ЖЭТФ, 2019, том 156, вып. 4 (10), стр. 724–737 © 2019

НЕЛИНЕЙНАЯ СИГМА-МОДЕЛЬ ФИНКЕЛЬШТЕЙНА: ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ БЕСПОРЯДКА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СИСТЕМАХ

И. С. Бурмистров*

Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 30 января 2019 г.,
после переработки 17 марта 2019 г.
Принята к публикации 18 марта 2019 г.

Представлен обзор недавних теоретических результатов, полученных в рамках подхода нелинейной сигма-модели Финкельштейна для описания двумерных взаимодействующих неупорядоченных электронных систем. Рассмотрены следующие примеры: электронная система с двумя долинами, электроны в двойной квантовой яме, электроны на поверхности трехмерного топологического изолятора, электроны со сверхпроводящими корреляциями, целочисленный квантовый эффект Холла.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова

DOI: 10.1134/S0044451019100158

1. ВВЕДЕНИЕ

Постоянный интерес к неупорядоченным электронным системам связан с явлением локализации Андерсона [1]. Наиболее удобный способ описывать такое явление — это скейлинговая теория для кондактанса [2], которая предсказывает локализацию всех одночастичных состояний при размерности $d \leqslant 2$ и существование перехода Андерсона для $d > 2$. Эта скейлинговая теория была подтверждена прямым диаграмматическим вычислением кондактанса в режиме слабого беспорядка [3,4]. Скейлинговая теория позволила изучать переходы Андерсона с помощью методов теории поля, которые были развиты для описания критических явлений, в частности, низкоэнергетического эффективного действия и ренормализационной группы (см. [5, 6]). Для задачи о локализации Андерсона низкоэнергетическое эффективное действие — это нелинейная сигма-модель (НЛСМ) [7–12]. Она описывает диффузионное движение электронов на масштабах, больших длины свободного пробега, как взаимодействие диффузионных мод (диффузонов и куперонов), что приводит к логарифмическим расходимостям при размерности $d = 2$. Обзоры недавних результатов по локализации Андерсона могут быть найдены в работах [13, 14].

При низких температурах электрон-электронное взаимодействие играет важную роль в локализации Андерсона. Неупругое электрон-электронное рассеяние с малой передачей энергии (по сравнению с температурой T) разрушает фазовую когерентность на больших временах [15–17]. В дополнение к времени сбоя фазы τ_ϕ, электрон-электронное взаимодействие приводит к логарифмическим по температуре поправкам к кондактансу (при $d = 2$) из-за виртуальных процессов электрон-электронного рассеяния [18, 19]. Интересно, что поправка к кондактансу из-за электрон-электронного взаимодействия может быть другого знака по сравнению с поправкой слабой локализации (интерференционной поправкой). Это позволяет предположить существование перехода металл–изолятор в размерности $d = 2$ при наличии электрон-электронного взаимодействия. Экспериментальные указания существования такого перехода металл–изолятор были обнаружены в двумерной электронной системе на основе Si-МОП-транзистора [20, 21].

Первая попытка учесть электрон-электронное взаимодействие в скейлинговой теории локализации

* E-mail: burmi@itp.ac.ru

Андерсона была сделана в работе [22]. Несмотря на то что теория этой работы была феноменологической (и неверной из-за путаницы между термодинамической и локальной плотностями состояний), скейлинговая теория работы [22] содержала важную идею: в присутствии взаимодействия скейлинговая теория перехода металл–изолятор должна быть двухпараметрической. Открытие было сделано в работе Финкельштейна [23], где НЛСМ была выведена из микроскопического гамильтониана с учетом электрон-электронного взаимодействия. С помощью ренормгруппового анализа этой так называемой нелинейной сигма-модели Финкельштейна (НЛСМФ) скейлинговая теория перехода металл–изолятор для $d > 2$ была развита для случая наличия электрон-электронного взаимодействия [24–29]. Сильное электрон-электронное взаимодействие (например, кулоновское взаимодействие) оказывается релевантным (в смысле ренормгруппы) и меняет класс универсальности перехода по сравнению со случаем невзаимодействующих электронов (см. [30, 31]).

НЛСМФ позволяет описывать взаимодействие низкоэнергетических ($|E|, T \lesssim 1/\tau_{tr}$, где τ_{tr} — транспортное время упругого рассеяния) диффузионных мод (диффузонов и куперонов) в присутствии беспорядка и электрон-электронного взаимодействия. НЛСМФ — это теория матричного поля Q, которая действует в репличном пространстве и пространстве мацубаровских частот. Отметим, что НЛСМФ может быть также сформулирована на келдышевском контуре (см. [32]). Эрмитова матрица Q удовлетворяет нелинейному условию

$$Q^2(\mathbf{r}) = 1. \tag{1}$$

В зависимости от конкретной задачи элементы $Q_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ могут иметь дополнительную матричную структуру и удовлетворять дополнительным ограничениям. Греческие индексы $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, N_r$ обозначают репличные индексы, а латинские индексы — это целые числа m, n, соответствующие мацубаровским частотам $\varepsilon_n = \pi T(2n+1)$.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 представлены результаты для неупорядоченной взаимодействующей двумерной электронной системы, в которой проявляется взаимное влияние спина и долинного индекса. В разд. 3 излагаются результаты для взаимодействующих электронов на грязной поверхности тонкой пленки топологического изолятора. В разд. 4 представлены результаты для двумерной электронной системы со сверхпроводящими корреляциями. Результаты для двумерной взаимодействующей неупорядоченной электронной системы в сильном магнитном поле представлены в разд. 5. Статья завершается обсуждением (разд. 6).

2. ВЗАИМНОЕ ВЛИЯНИЕ СПИНА И МНОГОДОЛИННОСТИ ВО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ НЕУПОРЯДОЧЕННОЙ ДВУМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОННОЙ СИСТЕМЕ

В этом разделе будет рассмотрена взаимодействующая неупорядоченная двумерная электронная система с двумя долинами. Такая ситуация реализуется в Si(100)-МОП-транзисторе, в квантовой яме $SiO_2/Si(100)/SiO_2$, в квантовой яме на основе n-AlAs и в графене (см. [33]). Для упрощения изложения мы предположим наличие слабого перпендикулярного магнитного поля $B_\perp \gtrsim \max\{1/\tau_\phi, T\}/D$, где D — коэффициент диффузии. Перпендикулярное магнитное поле подавляет кулероны и оставляет диффузоны единственными низкоэнергетическими диффузионными модами. Также будем предполагать, что температура не слишком низкая, так что можно пренебречь междолинным рассеянием (эффект конечного темпа междолинного рассеяния обсуждается в работах [34, 35]).

2.1. Нелинейная сигма-модель Финкельштейна

В низкоэнергетическом описании взаимодействующих диффузонов в неупорядоченной двумерной электронной системе со спиновыми и долинными степенями свободы элементы матричного поля $Q_{mn}^{\alpha\beta}(\mathbf{r})$ являются матрицами 4×4 в спиновом и долинном пространствах. Действие НЛСМФ имеет следующий вид:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F. \tag{2}$$

Здесь первый член,

$$\mathcal{S}_\sigma = -\frac{\sigma_{xx}}{32} \int d\mathbf{r} \, \mathrm{tr}(\nabla Q)^2, \tag{3}$$

описывает НЛСМ для невзаимодействующих электронов [7–11]. Затравочное значение σ_{xx} (в теоретико-полевом смысле) равно проводимости Друде $\sigma_{xx}^{(0)} = 4\pi\nu_* D$ (в единицах e^2/h). Здесь $\nu_* = m_*/\pi$ — термодинамическая плотность состояний. (Эффективная масса m_* включает ферми-жидкостные поправки.) Здесь и далее предполагается, что $\sigma_{xx} \gg 1$.

Электрон-электронное взаимодействие дает дополнительный вклад в действие НЛСМ [23–26]:

$$\mathcal{S}_F = -\pi T \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\alpha n;ab} \frac{\Gamma_{ab}}{4} \operatorname{tr} I_n^\alpha t_{ab} Q(\mathbf{r}) \times \right.$$
$$\left. \times \operatorname{tr} I_{-n}^\alpha t_{ab} Q(\mathbf{r}) - 4z \operatorname{tr} \eta Q \right]. \quad (4)$$

Здесь 16 матриц $t_{ab} = \tau_a \otimes \sigma_b$ $(a, b = 0, 1, 2, 3)$ — генераторы группы SU(4). Матрицы Паули τ_a (σ_a), $a = 0, 1, 2, 3$, действуют в пространстве долинных (спиновых) индексов. Величины Γ_{ab} — амплитуды электрон-электронного взаимодействия. Структура матрицы Γ_{ab} определяется из микроскопического вывода НЛСМФ. Удобно использовать следующую параметризацию: $\Gamma_{ab} = z\gamma_{ab}$. Здесь параметр z — независимый заряд теории поля (2), который был введен Фикельштейном в работе [23]. Этот дополнительный заряд (в теоретико-полевом смысле) позволяет сделать ренормгрупповой поток согласованным с законом сохранения числа частиц. Параметр z описывает нетривиальную перенормировку частоты при ренормгрупповом потоке. Затравочное значение z определяется термодинамической плотностью состояний: $z^{(0)} = \pi\nu_*/4$. В процессе перенормировки значение z становится зависящим от температуры и определяет зависимость теплоемкости от T [36].

Затравочные значения параметров γ_{ab} могут быть связаны с ферми-жидкостными параметрами F_{ab}: $\gamma_{ab}^{(0)} = -F_{ab}/(1 + F_{ab})$. Здесь F_{ab} — нулевые угловые гармоники ферми-жидкостных параметров, которые обобщают хорошо известные синглетный (F_ρ) и триплетный (F_σ) ферми-жидкостные параметры на случай SU(4)-симметрии. Они могут быть оценены с помощью статически экранированного электрон-электронного взаимодействия (см. [37]).

В присутствии кулоновского взаимодействия затравочное значение Γ_{00} оказывается связанным с затравочным значением параметра z: $\Gamma_{00}^{(0)} = -z^{(0)}$. Ренормгрупповой поток сохраняет следующую величину: $\Gamma_{00} + z$. Поэтому в случае кулоновского взаимодействия выполняется соотношение $\Gamma_{00} = -z$ в процессе ренормировки.

Матрицы Λ, η и I_k^γ определены следующим образом:

$$\Lambda_{nm}^{\alpha\beta} = \operatorname{sign} n \delta_{nm} \delta^{\alpha\beta} t_{00}, \quad \eta_{nm}^{\alpha\beta} = n\delta_{nm}\delta^{\alpha\beta} t_{00},$$
$$(I_k^\gamma)_{nm}^{\alpha\beta} = \delta_{n-m,k} \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\gamma} t_{00}. \quad (5)$$

2.2. $\mathcal{F}$-инвариантность

Матрица $Q_{mn}^{\alpha\beta}$ формально имеет бесконечный размер в пространстве мацубаровских частот. Это создает трудности при вычислениях. Поэтому естественно ввести обрезку на размер матрицы. Будем предполагать, что мацубаровские индексы ограничены интервалом $-N_M \leqslant m, n \leqslant N_M - 1$, где $N_M \gg \gg 1$. Конечно, в конце всех вычислений необходимо взять предел $N_M \to \infty$. Однако этот предел необходимо корректно определить.

Глобальные повороты Q матрицей $\exp(i\hat{\chi})$,

$$Q(\mathbf{r}) \to e^{i\hat{\chi}} Q(\mathbf{r}) e^{-i\hat{\chi}}, \quad \hat{\chi} = \sum_{\alpha,n} \chi_n^\alpha I_n^\alpha, \quad (6)$$

важны из-за своей связи с электрическим потенциалом, постоянным в пространстве [38, 39]. Такой потенциал может быть устранен калибровочным преобразованием электронных операторов. Для того чтобы НЛСМФ (2) была согласована с калибровочной симметрией U(1), необходимо определить предел $N_M \to \infty$ таким образом, что выполняются следующие соотношения [38]:

$$\operatorname{tr} I_n^\alpha t_{ab} e^{i\hat{\chi}} Q e^{-i\hat{\chi}} = \operatorname{tr} I_n^\alpha t_{ab} e^{i\chi_0} Q e^{-i\chi_0} + $$
$$+ 8in(\chi_{ab})_{-n}^\alpha,$$
$$\operatorname{tr} \eta e^{i\hat{\chi}} Q e^{-i\hat{\chi}} = \operatorname{tr} \eta Q + \sum_{\alpha n;ab} in(\chi_{ab})_n^\alpha \times \quad (7)$$
$$\times \operatorname{tr} I_n^\alpha t_{ab} Q - 4 \sum_{\alpha n;ab} n^2 (\chi_{ab})_n^\alpha (\chi_{ab})_{-n}^\alpha.$$

Здесь $\chi_0 = \sum_\alpha \chi_0^\alpha I_0^\alpha$. Соотношения (7) гарантируют наличие $\mathcal{F}$-инвариантности НЛСМФ (т. е. инвариантности относительно глобальных поворотов (6) с $\chi_{ab} = \chi\delta_{a0}\delta_{b0}$) для случая кулоновского взаимодействия, $\Gamma_{00} = -z$.

2.3. Однопетлевые уравнения ренормгруппы

Перенормировка НЛСМФ (2) может быть изучена пертурбативно в рамках разложения по степеням $1/\sigma_{xx}$. Получающиеся в самом низшем порядке уравнения ренормализационной группы имеют вид [33]

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi} \sum_{ab} f(\Gamma_{ab}/z),$$
$$\frac{d\Gamma_{ab}}{dy} = -\frac{1}{2\pi\sigma_{xx}} \times$$
$$\times \sum_{cd;ef} \left[[\operatorname{sp}(t_{cd} t_{ef} t_{ab})]^2 \frac{\Gamma_{cd}}{8} + \left[\mathcal{C}_{cd;ef}^{ab}\right]^2 \times \right. \quad (8)$$
$$\left. \times \left(\frac{\Gamma_{ab}^2}{z} - \frac{(\Gamma_{ab} - \Gamma_{cd})(\Gamma_{ab} - \Gamma_{ef})}{\Gamma_{cd} - \Gamma_{ef}} \ln \frac{z + \Gamma_{cd}}{z + \Gamma_{ef}} \right) \right],$$
$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{\pi\sigma_{xx}} \sum_{ab} \Gamma_{ab}.$$

Здесь $f(x) = 1-(1+1/x)\ln(1+x)$ и $y = \ln(L/l)$, где L обозначает инфракрасный масштаб (размер системы). Структурные константы $C^{ab}_{cd;ef}$ группы SU(4) определены следующим соотношением: $[t_{cd}, t_{ef}] = \sum_{ab} C^{ab}_{cd;ef} t_{ab}$. Отметим, что уравнения (8) были выведены в низшем порядке по $1/\sigma_{xx}$. Однако в этом порядке зависимость от параметров взаимодействия Γ_{ab} учтена точно.

2.4. Однопетлевые уравнения ренормгруппы для случая симметрии SU(4)

Микроскопический гамильтониан двухдолинной электронной системы, например, для электронов в Si-МОП-транзисторе, не различает амплитуду электрон-электронного взаимодействия для электронов в одной и той же и в разных долинах. Это приводит к следующей структуре матрицы Γ_{ab} [40]:

$$\Gamma_{ab} = z\gamma_t, \quad (ab) \neq (00). \tag{9}$$

Напомним, что случай кулоновского взаимодействия соответствует соотношению $\Gamma_{00} = -z$. В этом случае однопетлевые уравнения (8) превращаются в хорошо известные уравнения [41]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dy} &= -\frac{2}{\pi}\left[1 + 15 f(\gamma_t)\right], \\ \frac{d\gamma_t}{dy} &= \frac{(1+\gamma_t)^2}{\pi\sigma_{xx}}, \\ \frac{d\ln z}{dy} &= \frac{15\gamma_t - 1}{\pi\sigma_{xx}}. \end{aligned} \tag{10}$$

Уравнения ренормгруппы (10) предсказывают немонотонное поведение σ_{xx} с L, которое в итоге становится металлического типа, т. е. проводимость растет с ростом L. Отметим, что симметричный случай SU(4), описываемый уравнениями (10), оказывается неустойчивым относительно общего ренормгруппового потока (8) [33].

2.5. Однопетлевые уравнения ренормгруппы при нарушении симметрии

SU(4)-симметрия в спиновом пространстве может быть разрушена внешними полями, например, магнитным полем, которое приводит к конечному зеемановскому расщеплению Δ_s. Аналогично симметрию понижает и конечное междолинное расщепление Δ_v. Оно контролируется приложенным упругим напряжением [42,43]. Этот масштаб энергии, который нарушает симметрию, может быть пересчитан в соответствующую длину

$$L_{s,v} = \left(\frac{\sigma_{xx}}{16z(1+\gamma_t)\Delta_{s,v}}\right)^{1/2}. \tag{11}$$

2.5.1. Нарушение SU(4)-симметрии из-за расщепления по спину

Предположим, что $\Delta_s \gg \Delta_v$ ($L_s \ll L_v$). Тогда для малых масштабов $l \ll L \ll L_s \ll L_v$ члены, нарушающие симметрию, иррелевантны и уравнения ренормгруппы имеют вид уравнений (10). На промежуточных масштабах $L_s \ll L \ll L_v$ нужно учесть влияние зеемановского расщепления. Оно приводит к появлению массы в триплетных диффузионных модах, соответствующих распространению электрон-дырочных пар с суммарной проекцией спина равной ± 1. Это приводит к тому, что на масштабах $L_s \ll L \ll L_v$ матричное поле Q имеет вид (остальные компоненты становятся массивными)

$$Q = \sum_{a=0}^{3} \sum_{b=0,3} t_{ab} Q_{ab}. \tag{12}$$

Соответствующие элементы матрицы электрон-электронного взаимодействия принимают вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{00} = -z, \quad \Gamma_{03} = z\tilde{\gamma}_t, \\ \Gamma_{a0} = \Gamma_{a3} = z\gamma_t, \quad a = 1,2,3. \end{aligned} \tag{13}$$

Подчеркнем, что, вообще говоря, $\tilde{\gamma}_t \neq \gamma_t$. Это можно объяснить следующим образом. Наличие ненулевой Δ_s позволяет различить электрон-электронное взаимодействие между электронами с одной и той же проекцией спина и с разными.

Модифицированная структура диффузионных мод и матрицы взаимодействий Γ_{ab} приводит к однопетлевым ренормгрупповым уравнениям следующего вида на масштабах $l \ll L_s \ll L \ll L_v$ [40]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dy} &= -\frac{2}{\pi}\left[1 + 6f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t)\right], \\ \frac{d\gamma_t}{dy} &= \frac{1+\gamma_t}{\pi\sigma_{xx}}(1 + 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \\ \frac{d\tilde{\gamma}_t}{dy} &= \frac{1+\tilde{\gamma}_t}{\pi\sigma_{xx}}(1 - 6\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \\ \frac{d\ln z}{dy} &= -\frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\left(1 - 6\gamma_t - \tilde{\gamma}_t\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Здесь ренормгрупповое время определено как $y = \ln(L/L_s)$. Поскольку при $L < L_s$ значение параметра Γ_{03} совпадает с Γ_{a3} ($a = 1,2,3$), уравнения ренормгруппы (14) должны иметь следующие начальные условия:

$$\tilde{\gamma}_t(0) = \gamma_t(0). \tag{15}$$

Уравнения (14) имеют неустойчивую фиксированную точку при $\tilde{\gamma}_t = 1$ и $\gamma_t = 0$. Однако она недостижима при начальных условиях (15), $\tilde{\gamma}_t(0) = \gamma_t(0) > 0$. Типичный ренормгрупповой поток для уравнений (14) течет к значениям $\tilde{\gamma}_t = -1$ и $\gamma_t = \infty$. В этом случае уравнения ренормгруппы становятся эквивалентны уравнениям для двух независимых долин, т. е. должны приводить к металлическому поведению проводимости.

2.5.2. Нарушение SU(4)-симметрии как спиновым, так и долинным расщеплениями

На самых больших масштабах $L \gg L_v \gg L_s \gg l$ начинает играть роль долинное расщепление Δ_v: Δ_v приводит к появлению массы у диффузонов с ненулевой проекцией долинного изоспина. Из-за этого элементы Q_{10}, Q_{13}, Q_{20}, Q_{23} матрицы Q выпадают из низкоэнергетического сектора теории. Таким образом, матричное поле Q принимает вид

$$Q = \sum_{a,b=0,3} t_{ab} Q_{ab}. \tag{16}$$

В этом режиме есть только четыре релевантных элемента матрицы взаимодействий:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{00} = -z, \quad \Gamma_{03} = z\tilde{\gamma}_t, \\ &\Gamma_{30} = z\gamma_t, \quad \Gamma_{33} = z\hat{\gamma}_t. \end{aligned} \tag{17}$$

Появление нового параметра $\hat{\gamma}_t$ можно объяснить следующим образом. В присутствии сильного спинового и междолинного расщеплений можно различить взаимодействие между электронами с равными и противоположными проекциями спинов и изоспинов. Однако уравнения ренормгруппы сохраняют величину $\Gamma_{33} - \Gamma_{30}$ [40]. При $L \sim L_v$ эта величина равна нулю, поэтому выполняется соотношение $\Gamma_{33} = \Gamma_{03}$ ($\hat{\gamma}_t = \gamma_t$) для $L \gg L_v \gg L_s$.

В итоге на масштабах $L \gg L_v \gg L_s$ уравнения ренормгруппы имеют вид [40]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dy} &= -\frac{2}{\pi}\left[1 + 2f(\gamma_t) + f(\tilde{\gamma}_t)\right], \\ \frac{d\gamma_t}{dy} &= \frac{1+\gamma_t}{\pi\sigma_{xx}}(1 - 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \\ \frac{d\tilde{\gamma}_t}{dy} &= \frac{1+\tilde{\gamma}_t}{\pi\sigma_{xx}}(1 - 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t), \\ \frac{d\ln z}{dy} &= -\frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\left(1 - 2\gamma_t - \tilde{\gamma}_t\right), \end{aligned} \tag{18}$$

где $y = \ln(L/L_v)$. Для уравнений (18) существует линия фиксированных точек $2\gamma_t + \tilde{\gamma}_t = 1$. Типичное поведение проводимости оказывается диэлектрическим, т. е. проводимость σ_{xx} уменьшается с увеличением L.

2.5.3. Нарушение SU(4)-симметрии в двойной квантовой яме

Другой механизм нарушения SU(4)-симметрии случается во взаимодействующей неупорядоченной двумерной электронной системе в двойной квантовой яме. В этом случае низкоэнергетическая эффективная теория — это та же НЛСМФ (2). Однако из-за наличия разного взаимодействия между электронами в одной и той же и в разных квантовых ямах элементы матрицы Γ_{ab} принимают вид [37]

$$\begin{aligned} &\Gamma_{00} = -z, \quad \Gamma_{10} = z\tilde{\gamma}_s, \quad \Gamma_{0a} = \Gamma_{1a} = z\gamma_t, \\ &\Gamma_{20} = \Gamma_{30} = \Gamma_{2a} = \Gamma_{3a} = z\gamma_v, \quad a = 1,2,3. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь $\tilde{\gamma}_s$, γ_t, γ_v — три безразмерных параметра, которые описывают межэлектронное взаимодействие в двойной квантовой яме. Первый параметр, $\tilde{\gamma}_s$, соответствует короткодействующему взаимодействию между диполями, составленными из электронов в разных квантовых ямах. Параметры γ_t и γ_v описывают взаимодействие электронов внутри и между ямами в триплетном частично-дырочном канале.

Однопетлевые уравнения (8) принимают следующий вид [37]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dy} &= -\frac{2}{\pi}\big[1 + f(\tilde{\gamma}_s) + 6f(\gamma_t) + 8f(\gamma_v)\big], \\ \frac{d\tilde{\gamma}_s}{dy} &= \frac{1+\tilde{\gamma}_s}{\pi\sigma_{xx}}\Big[1 - 6\gamma_t - \tilde{\gamma}_s + 8\gamma_v + 2h(\tilde{\gamma}_s, \gamma_v)\Big], \\ \frac{d\gamma_t}{dy} &= \frac{1+\gamma_t}{\pi\sigma_{xx}}\Big[1 - \tilde{\gamma}_s + 2\gamma_t + h(\gamma_t, \gamma_v)\Big], \\ \frac{d\gamma_v}{dy} &= \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\Big[(1+\tilde{\gamma}_s)(1-\gamma_v) + 2\gamma_v p(\gamma_t, \gamma_v)\Big], \\ \frac{d\ln z}{dy} &= \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\Big[\tilde{\gamma}_s + 6\gamma_t + 8\gamma_v - 1\Big], \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$h(u,v) = \frac{8v(u-v)}{1+v}, \quad p(u,v) = 1 - 3u + 4v.$$

Для случая двойной квантовой ямы начальные значения параметров взаимодействия удовлетворяют неравенствам $\gamma_t(0) \geqslant \gamma_v(0) \geqslant 0$ и $\gamma_t(0) \geqslant \tilde{\gamma}_s(0)$ [37]. В этом случае уравнения (20) сохраняют выполненными неравенства $\gamma_t \geqslant \gamma_v \geqslant 0$ и $\gamma_t \geqslant \tilde{\gamma}_s$. Также амплитуда взаимодействия γ_t растет с ростом L. Ренормгрупповой поток согласно уравнениям (20) течет в сторону $\gamma_v = 0$, $\tilde{\gamma}_s = -1$ и $\gamma_t = \infty$, что соответствует случаю невзаимодействующих двойных квантовых ям. В итоге зависимость проводимости от размера оказывается металлического типа.

3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ НА ГРЯЗНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИЗОЛЯТОРА

В этом разделе мы рассмотрим взаимодействующие электроны на грязной поверхности тонкой пленки топологического изолятора. Трехмерный топологический изолятор не имеет проводящих состояний в объеме, а имеет поверхностные состояния на уровне Ферми (см. [44, 45]). Такое необычное поведение является следствием спин-орбитальной связи. Свойства поверхностных состояний зависят от беспорядка на поверхности, который мы будем считать немагнитным (т. е. сохраняющим симметрию по отношению к обращению времени). Наличие симметрии по отношению к обращению времени и отсутствие симметрии по отношению к вращению в спиновом пространстве означает, что система относится к симплектическому классу Вигнера–Дайсона. Это означает, что низкоэнергетические диффузионные моды — это синглетные диффузоны и купероны. Последние приводят к слабо-антилокализационной поправке к проводимости в симплектическом ансамбле. Мы рассмотрим общую ситуацию, когда верхняя и нижняя поверхности пленки топологического изолятора имеют неравные концентрации носителей и нескоррелированные случайные потенциалы. В рассмотрении мы пренебрежем влиянием торцов пленки.

3.1. Нелинейная сигма-модель Финкельштейна

Низкоэнергетическое описание взаимодействующих электронов на грязной поверхности тонкой пленки трехмерного топологического изолятора строится на основе НЛСМФ, которая имеет вид (2). Теперь первый член в уравнении (2) описывает НЛСМ для двух копий (верхняя и нижняя поверхности пленки) невзаимодействующих электронов:

$$\mathcal{S}_\sigma = -\sum_{s=1,2} \frac{\sigma_{xx}^{(s)}}{16} \int d\mathbf{r}\, \mathrm{tr}(\nabla Q_s)^2. \qquad (21)$$

Здесь $\sigma_{xx}^{(s)}$ — проводимость на каждой из поверхностей; вообще говоря, $\sigma_{xx}^{(1)} \neq \sigma_{xx}^{(2)}$. Благодаря наличию симметрии по отношению к обращению времени, элементы $Q_{nm}^{\alpha\beta}$ — матрицы размером 2×2 в пространстве частица–дырка (в нем действуют матрицы Паули τ_j). Из-за наличия сильной спин-орбитальной связи у элемента $Q_{nm}^{\alpha\beta}$ нет матричной структуры в спиновом пространстве.

Вклад в действие НЛСМФ, связанный с электрон-электронным взаимодействием, имеет вид [46]

$$\mathcal{S}_F = -\pi T \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\alpha n; ss'} \frac{\Gamma_{ss'}}{4}\, \mathrm{tr}\, I_n^\alpha (1+\tau_y) Q_s(\mathbf{r}) \times \right.$$
$$\left. \times\, \mathrm{tr}\, I_{-n}^\alpha (1+\tau_y) Q_{s'}(\mathbf{r}) - 2 \sum_s z_s\, \mathrm{tr}\, \eta Q_s \right]. \qquad (22)$$

Здесь симметричная матрица

$$\Gamma_{ss'} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{pmatrix} \qquad (23)$$

описывает взаимодействие электронов на одной и той же поверхности (Γ_{11} и Γ_{22}) и взаимодействие электронов на разных поверхностях (Γ_{12}). Параметры $z_{1,2}$ описывают перенормировку частоты для каждой из поверхностей.

3.2. $\mathcal{F}$-инвариантность

Как уже было объяснено выше, глобальные повороты матрицы Q играют важную роль в теории. В данном случае есть две Q матрицы: одна на верхней поверхности и одна — на нижней. Поэтому имеются независимые вращения каждой из матриц:

$$Q_s(\mathbf{r}) \to W_s Q_s(\mathbf{r}) W_s^T, \qquad (24)$$

где

$$W_s = e^{-i\hat{\chi}_s^T} \frac{1+\tau_y}{2} + e^{i\hat{\chi}_s} \frac{1-\tau_y}{2},$$
$$\hat{\chi}_s = \sum_{\alpha,n} (\chi_s)_n^\alpha I_n^\alpha. \qquad (25)$$

Калибровочная симметрия $U(1)$ реализуется с помощью следующих преобразований [46]:

$$\mathrm{tr}\, I_n^\alpha \frac{1+\tau_y}{2} W_s Q W_s^T = \mathrm{tr}\, I_n^\alpha \frac{1+\tau_y}{2} Q - 2in(\chi_s)_n^\alpha,$$
$$\mathrm{tr}\, \eta W_s Q W_s^T = \mathrm{tr}\, \eta Q + 2\sum_{\alpha n} in(\chi_s)_{-n}^\alpha \times$$
$$\times\, \mathrm{tr}\, I_n^\alpha \frac{1+\tau_y}{2} Q - 2\sum_{\alpha n} n^2 (\chi_s)_n^\alpha (\chi_s)_{-n}^\alpha. \qquad (26)$$

Действие НЛСМФ инвариантно относительно глобальных вращений W_s при условии выполнения следующих соотношений:

$$z_s \delta_{ss'} + \Gamma_{ss'} = \mathrm{const} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}_{ss'}. \qquad (27)$$

Эти соотношения между параметрами взаимодействия выполняются в случае кулоновского взаимодействия. Как мы увидим ниже, условия (27) согласованы с ренормгрупповым потоком, т. е. есть три независимых ренормгрупповых инварианта:

$$z_1 + \Gamma_{11},\ z_2 + \Gamma_{22},\ \Gamma_{12}. \tag{28}$$

3.3. Однопетлевые уравнения ренормгруппы

Поскольку есть три ренормгрупповых инварианта (28), ренормгрупповой поток определяется только четырьмя независимыми параметрами. Мы выберем их равными $\sigma_{xx}^{(s)}$ и $\gamma_{ss} = \Gamma_{ss}/z_s$. Тогда однопетлевые уравнения ренормгруппы могут быть записаны в следующем виде [46]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{xx}^{(1)}}{dy} &= -\frac{2}{\pi} F\left(\gamma_{11}, \frac{\sigma_{xx}^{(1)}}{\sigma_{xx}^{(2)}}\right),\\
\frac{d\sigma_{xx}^{(2)}}{dy} &= -\frac{2}{\pi} F\left(\gamma_{22}, \frac{\sigma_{xx}^{(2)}}{\sigma_{xx}^{(1)}}\right),\\
\frac{d\gamma_{11}}{dy} &= -\frac{\gamma_{11}\,(1+\gamma_{11})}{\pi\sigma_{xx}^{(1)}},\\
\frac{d\gamma_{22}}{dy} &= -\frac{\gamma_{22}\,(1+\gamma_{22})}{\pi\sigma_{xx}^{(2)}},
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$F(\gamma, x) = \frac{1}{2} - \frac{(1+\gamma)\ln\left[(1+x)(1+\gamma)\right]}{x\left[1+\gamma\,(1+1/x)\right]}\,. \tag{30}$$

Уравнения (29) демонстрируют достаточно сложное поведение. Существует устойчивая фиксированная точка, в которой внутриповерхностное взаимодействие обращается в нуль, $\gamma_{11} = \gamma_{22} = 0$. Эта фиксированная точка соответствует сильно-связанным поверхностям (при этом межповерхностное взаимодействие Γ_{12} остается конечным) с суперметаллической проводимостью на каждой из поверхностей, $\sigma_{xx}^{(1)} = \sigma_{xx}^{(2)} = \infty$. Другая фиксированная точка с $\gamma_{11} = \gamma_{22} = -1$ соответствует несвязанным верхней и нижней поверхностям, $\Gamma_{12} = 0$. При этом проводимость имеет изоляторное поведение, т. е. $\sigma_{xx}^{(s)} \to 0$ при $L \to \infty$. Однако эта фиксированная точка оказывается неустойчивой по отношению к межповерхностному взаимодействию.

Отметим, что двумерная нелинейная сигма-модель для симплектического класса допускает существование топологического члена в эффективном действии. Этот топологический член является членом типа Весса – Зумино – Новикова – Виттена. Из-за его наличия в НЛСМФ существуют непертурбативные вклады в уравнения ренормгруппы [46]. В частности, в случае независимых поверхностей этот топологический вклад приводит к подавлению локализации и появлению критического состояния на грязной поверхности трехмерного топологического изолятора [47].

4. ДВУМЕРНАЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ СИСТЕМА СО СВЕРХПРОВОДЯЩИМИ КОРРЕЛЯЦИЯМИ

В этом разделе мы рассмотрим двумерную взаимодействующую неупорядоченную электронную систему в присутствии сверхпроводящих корреляций. Такая ситуация реализуется в большом количестве материалов, например, в таких сверхпроводящих пленках, как аморфный Bi и Pb [48, 49], MoC [50], MoGe [51], Ta [52], InO [53–56], NbN [57–59], TiN [60–63], FeSe [64–66]. Также двумерная сверхпроводимость была экспериментально обнаружена в таких новых материалах, как $LaAlO_3/SrTiO_3$ [67, 68], поверхность $SrTiO_3$ [69, 70], MoS_2 [71–73], поверхность LaSrCuO [74], и Li_xZrNCl [75–78]. НЛСМФ позволяет описать свойства этих систем при температурах выше температуры сверхпроводящего перехода T_c и оценить T_c при наличии беспорядка. Отметим, что НЛСМФ может быть использована и для описания двумерных грязных сверхпроводников при температурах ниже T_c (см. [79]).

4.1. Нелинейная сигма-модель Финкельштейна

В присутствии сверхпроводящих корреляций элементы $Q_{nm}^{\alpha\beta}$ — это матрицы 4×4 в пространстве частица–дырка и в спиновом пространстве, в которых действуют матрицы Паули τ_a и σ_b соответственно. Действие (2) должно быть расширено за счет дополнительного члена $\mathcal{S}_C$:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_\sigma + \mathcal{S}_F + \mathcal{S}_C. \tag{31}$$

Здесь первый член $\mathcal{S}_\sigma$ имеет точно такую же форму, как в уравнении (3). Второй член $\mathcal{S}_F$ описывает взаимодействие в канале частица–дырка. Оно дается уравнением (4) с матрицей взаимодействия следующего вида ($a = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{00} = \Gamma_{30} = \Gamma_s, \quad \Gamma_{0a} = \Gamma_{3a} = \Gamma_t,\\
&\Gamma_{10} = \Gamma_{20} = 0, \quad \Gamma_{1a} = \Gamma_{2a} = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Взаимодействие в канале частица–частица (куперовский канал) описывается третьим членом в правой части уравнения (31):

$$\mathcal{S}_C = -\frac{\pi T}{4}\Gamma_c \sum_{\alpha,n}\sum_{a=1,2}\int d\mathbf{r}\,\mathrm{Tr}\big[t_{a0}L_n^\alpha Q\big] \times \times \mathrm{Tr}\big[t_{a0}L_n^\alpha Q\big]. \quad (33)$$

Здесь мы ввели новую матрицу

$$(L_n^\alpha)_{km}^{\beta\gamma} = \delta_{k+m,n}\delta^{\alpha\beta}\delta^{\alpha\gamma}t_{00}. \quad (34)$$

Матричное поле Q удовлетворяет дополнительному условию (так называемому условию зарядового сопряжения)

$$Q^\dagger = C^T Q^T C, \quad C = it_{12}. \quad (35)$$

4.2. $\mathcal{F}$-инвариантность

$\mathcal{F}$-инвариантность действия НЛСМФ (31) реализуется поворотами (6), в которых $\hat\chi \sim t_{00}$. Правила преобразований при таких поворотах даются уравнениями (7) и соотношением

$$\mathrm{Tr}\,L_n^\alpha t_{a0}e^{i\hat\chi}Qe^{-i\hat\chi} = \mathrm{Tr}\,L_n^\alpha t_{a0}Q - - 8i\sum_{m>|n|}\left[(\chi_{a0})_m^\alpha - (\chi_{a0})_{-m}^\alpha\right]. \quad (36)$$

Используя уравнения (7) и (36), можно проверить, что действие (31) инвариантно относительно глобальных поворотов матрицы Q с $\hat\chi \sim t_{00}$ в случае кулоновского взаимодействия, $\Gamma_s = -z$.

4.3. Однопетлевые уравнения ренормгруппы

Наличие взаимодействия в куперовском канале усложняет вывод уравнений ренормгруппы [31]. Используя процедуру фонового поля, можно вывести следующие однопетлевые уравнения ренормгруппы [80]:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dy} = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{n-1}{2} + f(\gamma_s) + nf(\gamma_t) - \gamma_c\right), \quad (37a)$$

$$\frac{d\gamma_s}{dy} = -\frac{1+\gamma_s}{\pi\sigma_{xx}}\Big(\gamma_s + n\gamma_t + 2\gamma_c + 4\gamma_c^2\Big), \quad (37b)$$

$$\frac{d\gamma_t}{dy} = -\frac{1+\gamma_t}{\pi\sigma_{xx}}\Big(\gamma_s - (n-2)\gamma_t - - 2\gamma_c\big(1 + 2\gamma_t - 2\gamma_c\big)\Big), \quad (37c)$$

$$\frac{d\gamma_c}{dy} = -2\gamma_c^2 - \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\Big[(1+\gamma_c)(\gamma_s - n\gamma_t) - 2\gamma_c^2 + + 4\gamma_c^3 + 2n\gamma_c\Big(\gamma_t - \ln(1+\gamma_t)\Big)\Big], \quad (37d)$$

$$\frac{d\ln z}{dy} = \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\Big(\gamma_s + n\gamma_t + 2\gamma_c + 4\gamma_c^2\Big). \quad (37e)$$

Здесь $n = 3$ учитывает число триплетных диффузонов. В случае сильной спин-орбитальной связи триплетные диффузоны становятся массивными и нужно использовать уравнения (37a)–(37e) с $n = 0$ (в этом случае уравнение для $d\gamma_t/dy$ не имеет смысла).

Уравнения ренормгруппы (37a)–(37e) имеют богатую фазовую диаграмму. Ренормгрупповые уравнения имеют тенденцию к образованию ферромагнитной фазы ($\gamma_t = \infty$), фазы изолятора ($\sigma_{xx} = 0$) и сверхпроводящей фазы ($\gamma_c = -\infty$). Однако уравнения (37a)–(37e) становятся неконтролируемыми вблизи этих фиксированных точек. Например, сравнение первого и второго членов в правой части уравнения (37d) приводит к критерию применимости однопетлевых уравнений для описания сверхпроводящей неустойчивости: $|\gamma_c|/\pi\sigma_{xx} \ll 1$.

В случае короткодействующего слабого взаимодействия, т. е. в случае $|\gamma_{s0}|, |\gamma_{t0}|, |\gamma_{c0}| \ll 1$, уравнения (37a)–(37e) предсказывают усиление T_c несмотря на наличие беспорядка [81]. В этом случае анализ сверхпроводящей неустойчивости на основе уравнений (37a)–(37e) эквивалентен анализу на основе уравнения самосогласования для сверхпроводящего параметра порядка [82].

Для $n = 0$ и в случае кулоновского взаимодействия, $\gamma_s = -1$, уравнения ренормгруппы (37a)–(37e) имеют устойчивую фиксированную точку при $\gamma_c = 1/2$ и $\sigma_{xx} = 3/\pi$. Несмотря на то что положение этой фиксированной точки находится на границе применимости однопетлевых уравнений ренормгруппы, существование симплектического критического металла может быть общим свойством НЛСМФ.

Отметим, что в низшем порядке по γ_c уравнения (37a)–(37e) совпадают с оригинальным результатом Финкельштейна [29]. Уравнения (37a)–(37e) отличаются от соответствующих уравнений из работы [83] для случая наличия симметрий по отношению к вращению в спиновом пространстве и обращению времени ($n = 3$). Уравнения ренормгруппы из работы

[83] несовместны с условием сохранения числа частиц[1)].

5. ДВУМЕРНАЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩАЯ НЕУПОРЯДОЧЕННАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ СИСТЕМА В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В этом разделе мы рассмотрим двумерную взаимодействующую неупорядоченную электронную систему в сильном магнитном поле. Сильное магнитное поле приводит к двум эффектам. Во-первых, оно нарушает симметрию по отношению к обращению времени и поляризует спины электронов. Поэтому матрица Q не имеет матричной структуры в спиновом пространстве и пространстве частица–дырка (нет куперонов). Во-вторых, наличие магнитного поля, а значит, наличие ненулевой холловской проводимости σ_{xy}, приводит к возможности добавить к действию НЛСМФ тета-член Пруискена.

5.1. Нелинейная сигма-модель Финкельштейна

Низкоэнергетическое эффективное действие для двумерной неупорядоченной электронной системы в сильном перпендикулярном магнитном поле имеет следующий вид [85, 86]:

$$\mathcal{S}_\sigma = -\frac{\sigma_{xx}}{8}\int d\mathbf{r}\,\mathrm{tr}(\nabla Q)^2 + \\ + \frac{\sigma_{xy}}{8}\int d\mathbf{r}\,\mathrm{tr}\,\epsilon_{jk} Q\nabla_j Q\nabla_k Q. \quad (38)$$

[1)] Для экспертов отметим следующие различия между уравнениями (37a)–(37e) и уравнениями из работы [83]. Во-первых, правая часть уравнения для γ_s (см. уравнение (A12) из [83]) не пропорциональна множителю $1+\gamma_s$, в отличие от уравнения (37b). Это означает, что кулоновское взаимодействие, $\gamma_s = -1$, не является фиксированной точкой уравнений ренормгруппы из работы [83] в противоречие с $\mathcal{F}$-инвариантностью действия НЛСМФ. Во-вторых, уравнение для γ_t из работы [83] не содержит член, пропорциональный $t\gamma_c^2$, в отличие от уравнения (37b). Наконец, уравнение для γ_c в работе [83] содержит дополнительный член $t\gamma_c \ln(1+\gamma_s)$, который отсутствует в уравнении (37d). Аналогичный член был найден Белицем и Киркпатриком (см. уравнение (6.8g) в [31]). Этот член критиковался Финкельштейном в работе [84]: его появление было связано им с нарушением калибровочной инвариантности при вычислении перенормировки действия НЛСМФ. Действительно, такие члены, расходящиеся для случая кулоновского взаимодействия, $\gamma_s = -1$, не могут появляться в процессе перенормировки для $\mathcal{F}$-инвариантных операторов, в том числе в части действия S_C.

Здесь ϵ_{jk} — антисимметричный тензор второго ранга, $\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = 1$. Напомним, что последний член в правой части уравнения (38) пропорционален топологическому инварианту, принимающему целочисленные значения. Он может быть записан как граничный член. В присутствии электрон-электронного взаимодействия эффективное действие включает член Финкельштейна:

$$\mathcal{S}_F = -\pi T \int d\mathbf{r}\, \times \\ \times \left[\sum_{\alpha n} \Gamma_s\,\mathrm{tr}\, I_n^\alpha Q(\mathbf{r})\,\mathrm{tr}\, I_{-n}^\alpha Q(\mathbf{r}) - 4z\,\mathrm{tr}\,\eta Q\right]. \quad (39)$$

Как и выше, в случае кулоновского взаимодействия выполняется соотношение $\Gamma_s = -z$.

5.2. $\mathcal{F}$-инвариантность

$\mathcal{F}$-инвариантность действия НЛСМФ (31) реализуется поворотами (6) с $\hat\chi = \sum_{\alpha n}\chi_n^\alpha I_n^\alpha$ (здесь χ_n^α не имеет матричной структуры). Преобразования при поворотах имеют вид, аналогичный (7):

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\, I_n^\alpha e^{i\hat\chi} Q e^{-i\hat\chi} &= \mathrm{tr}\, I_n^\alpha t_{ab} Q + 2in\chi_{-n}^\alpha\,, \\ \mathrm{tr}\,\eta e^{i\hat\chi} Q e^{-i\hat\chi} &= \mathrm{tr}\,\eta Q + 2\sum_{\alpha n} in\chi_n^\alpha\,\mathrm{tr}\, I_n^\alpha Q - \\ &\quad - 4\sum_{\alpha n; ab} n^2 \chi_n^\alpha \chi_{-n}^\alpha. \end{aligned} \quad (40)$$

Эти соотношения гарантируют $\mathcal{F}$-инвариантность в случае кулоновского взаимодействия, $\Gamma_s = -z$.

5.3. Двухпетлевые уравнения ренормгруппы

Из-за простой матричной структуры Q в случае сильного магнитного поля пертурбативный анализ действия НЛСМФ может быть проведен в двухпетлевом приближении (второй порядок по $1/\sigma_{xx}$). К настоящему времени получены следующие результаты [87–89]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{xx}}{dy} &= -\frac{2f(\gamma_s)}{\pi} - \frac{4A(\gamma_s)}{\pi^2\sigma_{xx}}, \\ \frac{d\gamma_s}{dy} &= -\frac{\gamma_s(1+\gamma_s)}{\pi\sigma_{xx}} \times \\ &\quad \times \left[1 + \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\Big(c(\gamma_s) + 2\,\mathrm{li}_2(-\gamma_s)\Big)\right], \\ \frac{d\ln z}{dy} &= \frac{\gamma_s}{\pi\sigma_{xx}}\left[1 + \frac{1}{\pi\sigma_{xx}}\Big(c(\gamma_s) + 2\,\mathrm{li}_2(-\gamma_s)\Big)\right]. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь функция $c(\gamma)$ определена как

$$c(\gamma) = 2 + \frac{2+\gamma}{\gamma}\,\mathrm{li}_2(-\gamma) + \frac{1+\gamma}{2\gamma^2}\ln^2(1+\gamma). \quad (42)$$

Значение функции $A(\gamma_s)$ известно только для двух точек: $\gamma_s = 0$ (невзаимодействующие электроны) и $\gamma_s = -1$ (кулоновское взаимодействие). Для $\gamma_s = 0$ известно, что $A(0) = 1/8$ [90,91]. В случае кулоновского взаимодействия значение $A(\gamma_s)$ имеет вид [88]

$$A(-1) = \frac{1}{16}\left[\frac{139}{6} + \frac{(\pi^2-18)^2}{12} + \frac{19}{2}\zeta(3) + 16\mathcal{G} - \right. \\ - \left(44 - \frac{\pi^2}{2} + 7\zeta(3)\right)\ln 2 + \left(16 + \frac{\pi^2}{3}\right)\ln^2 2 - \\ \left. - \frac{1}{3}\ln^4 2 - 8\,\mathrm{li}_4\left(\frac{1}{2}\right)\right] \approx 1.64, \quad (43)$$

где $\mathcal{G} \approx 0.915$ — постоянная Каталана, $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана, $\mathrm{li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^n$ — полилогарифм.

Уравнения ренормгруппы (41) предсказывают, что фиксированная точка при $\gamma_s = 0$, соответствующая невзаимодействующим электронам, является устойчивой. Фиксированная точка при $\gamma_s = -1$, которая соответствует случаю кулоновского взаимодействия, является неустойчивой. В обоих случаях зависимость проводимости от L имеет изоляторный тип.

5.4. Непертурбативные уравнения ренормгруппы

Наличие тета-члена (38) в действии НЛСМФ приводит к существованию топологических возбуждений — инстантонов. Они приводят к появлению непертурбативных вкладов в уравнения ренормгруппы [92]:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\sigma_{xx}}{dy}\right]_{NP} &= -D(\gamma_s)\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}}\cos(2\pi\sigma_{xy}), \\ \left[\frac{d\sigma_{xy}}{dy}\right]_{NP} &= -D(\gamma_s)\sigma_{xx}^2 e^{-2\pi\sigma_{xx}}\sin(2\pi\sigma_{xy}), \\ \left[\frac{d\gamma_s}{dy}\right]_{NP} &= -\gamma_s(1+\gamma_s)D_z(\gamma_s)\sigma_{xx} \times \\ &\quad \times e^{-2\pi\sigma_{xx}}\cos(2\pi\sigma_{xy}), \\ \left[\frac{d\ln z}{dy}\right]_{NP} &= \gamma_s D_z(\gamma_s)\sigma_{xx}e^{-2\pi\sigma_{xx}}\cos(2\pi\sigma_{xy}). \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь $D(\gamma) = 4\pi\tilde{D}(\gamma)\exp\left[1 - 4\gamma_E f(\gamma)\right]$, где $\gamma_E \approx 0.577$ — постоянная Эйлера и

$$\ln\tilde{D}(\gamma) = 2\frac{1+\gamma}{\gamma}\left\{\left[\psi\left(\frac{1+3\gamma}{\gamma}\right) + \psi\left(\frac{1}{\gamma}\right) - 1\right] \times \right. \\ \left. \times \ln(1+\gamma) - g\left(-\frac{1+\gamma}{\gamma}\right) - g\left(\frac{1}{\gamma}\right) + \frac{2\gamma^2\ln 2}{2\gamma+1}\right\}. \quad (45)$$

Функция $\psi(z)$ — это дигамма-функция Эйлера и $g(z)$ определена как

$$g(z) = 2z^2\sum_{J=0}^{\infty}\frac{\ln J}{J(J^2-z^2)}. \quad (46)$$

Функция $D_z(\gamma) = D(\gamma)m(\gamma)$, где

$$m(\gamma) = 2\frac{1+\gamma}{\gamma}\exp\left(-\frac{2\ln(1+\gamma)}{\gamma}\right) \times \\ \times \int_0^{\gamma} ds(1+s)^{-2+2/s}. \quad (47)$$

Подчеркнем, что, хотя различные вклады в функцию $\tilde{D}(\gamma)$ имеют полюсы на интервале $-1 < \gamma < 0$, функция $\tilde{D}(\gamma)$ не имеет сингулярностей.

Непертурбативный вклад в уравнение ренормгруппы для $d\sigma_{xx}/dy$ имеет противоположный знак для случая полуцелого значения σ_{xy}. Соревнование пертурбативного и непертурбативного вкладов при полуцелом значении σ_{xy} может приводить к существованию нетривиальной фиксированной точки при некотором значении σ_{xx}, как для случая невзаимодействующих электронов, $\gamma_s = 0$, так и для случая электронов с кулоновским взаимодействием, $\gamma_s = -1$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе представлен обзор недавних результатов, полученных в рамках подхода нелинейной сигма-модели Финкельштейна для описания взаимодействующих неупорядоченных электронных систем. Этот теоретико-полевой метод позволил получить ряд интересных физических результатов.

1. В случае двумерной электронной системы с двумя долинами (разд. 2) НЛСМФ позволила объяснить необычное температурное поведение сопротивления при наличии спинового и долинного расщеплений в экспериментах на Si-МОП-транзисторах [93–95] и в n-AlAs квантовых ямах [42,43], а также в $\mathrm{Al}_x\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{As}/\mathrm{GaAs}/\mathrm{Al}_x\mathrm{Ga}_{1-x}\mathrm{As}$ двойных квантовых ямах [96].

2. В случае двумерной электронной системы на поверхности трехмерного топологического изолятора подход НЛСМФ позволил разработать микроскопическую теорию электронного транспорта и предсказать неустойчивость критического поверхностного состояния относительно межповерхностного электрон-электронного взаимодействия.

3. В случае двумерной электронной системы со сверхпроводящими корреляциями НЛСМФ позволяет продемонстрировать существование перехода сверхпроводник–изолятор в рамках так называемого фермионного механизма, а также предсказать режим усиления температуры сверхпроводящего перехода при наличии беспорядка в случае отсутствия кулоновского взаимодействия.

4. В случае двумерной электронной системы в сильном магнитном поле НЛСМФ позволяет подтвердить идею об отсутствии перехода Андерсона (на пертурбативном уровне) в присутствии электрон-электронного взаимодействия. Также она позволяет аккуратно учесть инстантонные эффекты, ответственные за существование целочисленного эффекта Холла, в случае наличия электрон-электронного взаимодействия.

Дальнейшее развитие результатов, представленных в этом обзоре, может идти в следующих направлениях.

1. Уточнение известных уравнений ренормгруппы в двухпетлевом приближении. Известные двухпетлевые результаты указывают на сложную математическую структуру НЛСМФ, которая усложняет получение результатов в следующих порядках петлевого разложения. Отметим, что для НЛСМФ пока не удалось придумать аналог параметра «большое-N», который позволил бы решить задачу точно. К сожалению, число долин не является таким параметром, как показывают двухпетлевые вычисления работы [97].

2. В этом обзоре НЛСМФ была использована для описания неупорядоченных электронных систем в присутствии или в отсутствие стандартных симметрий по классификации Вигнера – Дайсона. Другими словами, рассмотренная НЛСМФ является расширением НЛСМ для классов A, AI, и AII на случай наличия взаимодействия. Отметим, что НЛСМ в отсутствие взаимодействия для других семи классов симметрии [98, 99] может быть расширена на случай наличия электрон-электронного взаимодействия [100–102].

3. Как известно, в НЛСМ имеется богатое и нетривиальное поведение размерностей операторов (без пространственных производных и с ними) [103–105], которое приводит к мультифрактальному поведению волновых функций [106] и локальной плотности состояний [107], а также к флуктуациям кондактанса [108, 109]. Недавно мультифрактальное поведение локальной плотности состояний (см. [110]) и нетривиальное поведение размерностей операторов без пространственных производных [111] были изучены для НЛСМФ. Также недавно были доказаны точные симметрийные соотношения между размерностями таких операторов в НЛСМ для невзаимодействующих электронов [112]. Вообще говоря, такие точные симметрийные соотношения для размерностей операторов должны существовать и при наличии электрон-электронного взаимодействия, т. е. для НЛСМФ.

Более чем 35-летнее развитие нелинейной сигма-модели Финкельштейна показывает, что эта внутренне согласованная теория является удобным аналитическим инструментом для изучения взаимного влияния локализации и взаимодействия в неупорядоченных электронных системах.

Благодарности. Автор выражает благодарность соавторам М. Баранову, И. Горному, Э. Кёнигу, А. Левченко, А. Мирлину, П. Островскому, И. Протопопову, А. Пруискену, К. Тихонову, Н. Щелкачеву за плодотворную совместную работу над задачами, представленными в обзоре. Также автор благодарит А. Германенко, Д. Князева, А. Кунцевича, Д. де Ланга, Г. Минькова, Л. Пономаренко, В. Пудалова, А. Шерстобитова за подробные обсуждения экспериментальных результатов. Автор благодарен А. Иоселевичу, Ю. Махлину, М. Скворцову, М. Фейгельману, А. Финкельштейну, Я. Фоминову и остальным сотрудникам ИТФ им. Л. Д. Ландау за полезные обсуждения и комментарии.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).

2. E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).

3. L. P. Gorkov, A. I. Larkin, and D. E. Khmel'nitskii, JETP Lett. **30**, 228 (1979).

4. E. Abrahams and T. V. Ramakrishnan, J. Non-Cryst. Sol. **35**, 15 (1980).

5. D. J. Amit, *Field Theory, Renormalization Group, and Critical Phenomena*, World Sci. (1984).

6. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford Univ. Press, Oxford (1989).

7. F. Wegner, Z. Phys. B **35**, 207 (1979).

8. L. Schäfer and F. Wegner, Z. Phys. B **38**, 113 (1980).

9. K. B. Efetov, A. I. Larkin, and D. E. Kheml'nitskii, JETP **52**, 568 (1980).

10. K. Jüngling and R. Oppermann, Z. Phys. B **38**, 93 (1980).

11. A. J. McKane and M. Stone, Ann. Phys. (N.Y.) **131**, 36 (1981).

12. K. B. Efetov, JETP **55**, 514 (1982).

13. A. D. Mirlin and F. Evers, Rev. Mod. Phys. **80**, 1355 (2008).

14. *Special Issue*: *50 Years of Anderson Localization*, Int. J. Mod. Phys. B **24**, Nos. 12&13 (2010).

15. D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **39**, 1167 (1977).

16. E. Abrahams, P. W. Anderson, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **43**, 718 (1979).

17. B. L. Altshuler, A. G. Aronov, and D. E. Khmelnitsky, J. Phys. C **15**, 7367 (1982).

18. B. L. Altshuler and A. G. Aronov, JETP **50**, 968 (1979).

19. G. Zala, B. N. Narozhny, and I. L. Aleiner, Phys. Rev. B **64**, 214204 (2001).

20. S. V. Kravchenko, G. V. Kravchenko, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov, and M. D'Iorio, Phys. Rev. B **50**, 8039 (1994).

21. S. V. Kravchenko, W. E. Mason, G. E. Bowker, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov, and M. D'Iorio, Phys. Rev. B **51**, 7038 (1995).

22. W. L. McMillan, Phys. Rev. B **24**, 2739 (1981).

23. A. M. Finkelstein, JETP **57**, 97 (1983).

24. A. M. Finkelstein, JETP Lett. **37**, 517 (1983).

25. A. M. Finkelstein, JETP Lett. **40**, 796 (1984).

26. A. M. Finkelstein, JETP **59**, 212 (1984).

27. C. Castellani, C. Di Castro, P. A. Lee, and M. Ma, Phys. Rev. B **30**, 527 (1984).

28. C. Castellani, C. Di Castro, P. A. Lee, M. Ma, S. Sorella, and E. Tabet, Phys. Rev. B **30**, 1596 (1984).

29. A. M. Finkelstein, Z. Phys. B **56**, 189 (1984).

30. A. M. Finkelstein, *Electron Liquid in Disordered Conductors*, Vol. 14 of Soviet Scientific Reviews, ed. by I. M. Khalatnikov, Harwood Acad. Publ., London (1990).

31. D. Belitz and T. R. Kirkpatrick, Rev. Mod. Phys. **66**, 261 (1994).

32. A. Kamenev and A. Levchenko, Adv. Phys. **58**, 197 (2009).

33. I. S. Burmistrov, in *Strongly Correlated Electrons in Two Dimensions*, ed. S. V. Kravchenko, Pan Stanford Publ. (2017), pp. 65–116; arXiv:1609.07874.

34. A. Punnoose, Phys. Rev. B **81**, 035306 (2010).

35. A. Punnoose, Phys. Rev. B **82**, 115310 (2010).

36. C. Castellani and C. Di Castro, Phys. Rev. B **34**, 5935 (1986).

37. I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and K. S. Tikhonov, Phys. Rev. B **84**, 075338 (2011).

38. A. M. M. Pruisken, M. A. Baranov, and B. Škorić, Phys. Rev. B **60**, 16807 (1999).

39. A. Kamenev and A. Andreev, Phys. Rev. B **60**, 2218 (1999).

40. I. S. Burmistrov and N. M. Chtchelkatchev, Phys. Rev. B **77**, 195319 (2008).

41. A. Punnoose and A. M. Finkelstein, Phys. Rev. Lett. **88**, 016802 (2001).

42. O. Gunawan, Y. P. Shkolnikov, K. Vakili, T. Gokmen, E. P. De Poortere, and M. Shayegan, Phys. Rev. Lett. **97**, 186404 (2006).

43. O. Gunawan, T. Gokmen, K. Vakili, M. Padmanabhan, E. P. De Poortere, and M. Shayegan, Nature Phys. **3**, 388 (2007).

44. M. Z. Hasan and C. L. Kane, Rev. Mod. Phys. **82**, 3045 (2010).

45. X.-L. Qi and S.-C. Zhang, Rev. Mod. Phys. **83**, 1057 (2011).

46. E. J. Koenig, P. M. Ostrovsky, I. V. Protopopov, I. V. Gornyi, I. S. Burmistrov, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **88**, 035106 (2013)

47. P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. **105**, 036803 (2010).

48. D. B. Haviland, Y. Liu, and A. M. Goldman, Phys. Rev. Lett. **62**, 2180 (1989).

49. K. A. Parendo, K. H. Sarwa, B. Tan, A. Bhattacharya, M. Eblen-Zayas, N. E. Staley, and A. M. Goldman, Phys. Rev. Lett. **94**, 197004 (2005).

50. S. J. Lee and J. B. Ketterson, Phys. Rev. Lett. **64**, 3078 (1990).

51. A. Yazdani and A. Kapitulnik, Phys. Rev. Lett. **74**, 3037 (1995).

52. Y. Qin, C. L. Vicente, and J. Yoon, Phys. Rev. B **73**, 100505(R) (2006).

53. A. F. Hebard and M. A. Paalanen, Phys. Rev. Lett. **65**, 927 (1990).

54. G. Sambandamurthy, L. W. Engel, A. Johansson, and D. Shahar, Phys. Rev. Lett. **92**, 107005 (2004); ibid **94**, 017003 (2005).

55. D. Sherman, G. Kopnov, D. Shahar, and A. Frydman, Phys. Rev. Lett. **108**, 177006 (2012).

56. B. Sacépé, T. Dubouchet, C. Chapelier, M. Sanquer, M. Ovadia, D. Shahar, M. Feigel'man, and L. Ioffe, Nature Phys. **7**, 239 (2011).

57. M. Mondal, A. Kamlapure, M. Chand, G. Saraswat, S. Kumar, J. Jesudasan, L. Benfatto, V. Tripathi, and P. Raychaudhuri, Phys. Rev. Lett. **106**, 047001 (2011).

58. M. Chand, G. Saraswat, A. Kamlapure, M. Mondal, S. Kumar, J. Jesudasan, V. Bagwe, L. Benfatto, V. Tripathi, and P. Raychaudhuri, Phys. Rev. B **85**, 014508 (2012).

59. G. Lemarié, A. Kamlapure, D. Bucheli, L. Benfatto, J. Lorenzana, G. Seibold, S. C. Ganguli, P. Raychaudhuri, and C. Castellani, Phys. Rev. B **87**, 184509 (2013).

60. T. I. Baturina, A. Y. Mironov, V. M. Vinokur, M. R. Baklanov, and C. Strunk, Phys. Rev. Lett. **99**, 257003 (2007).

61. B. Sacépé, C. Chapelier, T. I. Baturina, V. M. Vinokur, M. R. Baklanov, and M. Sanquer, Phys. Rev. Lett. **101**, 157006 (2008).

62. B. Sacépé, C. Chapelier, T. I. Baturina, V. M. Vinokur, M. R. Baklanov, and M. Sanquer, Nat. Commun. **1**, 140 (2010).

63. T. I. Baturina, S. V. Postolova, A. Yu. Mironov, A. Glatz, M. R. Baklanov, and V. M. Vinokur, Europhys. Lett. **97**, 17012 (2012).

64. R. Schneider, A. G. Zaitsev, D. Fuchs, and H. von Löhneysen, Phys. Rev. Lett. **108**, 257003 (2012).

65. R. Schneider, A. G. Zaitsev, D. Fuchs, and H. von Löhneysen, J. Low Temp. Phys **178**, 118 (2014).

66. R. Schneider, A. G. Zaitsev, D. Fuchs, and H. von Löhneysen, J. Phys.: Condens. Matter **26**, 455701 (2014); Eur. Phys. J. B **88**, 14 (2015).

67. A. D. Caviglia, S. Gariglio, N. Reyren, D. Jaccard, T. Schneider, M. Gabay, S. Thiel, G. Hammerl, J. Mannhart, and J.-M. Triscone, Nature **456**, 624 (2008).

68. J. A. Sulpizio, S. Ilani, P. Irvin, and J. Levy, Annu. Rev. Mater. Res. **44**, 117 (2014).

69. M. Kim, Y. Kozuka, C. Bell, Y. Hikita, and H. Y. Hwang, Phys. Rev. B **86**, 085121 (2012).

70. K. Ueno, T. Nojima, S. Yonezawa, M. Kawasaki, Y. Iwasa, and Y. Maeno, Phys. Rev. B **89**, 020508(R) (2014).

71. J. T. Ye, Y. J. Zhang, R. Akashi, M. S. Bahramy, R. Arita, and Y. Iwasa, Science **338**, 1193 (2012).

72. J. T. Ye, Y. J. Zhang, M. Yoshida, Y. Saito, and Y. Iwasa, J. Supercond. Nov. Magn. **27**, 981 (2014).

73. K. Taniguchi, A. Matsumoto, H. Shimotani, and H. Takagi, Appl. Phys. Lett. **101**, 042603 (2012).

74. A. T. Bollinger, G. Dubuis, J. Yoon, D. Pavuna, J. Misewich, and I. Bozovic, Nature **472**, 458 (2011).

75. Y. Taguchi, A. Kitora, and Y. Iwasa, Phys. Rev. Lett. **97**, 107001 (2006).

76. Y. Taguchi, T. Kawabata, T. Takano, A. Kitora, K. Kato, M. Takata, and Y. Iwasa, Phys. Rev. B **76**, 064508 (2007).

77. Y. Kasahara, T. Kishiume, T. Takano, K. Kobayashi, E. Matsuoka, H. Onodera, K. Kuroki, Y. Taguchi, and Y. Iwasa, Phys. Rev. Lett. **103**, 077004 (2009).

78. H. Kotegawa, S. Oshiro, Y. Shimizu, H. Tou, Y. Kasahara, T. Kishiume, Y. Taguchi, and Y. Iwasa, Phys. Rev. B **90**, 020503(R) (2014).

79. E. J. Koenig, A. Levchenko, I. V. Protopopov, I. V. Gornyi, I. S. Burmistrov, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **92**, 214503 (2015).

80. I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. B **92**, 014506 (2015).

81. I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. **117**, 017002 (2012).

82. M. V. Feigel'man, L. B. Ioffe, V. E. Kravtsov, and E. A. Yuzbashyan, Phys. Rev. Lett. **98**, 027001 (2007).

83. L. Dell'Anna, Phys. Rev. B **88**, 195139 (2013).

84. A. M. Finkelstein, Physica B **197**, 636 (1994).

85. H. Levine, S. B. Libby, and A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. Lett. **51**, 1915 (1983).

86. A. M. M. Pruisken, Nucl. Phys. B **235**, 277 (1984).

87. M. A. Baranov, A. M. M. Pruisken, and B. Škorić, Phys. Rev. B **60**, 16821 (1999).

88. M. A. Baranov, I. S. Burmistrov, and A. M. M. Pruisken, Phys. Rev. B **66**, 075317 (2002).

89. I. S. Burmistrov, Ann. Phys. (N.Y.) **364**, 120 (2016).

90. S. Hikami, Phys. Lett. B **98**, 208 (1981).

91. P. Ostrovsky, T. Nakayama, K. A. Muttalib, and P. Wölfle, New J. Phys. **15**, 055010 (2013).

92. A. M. M. Pruisken and I. S. Burmistrov, Ann. of Phys. (N.Y.) **322**, 1265 (2007).

93. D. Simonian, S. V. Kravchenko, M. P. Sarachik, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. **79**, 2304 (1997).

94. S. A. Vitkalov, K. James, B. N. Narozhny, M. P. Sarachik, and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B **67**, 113310 (2003).

95. V. M. Pudalov, M. E. Gershenson, H. Kojima, G. Brunthaler, A. Prinz, and G. Bauer, Phys. Rev. Lett. **91**, 126403 (2003).

96. G. M. Minkov, A. V. Germanenko, O. E. Rut, A. A. Sherstobitov, A. K. Bakarov, and D. V. Dmitriev, Phys. Rev. B **84**, 075337 (2011).

97. A. Punnoose and A. M. Finkelstein, Science **310**, 289 (2005).

98. M. R. Zirnbauer, J. Math. Phys. **37**, 4986 (1996).

99. A. Altland and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **55**, 1142 (1997).

100. L. Dell'Anna, Nucl. Phys. B **758**, 255 (2006).

101. L. Dell'Anna, Ann. der Phys. **529**, 1600317 (2017).

102. Y. Liao, A. Levchenko, and M. S. Foster, Ann. Phys. (N.Y.) **386**, 97 (2017).

103. F. Wegner, Z. Phys. B **36**, 209 (1980).

104. D. Höf and F. Wegner, Nucl. Phys. B **275**, 561 (1986).

105. F. Wegner, Nucl. Phys. B **280**, 193 (1987); ibid **280**, 210 (1987).

106. C. Castellani and L. Peliti, J. Phys. A **19**, L429 (1986).

107. I. V. Lerner, Phys. Lett. A **133**, 253 (1988).

108. B. L. Al'tshuler, V. E. Kravtsov, and I. V. Lerner, JETP **64**, 1352 (1986) [Sov. Phys. ZhETF **91**, 2276 (1986)].

109. V. E. Kravtsov, I. V. Lerner, and V. I. Yudson, JETP **67**, 1441 (1988) [Sov. Phys. ZhETF **94**, 255 (1988)].

110. I. S. Burmistrov, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin, Pis'ma v ZhETF **106**, 252 (2017).

111. E. V. Repin and I. S. Burmistrov, Phys. Rev. B **94**, 245442 (2016).

112. I. A. Gruzberg, A. D. Mirlin, and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. B **87**, 125144 (2013).