описанное отличие между линейными законами дисперсии классической и квантовой НКГ носит только количественный характер. Качественное различие между классической и квантовой НКГ возникает на нелинейных стадиях развития неустойчивости. Так, в частности, в пределе $V \gg V_c$ для классической НКГ возникает тенденция к формированию на границе раздела жидкостей слабых корневых особенностей,

для которых поверхность остается гладкой, а бесконечной за конечное время становится ее кривизна [17, 18]. При аналогичных условиях для квантовой НКГ возникает тенденция к образованию сильных особенностей — точек заострения [19].

В настоящей работе рассматриваются нелинейные стадии развития квантовой НКГ вблизи порога устойчивости, т. е. при $|V - V_c|/V_c \ll 1$. В этой ситуации возбуждается узкий в фурье-пространстве пакет поверхностных волн, что позволяет сформулировать уравнение для огибающей этого волнового пакета. Показано, что влияние нелинейности при любых соотношениях плотностей компонент гелия оказывает дестабилизирующую роль, т. е. ускоряет развитие линейной неустойчивости границы и приводит к взрывной неустойчивости с достижением сингулярности за конечное время в уравнении для огибающей. В рамках полных гидродинамических уравнений это означает, что решение становится сильно нелинейным (характерные углы наклона укрупняются до значений порядка единицы) за конечное время.

План статьи следующий: в разд. 2 приводятся основные уравнения двухжидкостной гидродинамики с кинематическими и динамическими граничными условиями на свободной поверхности. В разд. 3 для двумерных течений проводится переход к эффективному одножидкостному описанию с использованием гармонически сопряженных потенциалов (функций тока). В разд. 4 продемонстрировано, что в итоге наших преобразований исходная задача описания нелинейного развития квантовой НКГ, возникающей за счет относительного движения нормальной и сверхтекучей фаз, становится эквивалентной (с точностью до устранимых заменами постоянных) задаче о динамике заряженной электронами границе жидкого гелия в электрическом поле (предел, когда заряд полностью экранирует поля над жидкостью). Эта аналогия позволила использовать для рассматриваемой проблемы ряд результатов, полученных ранее при анализе поведения жидкого гелия в электрическом поле. В разд. 5 с использованием результатов работ [20, 21] получено, что вблизи порога устойчивости эволюция границы описывается моделью $|\phi|^4$ — релятивистски-инвариантным уравнением Клейна–Гордона с нелинейным притяжением для комплексной огибающей возбуждаемой волны. Важно, что при любых соотношениях плотностей компонент гелия нелинейность играет дестабилизирующую роль, ускоряя развитие линейной неустойчивости границы. В разд. 6 в рамках уравнения Клейна–Гордона на основании метода интеграль-

ных неравенств с использованием аналогии с движением эффективной ньютоновской частицы в некотором потенциале сформулированы достаточные условия взрывного роста возмущений свободной поверхности. В заключительном разд. 7 обсуждается жесткий характер возбуждения сильно нелинейных решений и их применимость для полной двухжидкостной гидродинамики.

2. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Мы ограничимся рассмотрением плоских течений, когда все величины зависят от пары переменных $\mathbf{r} = (x, y)$, где x и y — соответственно горизонтальная и вертикальная координаты. В таком случае имеем $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$.

В невозмущенном состоянии поверхность гелия — плоскость $y = 0$, а движение компонент гелия вдоль оси x является однородным, т. е. для потенциалов скорости справедливо $\Phi_{n,s} = V_{n,s}x$, где $V_{n,s}$ — горизонтальные скорости компонент. Как уже указывалось, без потери общности можно считать $\rho_n V_n + \rho_s V_s = 0$, что соответствует рассмотрению задачи в системе центра масс. Тогда компоненты скорости выражаются через среднюю относительную скорость компонент $V = V_s - V_n > 0$ как $V_{n,s} = \mp \rho_{s,n} V / \rho$.

Будем считать, что возмущенная свободная поверхность жидкого гелия задается уравнением $y = \eta(x, t)$, т. е. жидкость занимает область

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \eta(x, t).$$

Возмущения потенциалов скорости, возникающие из-за деформации границы, затухают на глубине:

$$\Phi_{n,s} \rightarrow V_{n,s}x, \quad y \rightarrow -\infty. \quad (6)$$

Движение границы определяется динамическим и кинематическим граничными условиями. Динамическое условие (нестационарное уравнение Бернулли для двухкомпонентной жидкости) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_n \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi_n)^2}{2} \right) + \rho_s \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi_s)^2}{2} \right) = \\ = -\rho g \eta + \frac{\alpha \eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}} + \Gamma, \quad y = \eta, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\eta_x \equiv \partial \eta / \partial x$, $\eta_{xx} \equiv \partial^2 \eta / \partial x^2$; первое слагаемое в правой части ответственно за силу тяжести, а второе — за капиллярные силы. Эти силы стремятся вернуть возмущенную границу жидкости в исходное плоское состояние. Величина Γ — постоянная

Бернулли; ее значение, обеспечивающее выполнение условия (7) в невозмущенном состоянии $\Phi_{n,s} = V_{n,s}x$ и $\eta = 0$, задается выражением

$$\Gamma = \frac{\rho_n V_n^2 + \rho_s V_s^2}{2} = \frac{\rho_n \rho_s V^2}{2\rho}.$$

Наконец, согласно кинематическому условию, нормальная скорость границы должна совпадать с нормальной компонентой скорости каждой из фаз:

$$\frac{\eta_t}{\sqrt{1 + \eta_x^2}} = \partial_n \Phi_n = \partial_n \Phi_s, \quad y = \eta(x, t), \quad (8)$$

где $\eta_t \equiv \partial\eta/\partial t$, а $\partial_n \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla$ обозначает производную по внешней нормали

$$\mathbf{n} = (-\eta_x, 1) \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_x^2}}$$

к границе жидкости.

3. ПЕРЕХОД К ЭФФЕКТИВНОМУ ОДНОЖИДКОСТНОМУ ОПИСАНИЮ

Введем среднюю скорость среды как

$$\mathbf{v} \equiv \frac{\rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s}{\rho}. \quad (9)$$

Уравнения движения можно переписать в терминах одной эффективной жидкости с плотностью ρ , движущейся со скоростью \mathbf{v} . Скорости (9) соответствует потенциал

$$\Phi = \frac{\rho_n \Phi_n + \rho_s \Phi_s}{\rho}, \quad (10)$$

т. е. $\mathbf{v} = \nabla \Phi$. Введем также вспомогательный потенциал скорости

$$\phi = \sqrt{\rho_s \rho_n} (\Phi_n - \Phi_s) / \rho. \quad (11)$$

Потенциалы Φ и ϕ являются линейными комбинациями гармонических потенциалов $\Phi_{s,n}$, поэтому они удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad \nabla^2 \phi = 0.$$

Условия на глубине (6) запишутся как

$$\Phi \rightarrow 0, \quad \phi \rightarrow -Vx\sqrt{\rho_s \rho_n} / \rho, \quad y \rightarrow -\infty. \quad (12)$$

Динамическое граничное условие (7) переписывается как

$$\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} \right) = -\rho g \eta + \frac{\alpha \eta_{xx}}{(1 + \eta_x^2)^{3/2}} + \Gamma - \frac{\rho (\nabla \phi)^2}{2}, \quad y = \eta. \quad (13)$$

Кинематическое условие для потенциала Φ , как несложно получить из (8), примет форму

$$\frac{\eta_t}{\sqrt{1 + \eta_x^2}} = \partial_n \Phi, \quad y = \eta. \quad (14)$$

Наконец, кинематическое условие для потенциала ϕ имеет, очевидно, тривиальный вид:

$$\partial_n \phi = 0, \quad y = \eta. \quad (15)$$

Таким образом, исходные уравнения для движения двух компонент жидкого гелия в бездиссипативном приближении сводятся к классическим уравнениям для потенциального движения единственной несжимаемой жидкости со свободной границей, учитывающим капиллярные и гравитационные силы, с дополнительным слагаемым $\rho(\nabla \phi)^2/2$ в правой части нестационарного уравнения Бернулли (13). Оно ответственно за влияние встречного движения компонент жидкого гелия и, как следствие, за развитие квантовой неустойчивости Кельвина – Гельмгольца. Обсудим это слагаемое более подробно.

Введем вспомогательную функцию ψ , гармонически сопряженную с потенциалом ϕ , т. е. ψ и ϕ связаны соотношениями Коши – Римана

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Поясним физический смысл величины ψ . Ее можно по аналогии с (11) представить в виде

$$\psi = \sqrt{\rho_s \rho_n} (\Psi_n - \Psi_s) / \rho, \quad (16)$$

где $\Psi_{n,s}$ – функции тока для нормальной и сверхтекучей компонент He-II, которые связаны с потенциалами $\Phi_{n,s}$ соотношениями

$$\frac{\partial \Phi_{n,s}}{\partial x} = \frac{\partial \Psi_{n,s}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi_{n,s}}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi_{n,s}}{\partial x}.$$

Таким образом, гармоническая функция ψ является (с точностью до постоянного множителя) разностью функций тока различных компонент гелия.

Как следствие соотношений Коши – Римана имеем

$$\partial_n \phi|_{y=\eta} = -\partial_\tau \psi|_{y=\eta},$$

где

$$\partial_\tau \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + \eta_x^2}} (1, \eta_x) \cdot \nabla$$

– тангенциальная производная. Тогда граничное условие (15) переписывается как

$$\partial_\tau \psi = 0, \quad y = \eta,$$

т. е. величина ψ не меняется вдоль границы. Можно без потери общности положить $\psi|_{y=\eta} = 0$.

С использованием ψ уравнения движения примут окончательный вид:

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\psi = 0, \quad (17)$$

$$\Phi \rightarrow 0, \quad \psi \rightarrow -Vy\sqrt{\rho_s\rho_n}/\rho, \quad y \rightarrow -\infty, \quad (18)$$

$$\rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} \right) = -\rho g\eta + \frac{\alpha\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}} + \Gamma - \frac{\rho(\nabla\psi)^2}{2}, \quad y = \eta, \quad (19)$$

$$\frac{\eta_t}{\sqrt{1+\eta_x^2}} = \partial_n\Phi, \quad \psi = 0, \quad y = \eta. \quad (20)$$

Важно, что задача на определение функции ψ и, как следствие, ключевого слагаемого $\rho(\nabla\psi)^2/2$ в динамическом граничном условии отщепляется от общей задачи о движении границы. Действительно, из этих уравнений видно, что величина ψ полностью определяется формой границы η и не зависит от характера ее движения (т. е. от потенциала Φ). Именно это и определяет возможность перехода к одножидкостному описанию для рассматриваемой проблемы.

4. АНАЛОГИЯ С ДИНАМИКОЙ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Продемонстрируем, что уравнения (17)–(20) идентичны уравнениям, возникающим в описании неустойчивости заряженной электронами свободной границы жидкого гелия во внешнем электрическом поле. Пусть жидкий гелий находится при достаточно низкой температуре, так что можно считать, что нормальная фаза отсутствует ($\rho_n \approx 0$ и $\rho \approx \rho_s$). Невозмущенная (плоская) граница заряжена электронами с поверхностной плотностью электрического заряда σ . Как известно, электроны могут свободно перемещаться вдоль границы, обеспечивая ее эквипотенциальность [22, 23]. В приложенном вертикальном однородном электрическом поле напряженности поля над (E_o) и внутри (E_i) жидкости связаны соотношением $E_o - E_i = 4\pi\sigma$.

Потенциал скорости жидкости (единственной) Φ и потенциалы электрического поля над (φ_o) и внутри (φ_i) жидкости удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\varphi_{i,o} = 0.$$

Их следует решать совместно со следующими условиями на глубине и на свободной границе:

$$\begin{aligned} \Phi \rightarrow 0, \quad \varphi_{i,o} \rightarrow -E_{i,o}y, \quad y \rightarrow -\infty, \\ \rho \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} \right) = -\rho g\eta + \frac{\alpha\eta_{xx}}{(1+\eta_x^2)^{3/2}} + \\ + \gamma - \frac{(\nabla\varphi_i)^2 - (\nabla\varphi_o)^2}{8\pi}, \quad y = \eta, \\ \frac{\eta_t}{\sqrt{1+\eta_x^2}} = \partial_n\Phi, \quad \varphi_i = \varphi_o = 0, \quad y = \eta, \end{aligned}$$

где постоянная Бернулли есть $\gamma = (E_i^2 - E_o^2)/8\pi$, а потенциал границы $y = \eta$ принят за нуль. Последнее слагаемое в нестационарном уравнении Бернулли ответственно за электростатическое давление на свободной границе; оно включает в себя давления над и под поверхностью.

Приведенные уравнения оказываются идентичными выведенным нами уравнениям для квантовой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца (17)–(20) в частном случае, когда $E_o = 0$ и, соответственно, $\varphi_o \equiv 0$ и $E_i = -4\pi\sigma$. Этот случай (поверхностный заряд полностью экранирует поле над жидкостью) реализовывался, например, в экспериментах [22, 24]. В рамках этой аналогии вспомогательная функция тока ψ и потенциал электрического поля в жидкости φ_i , а также разность скоростей V и напряженность поля E_i связаны соотношениями

$$\psi\sqrt{4\pi\rho} \equiv \varphi_i, \quad V\sqrt{4\pi\rho_n\rho_s/\rho} \equiv E_i.$$

Отметим, что тогда совпадают и постоянные Бернулли: $\Gamma \equiv \gamma$.

Выявленная аналогия позволяет использовать результаты, полученные ранее при анализе развития электрогидродинамической неустойчивости заряженной поверхности жидкого гелия [20, 21, 25–27], для анализа квантовой неустойчивости Кельвина–Гельмгольца.

В заключение раздела отметим, что эта аналогия не распространяется на общий, трехмерный случай. Для НКГ имеется выделенное направление — направление течения жидкостей (ось x в нашем случае). Для электрогидродинамической неустойчивости выделенного направления не существует — задача инвариантна относительно вращения вокруг вертикальной оси y , вдоль которой направлено внешнее электрическое поле.

5. АМПЛИТУДНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ДИНАМИКИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Анализ, проведенный в работе [20] показал, что граница жидкого гелия в электрическом поле становится неустойчивой при выполнении условия

$$E_i^2 + E_o^2 > E_c^2,$$

где

$$E_c^2 = 8\pi\sqrt{\rho g \alpha}.$$

Вблизи порога устойчивости нарастают гармоники с волновыми числами близкими к $k_0 = \sqrt{\rho g / \alpha}$. Введем параметр надкритичности как

$$\delta = \frac{E_i^2 + E_o^2 - E_c^2}{E_c^2}.$$

Если $|\delta| \ll 1$, то при описании динамики границы естественно построить уравнение для огибающей. Для двумерного случая (в трехмерном возникает необходимость рассмотрения взаимодействия трех плоских волн, волновые векторы которых повернуты на $2\pi/3$ [28, 29]) форма границы ищется в виде

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2k_0} [u(x, t)e^{ik_0x} + u^*(x, t)e^{-ik_0x}] + O(|u|^2),$$

где u — безразмерная комплексная амплитуда (огибающая) волны, а знак «*» обозначает комплексное сопряжение. Как показано в работе [21], эволюция границы описывается уравнением Клейна–Гордона с кубической нелинейностью:

$$\frac{1}{2gk_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta u + \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\Delta^2 - \frac{5}{16} \right) u |u|^2,$$

где обозначено

$$\Delta = \frac{E_i^2 - E_o^2}{E_c^2}.$$

Видно, что в линейном приближении (в пространственно однородном случае) амплитуда будет экспоненциально нарастать при $\delta > 0$. При этом нелинейность будет сдерживать развитие неустойчивости для $0 < \Delta^2 < 5/16$ и ускорять ее развитие для $\Delta^2 > 5/16$.

В интересующем нас случае, когда $E_o = 0$, при малых надкритичностях $\delta \approx 0$ имеем $E_i \approx E_c$ и, как следствие, $\Delta \approx 1$. В таком случае амплитудное уравнение принимает вид

$$\frac{1}{2gk_0} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta u + \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{11}{16} u |u|^2, \quad (21)$$

т. е. нелинейность — дестабилизирующая. Как следует из анализа разд. 4, это уравнение будет описывать и развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца границы Не-П. Для этого случая надкритичность задается выражением

$$\delta = \frac{V - V_c}{V_c}, \quad (22)$$

где критическая скорость определяется уравнением (5).

За счет дестабилизирующего влияния нелинейности возникает тенденция к взрывному росту амплитуды границы Не-П при развитии НКГ пространственно-однородного решения: она неограниченно увеличивается за конечное время как

$$u \propto \frac{1}{t - t_c}, \quad t \rightarrow t_c,$$

где t_c — момент «взрыва». Любопытно, что этот результат не зависит от отношения плотностей нормальной и сверхтекучей компонент гелия. Коэффициент перед нелинейным слагаемым в уравнении (21) оказывается универсальным. В рамках развиваемой модели единственной величиной, зависящей от отношения плотностей, является пороговое для развития НКГ значение разности скоростей компонент (5), входящее в надкритичность (22).

После масштабирования

$$t \rightarrow \frac{t}{\sqrt{2gk_0}}, \quad x \rightarrow \frac{x}{\sqrt{2k_0}}, \quad u \rightarrow \frac{4u}{\sqrt{11}}$$

амплитудное уравнение (21) для огибающей u принимает компактный вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u. \quad (23)$$

Ему соответствует гамильтониан

$$H = \int \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 - \delta |u|^2 - \frac{|u|^4}{2} \right) dx, \quad (24)$$

который является интегралом движения.

6. УСЛОВИЯ ВЗРЫВНОГО РАЗВИТИЯ КВАНТОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬВИНА – ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Итак, мы установили, что при развитии квантовой НКГ огибающая волнового пакета u подчиняется комплексному нелинейному уравнению Клейна–Гордона с кубической нелинейностью, называемой моделью $|\phi|^4$. Особенностью уравнения (23) является то, что нелинейность не стабилизирует линейную неустойчивость, а, наоборот, усиливает ее, приводя при определенных условиях к взрывному росту амплитуд. Действительно, полагая возмущение границы $\eta(x, t)$ и, следовательно, амплитуду $u(x, t)$ локализованными в пространстве, рассмотрим, аналогично [30], временную эволюцию квадрата L^2 нормы

$$B(t) \equiv \int |u|^2 dx. \quad (25)$$

Уравнения (23)–(25) позволяют написать

$$B_{tt} = \int [2|u_t|^2 + u_{tt}u^* + uu_{tt}^*] dx = -4H + \int [6|u_t|^2 - 2\delta|u|^2 + 2|u_x|^2] dx, \quad (26)$$

где мы использовали интегрирование по частям по x с учетом убывающих граничных условий при $|x| \rightarrow \infty$. Отметим, что вклад от $2 \int |u|^4 dx$ был полностью поглощен членом $-4H$. Нижние индексы в уравнении (26) и далее означают дифференцирование: $u_t = \partial u / \partial t$, $u_x = \partial u / \partial x$, $B_{tt} = \partial^2 B / \partial t^2 = d^2 B / dt^2$ и т. д.

Для оценки снизу члена

$$\int 6|u_t|^2 dx = 6 \int R_t^2 dx + 6 \int \phi_t^2 R^2 dx \quad (27)$$

в уравнении (26) мы представляем комплексную амплитуду u в форме $u \equiv Re^{i\phi}$, где $R = |u|$ — амплитуда и ϕ — фаза. Используя неравенство Коши–Буняковского

$$\left| \int fg dx \right| \leq \left(\int |f|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int |g|^2 dx \right)^{1/2},$$

справедливого для комплексных функций f и g , мы получаем неравенства

$$|B_t| = 2 \left| \int RR_t dx \right| \leq 2B^{1/2} \left(\int R_t^2 dx \right)^{1/2} \quad (28)$$

и

$$|Q| = 2 \left| \int \phi_t R^2 dx \right| \leq 2B^{1/2} \left(\int \phi_t^2 R^2 dx \right)^{1/2}, \quad (29)$$

где $Q \equiv i \int [u_t u^* - u u_t^*] dx$ является интегралом движения ($Q_t \equiv 0$) уравнения (23). При использовании уравнения (23) в квантовой теории поля и теории солитонов этот интеграл иногда называется зарядом (см., например, [31, 32]), мы однако ниже не будем использовать подобную терминологию, поскольку понятие заряда уже использовалось в разд. 4 и 5 в другом контексте.

Используя неравенства (28), (29) мы получаем из (27) следующее неравенство:

$$\int 6|u_t|^2 dx \geq \frac{3B_t^2}{2B} + \frac{3Q^2}{2B}.$$

Подставляя это выражение в (26), а также опуская член $\int 2|u_x|^2 dx$ (пренебрежение этим неотрицательным членом совместимо со знаком неравенства) приходим к дифференциальному неравенству

$$B_{tt} \geq \frac{3}{2} \frac{B_t^2}{B} + \frac{3}{2} \frac{Q^2}{B} - 4H - 2\delta B. \quad (30)$$

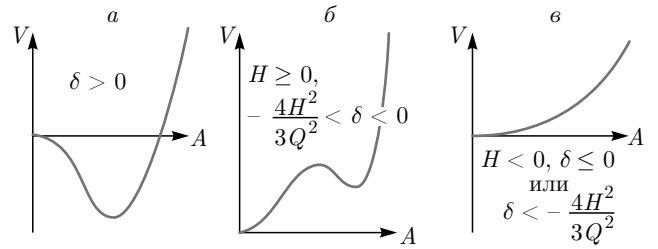


Рис. 2. Качественный вид потенциала $U(A)$ (32) в зависимости от H и δ при $Q \neq 0$

Замена переменных $B = A^{-2}$ позволяет представить (30) в виде

$$A_{tt} \leq -\frac{\partial U(A)}{\partial A}, \quad (31)$$

где

$$U(A) = -\frac{HA^4}{2} - \delta \frac{A^2}{2} + \frac{A^6 Q^2}{8}. \quad (32)$$

Дифференциальное неравенство (31) может быть переписано в эквивалентном виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$A_{tt} = -\frac{\partial U(A)}{\partial A} - h^2(t), \quad (33)$$

где $-h^2(t)$ является неположительной неизвестной силой.

Анализ образования сингулярности в уравнении (23) может быть проведен на основании метода, предложенного в работе [33] (дальнейшее развитие метода см. [34–36]). Метод основан на аналогии уравнения (33) с движением эффективной ньютоновской «частицы» с координатой A в потенциале (32) под воздействием дополнительной (вообще говоря непотенциальной) силы $-h(t)^2$, тянущей частицу в начало координат. Достижение этой частицей нуля $A = 0$ соответствует образованию сингулярности $B = \infty$ в уравнении (23). В зависимости от значений H и δ , качественный вид потенциала $U(A)$ (32) показан на рис. 2 при $Q \neq 0$. (Частный случай $Q = 0$ рассматривается аналогично, см. также [30]).

Удобно ввести энергию частицы

$$W(t) \equiv \frac{A_t^2}{2} + U(A), \quad (34)$$

которая зависит от времени в силу наличия силы $-h(t)^2$ как

$$\frac{dW(t)}{dt} = A_t \left[A_{tt} + \frac{\partial U(A)}{\partial A} \right] = -h(t)^2 A_t. \quad (35)$$

Полная классификация достаточных условий образования сингулярности за конечное время (называемое также волновым коллапсом или просто коллапсом [37]) может быть получена и при необходимости легко сформулирована как точная теорема на основании следующих соображений, которые должны рассматриваться отдельно для случаев $A_t(0) > 0$ и $A_t(0) \leq 0$:

(А) Если при данных начальных условиях $A(0)$ и $A_t(0) \leq 0$ частица достигла бы начала координат $A = 0$ в уравнении (33) под воздействием только консервативной силы $-\partial U(A)/\partial A$, то она заведомо достигнет начала координат за такое же или меньшее время при учете силы $-h(t)^2$. Это связано с тем, что, в соответствии с (35), в рассматриваемом случае с $A_t \leq 0$, для энергии имеем $W(t) \geq W(0)$. В случае рис. 2а для коллапса требуется, чтобы было $W(0) > 0$, т.е. частица имела достаточную начальную энергию для достижения нуля за конечное время. В случае рис. 2б необходимо, чтобы либо $A(0)$ находилось левее барьера (при любом $W(0)$), либо значение $W(0)$ было выше барьера (при $A(0)$ правее барьера). Случай рис. 2в наиболее простой, поскольку для него коллапс возникает при любых значениях $A(0)$, $A_t(0)$ и $W(0)$.

(В) При $A_t(0) > 0$ достаточные условия коллапса могут быть сформулированы для случаев, показанных на рис. 2б и 2в. В случае рис. 2в коллапс возникнет при любых значениях $A(0)$, $A_t(0)$ и $W(0)$, поскольку монотонность потенциала $U(A)$ заставит частицу перестать двигаться вправо за конечное время (ненулевая сила $-h(t)^2$ только ускорит этот процесс), после чего частица упадет в нуль за конечное время (опять же, ненулевая сила $-h(t)^2$ только ускорит этот процесс). При этом, к примеру, для обеспечения условия $H < 0$ при $\delta < 0$ необходимо, чтобы нелинейность была достаточно сильной, так чтобы отрицательный вклад от $-\int (1/2)|u|^4 dx$ в гамильтониане (24) перевесил вклад от всех остальных положительных членов. В случае рис. 2б с $A_t(0) > 0$ коллапс заведомо возникает, если $A(0)$ находится левее барьера и начальная энергия $W(0)$ недостаточна для его преодоления даже без учета силы $-h^2(t)$. Тогда с учетом силы $-h^2(t)$ частица заведомо остановится левее барьера и далее упадет в нуль за конечное время. В остальных случаях рис. 2а и 2б ($A(0)$ правее барьера) частица может застрять в окрестности минимума потенциала, поскольку, как следует из уравнения (35) при $A_t(0) > 0$, имеем $W(t) \leq W(0)$, т.е. частица теряет энергию и после отражения от стенки ее может оказаться недостаточной для преодоления барьера, поэтому

в этих случаях достаточное условие коллапса не может быть сформулировано (хотя коллапс все равно не исключен: для его полного описания требуется полное знание зависимости $-h(t)^2$).

Если одно из приведенных выше достаточных условий взрывного развития НКГ выполняется и $A_t(0) \leq 0$, то для времени возникновения особенности t_c справедливо неравенство

$$t_c \leq \int_0^{A(0)} \frac{dA}{\sqrt{2[W(0) - U(A)]}},$$

следующее из уравнений (33) и (34).

Также заметим, что для пространственно-однородных начальных условий $-h^2(t) \equiv 0$ (все интегралы в этом случае должны пониматься в смысле их значений на единицу длины вдоль x), все неравенства этого раздела превращаются в равенства, в том числе дифференциальное неравенство (31) становится обыкновенным дифференциальным уравнением для ньютоновской частицы. Таким образом, на классе однородных решений достаточные критерии коллапса этого раздела становятся достаточными и необходимыми критериями коллапса, что обобщает критерии коллапса работы [30], где не был учтен вклад от интеграла движения Q . При этом асимптотика падения частицы в нуль $A = 0$ соответствует постоянной скорости A_t , поэтому для $B = A^{-2}$ и, соответственно, для квадрата амплитуды $|u|^2$ огибающей поверхностной волны асимптотика коллапса соответствует закону $(t_c - t)^{-2}$.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Отметим, что часть достаточных критериев взрывного роста амплитуд, полученных в разд. 6, применима к случаю, когда плоская поверхность устойчива по отношению к малым возмущениям ($\delta < 0$). Это означает, что возбуждение неустойчивости будет носить жесткий характер и достаточно большое начальное возмущение линейно устойчивого режима может приводить к образованию сингулярности за конечное время. Во всех случаях вблизи сингулярности уравнение (23) теряет свою применимость: следующие порядки теории возмущений начинают давать вклад такого же порядка, как и нелинейность в (23). Тогда можно заключить, что за конечное время t_c решение становится сильно нелинейным, т.е. характерные углы наклона поверхности становятся порядка единицы за счет действия ведущей нелинейности уравнения Клейна – Гордона.

После этого в ситуации общего положения можно ожидать обрушения волн. В этой области необходимо рассматривать полные гидродинамические уравнения разд. 3, что выходит за рамки настоящей работы.

Заметим, что в работе [19] в пренебрежении гравитацией и капиллярностью были исследованы сколько угодно сильнонелинейные стадии квантовой НКГ: была показана полная интегрируемость уравнений движения в смысле сведения точной динамики к уравнению лапласовского роста, которое имеет бесконечное число интегралов движения и связано с бездисперсионным пределом интегрируемой иерархии Тоды [38]. Интересным вопросом для будущих исследований будет изучение возможности интегрируемости полных гидродинамических уравнений разд. 3.

Финансирование. Работа Н. М. З. выполнялась при частичной поддержке Российской академии наук (программа Президиума РАН № 2), Уральского отделения Российской академии наук (проект № 18-2-2-15) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-08-00098). Работа П. М. Л. по анализу взрывной неустойчивости была выполнена в рамках госзадания «Динамика сложных сред». Работа П. М. Л. выполнялась при частичной поддержке National Science Foundation (grant number DMS-1814619).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1988).
2. G. E. Volovik, Письма в ЖЭТФ **75**, 491 (2002).
3. R. Blaauwgeers, V. B. Eltsov, G. E. Eska, A. P. Finne, R. P. Haley, M. Krusius, J. J. Ruohio, L. Skrbek, and G. E. Volovik, Phys. Rev. Lett. **89**, 155301 (2001).
4. G. E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Oxford Univ. Press, Oxford (2003).
5. A. P. Finne, V. B. Eltsov, R. Hanninen, N. B. Kopnin, J. Kori, M. Krusius, M. Tsubota, and G. E. Volovik, Rep. Progr. Phys. **69**, 3157 (2006).
6. Г. Е. Воловик, УФН **185**, 970 (2015).
7. R. Hanninen and A. W. Baggaley, Proceeding of the National Academy of Sciences USA **111**, 4667 (2014).
8. I. A. Remizov, A. A. Levchenko and L. P. Mezhev-Deglin, J. Low Temp. Phys. **185**, 324 (2016).
9. S. Babuin, V. S. Lvov, A. Pomyalov, L. Skrbek, and E. Varga, Phys. Rev. B **94**, 174504 (2016).
10. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
11. L. V. Abdurahimov, A. A. Levchenko, L. P. Mezhev-Deglin, and I. M. Khalatnikov, Low Temp. Phys. **38**, 1013 (2012).
12. А. А. Левченко, Л. П. Межев-Деглин, А. А. Пельменев, Письма в ЖЭТФ **106**, 233 (2017).
13. А. А. Левченко, Л. П. Межев-Деглин, А. А. Пельменев, ФНТ **44**, 1284 (2018).
14. L. Mezhev-Deglin, A. Pel'menev, and A. Levchenko, Mat. Lett. **238**, 226 (2019).
15. S. E. Korshunov, Europhys. Lett. **16**, 673 (1991).
16. S. E. Korshunov, Письма в ЖЭТФ **75**, 496 (2002).
17. D. W. Moore, Proceed. Royal Soc. London A: Math., Phys. and Eng. Sci. **365**(1720), 105 (1979).
18. Н. М. Зубарев, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **146**, 194 (2014).
19. P. M. Lushnikov and N. M. Zubarev, Phys. Rev. Lett. **120**, 204504 (2018).
20. Д. М. Черникова, ФНТ **2**, 1374 (1976).
21. Л. П. Горьков, Д. М. Черникова, ДАН СССР **228**, 829 (1976).
22. В. С. Эдельман, УФН **130**, 675 (1980).
23. В. Б. Шикин, УФН **181**, 1241 (2011).
24. А. П. Володин, М. С. Хайкин, В. С. Эдельман, Письма в ЖЭТФ **26**, 707 (1977).
25. Н. М. Зубарев, Письма в ЖЭТФ **71**, 534 (2000).
26. Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **121**, 624 (2002).
27. Н. М. Зубарев, ЖЭТФ **134**, 779 (2008).
28. Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор, ЖЭТФ **71**, 262 (1976).
29. N. M. Zubarev, O. V. Zubareva, Phys. Lett. A **272**, 119 (2000).
30. Е. А. Кузнецов, П. М. Лушников, ЖЭТФ **108**, 614 (1995).
31. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля*, Наука, Москва (1993).
32. V. G. Makhankov, Phys. Rep. **35**, 1 (1978).
33. П. М. Лушников, Письма в ЖЭТФ **62**, 447 (1995).

- 34. P. M. Lushnikov and M. Saffman, *Phys. Rev. E* **62**, 5793 (2000).
- 35. P. M. Lushnikov, *Phys. Rev. A* **66**, 051601(R) (2002).
- 36. P. M. Lushnikov, *Phys. Rev. A* **82**, 023615 (2010).
- 37. E. A. Kuznetsov and V. E. Zakharov, *Wave Collapse*, World Scientific Publishing Company, New York (2007).
- 38. M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, and A. Zaborodin, *Phys. Rev. Lett.* **84**(22), 5106 (2000).