

# КВАНТОВАЯ ОПЕРАЦИЯ ДЛЯ МАЙОРАНОВСКИХ КУБИТОВ В КУБИТНЫХ ЦЕПОЧКАХ БЕЗ СОЗДАНИЯ ЗАПУТАННОСТИ СО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Ю. Махлин <sup>a,b\*</sup>, Ш. Бакенс <sup>c</sup>, А. Шнирман <sup>c,d</sup>

<sup>a</sup> Международная лаборатория физики конденсированного состояния,  
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
101000, Москва, Россия

<sup>b</sup> Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

<sup>c</sup> Institut für Theorie der Kondensierten Materie, Karlsruhe Institute of Technology  
D-76131, Karlsruhe, Germany

<sup>d</sup> Institute of Nanotechnology, Karlsruhe Institute of Technology  
D-76344, Eggenstein-Leopoldshafen, Germany

Поступила в редакцию 6 мая 2019 г.,  
после переработки 6 мая 2019 г.  
Принята к публикации 8 мая 2019 г.

Рассматриваются квантовые логические операции над майорановскими кубитами, реализованными в цепочках обычных кубитов, спинов или псевдоспинов. Показано, что двухкубитную операцию можно реализовать при помощи локальных управляющих сигналов с использованием вспомогательного спина в геометрии Т-образного перекрестка. При этом состояние вспомогательного спина в результате операции остается незапутанным (нескоррелированным) с кубитами. При помощи построенного набора симметрий задачи полностью определена получаемая двухкубитная операция. Продемонстрирована характерная для топологических квантовых вычислений устойчивость этой операции по отношению к неточностям в управляющих импульсах и беспорядку.

*Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 100-летию И. М. Халатникова*

DOI: 10.1134/S0044451019100213

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Майорановские степени свободы в конденсированных средах активно изучаются в настоящее время [1, 2]. Благодаря их необычным физическим свойствам они могут служить основой для топологических квантовых вычислений [3–5]. Майорановские моды могут возникать на краю одномерных систем в топологической фазе в согласии с соответствием объем–граница. Для реализации не только топологически защищенных квантовых битов для хранения информации, но и топологически защищенных квантовых логических операций было предложено

но [3] использовать операцию «квантового переплетения» (braiding) майорановских фермионов [6, 7]. Была предложена [8, 9] реализация операции переплетения в двумерных сетках из одномерных проволок, основным звеном при этом является Т-образный перекресток (Т-контакт).

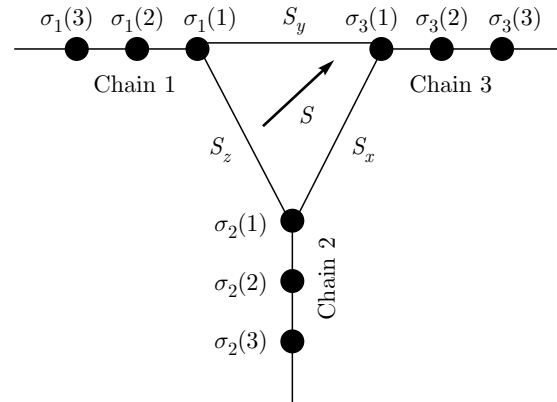
Преобразование Йордана–Вигнера [10] связывает фермионные и спиновые степени свободы в одномерной геометрии. Его можно обобщить на сетки из одномерных проволок, ср. [11–13]. По этой причине наблюдение фермионных явлений в системах спинов или кубитов привлекает внимание исследователей. Недавно было предложено аналоговое моделирование квантового переплетения в сетках из спиновых/кубитных цепочек и обсуждалась экспериментальная реализация в системах на основе джозефсоновских кубитов [12]. Это направление исследова-

\* E-mail: makhlin@itp.ac.ru

ний привлекает интерес благодаря развитию экспериментов с квантовыми битами, с одной стороны, и растущему интересу к квантовому моделированию (quantum simulation) — с другой. В частности, такой подход позволяет моделировать физику фермионных степеней свободы. Отметим, что хотя операция квантового переплетения в фермионной картине подробно описана, ее моделирование в системах спинов или кубитов требует описания на спиновом языке. Это описание полезно не только для планирования и интерпретации результатов экспериментов с этими системами. Оно необходимо для понимания и анализа роли различных неидеальностей, в том числе влияния беспорядка и шума, характерного для таких систем и часто сильно нелокального на фермионном языке, а также неточностей управляющих импульсов. Реализации этой и подобных топологических моделей изучаются экспериментаторами [12, 14].

На спиновом языке кубит представляет собой ферромагнитный интервал. Адиабатические изменения локальных полей в области этого интервала изменяют состояние кубита. Таким образом могут быть реализованы однокубитные квантовые логические операции, являющиеся аналогом операции переплетения для двух майорановских нулевых мод в фермионной картине [8, 12]. В дальнейшем была предложена [13] операция переплетения для двух кубитных интервалов и был вычислен результат ее применения (с точностью до фазового множителя) к простым базисным начальным состояниям для упрощенной процедуры ее проведения. Частичный анализ роли этих упрощений был представлен в работе [15]. С другой стороны, даже для упрощенной процедуры было показано, что выполняемая операция приводит к запутыванию квантовых состояний кубитов с состоянием вспомогательного спина. Это означает, что его начальное состояние и влияние шума на его динамику должны существенным образом влиять на выполняемую двухкубитную операцию.

В настоящей работе в развитие более ранних результатов показано, что двухкубитная операция может быть выполнена таким образом, что вспомогательный спин не запутывается (не приобретает корреляций) с кубитами. Кроме того, построен набор симметрий задачи. Эти симметрии позволяют, с одной стороны, полностью найти результат применения двухкубитной операции к произвольным начальным состояниям (а не только базисным). С другой стороны, найденные симметрии позволяют обосновать устойчивость полученной операции по отношению к возмущениям управляющих импульсов и



**Рис. 1.** Δ-контакт, связывающий три изинговские цепочки. Связи между крайними спинами цепочек  $\sigma_\alpha(1)$  контролируются вспомогательным спином  $S$ . Гамильтониан, а значит, и эволюция системы управляется импульсами локальных полей, которые могут использоваться для передвижения (псевдо)топологических интервалов. Δ-контакт сводится к T-контакту, когда сила одной из связей в треугольнике становится равной нулю

беспорядку. Это означает высокую степень гибкости при проведении операции без изменения ее результата в согласии со свойствами топологических квантовых вычислений.

## 2. ДВУХКУБИТНАЯ ОПЕРАЦИЯ В ГЕОМЕТРИИ T-КОНТАКТА

Для описания полученных результатов кратко опишем рассматриваемую систему и реализацию двухкубитной логической операции. Рассматривается система из трех изинговских цепочек, в каждом узле которых расположен кубит (или спин/псевдоспин). Концы цепочек связаны в форме треугольника, см. рис. 1.

Гамильтониан системы имеет вид

$$H = \sum_{\alpha=1}^3 H_\alpha + H_{jct}^S. \tag{1}$$

При этом гамильтонианы трех цепочек даются выражениями

$$H_\alpha = - \sum_{i \geq 1} h_\alpha(i) \sigma_\alpha^x(i) - J \sum_{i \geq 1} \sigma_\alpha^z(i) \sigma_\alpha^z(i+1), \tag{2}$$

а связи между цепочками описываются гамильтонианом

$$H_{jct}^S = -\frac{1}{2} J_{12} S^3 \sigma_1^z(1) \sigma_2^z(1) - \frac{1}{2} J_{23} S^1 \sigma_2^z(1) \sigma_3^z(1) - \frac{1}{2} J_{13} S^2 \sigma_1^z(1) \sigma_3^z(1). \tag{3}$$

Иными словами, система состоит из трех изинговских цепочек с поперечными локальными магнитными полями  $h_\alpha(i)$ . Эти поля могут меняться внешними управляющими импульсами. Знак константы связи  $J$  не влияет на физику системы, и мы полагаем  $J > 0$ . В каждой из изинговских цепочек любая область, находящаяся в сильном поперечном поле  $|h| \gg J$ , представляет собой парамагнетик, а область в слабом поле  $|h| \ll J$  — ферромагнетик. Узлы в каждой цепочке пронумерованы, начиная с  $i = 1$ . Краевые узлы,  $i = 1$ , связаны попарно, см. выражение (3), и три соответствующие связи контролируются тремя разными компонентами вспомогательного спина  $S$  (полезность такого трехспинового взаимодействия для различных приложений и возможности его реализации обсуждаются, например, в работах [12, 16–18] для различных реализаций кубитов). Данный гамильтониан описывает так называемый  $\Delta$ -контакт [19] с симметричной структурой связей между цепочками. Он сводится к Т-контакту, если сила одной из связей в треугольнике становится равной нулю.

Аналогично преобразованию Йордана–Вигнера между спиновыми и фермионными степенями свободы в одномерной цепочке [10] обобщенное преобразование Йордана–Вигнера отображает спиновую систему (1) в геометрии Т-контакта на систему свободных фермионов на той же решетке [11, 12, 20]. Это позволяет рассматривать в спиновой системе аналоги физических явлений в фермионной системе. В частности, можно найти аналоги майорановских фермионных кубитов, основанных на майорановских нулевых модах, а также операции квантового переплетения (braiding) для майорановских мод. Переплетение реализует квантовые логические операции для таких кубитов. В частности, кубит реализуется как область слабого поперечного поля ( $h \ll \ll J$ ) между областями сильного поля ( $h \gg J$ ), при этом на фермионном языке на концах такой области расположены нулевые моды. Управляя локальными полями, можно реализовать операции переплетения для майорановских нулевых мод: изменяя значение поперечных полей, можно удлинять или укорачивать любую кубитную (низкополевую) область с любого конца.

Таким образом можно сдвигать ферромагнитные (псевдотопологические) интервалы. В частности, проводя такой интервал через область Т-контакта, см. рис. 2а, можно реализовать однокубитную операцию при помощи переплетения эффективных майорановских нулевых мод на его концах [12].

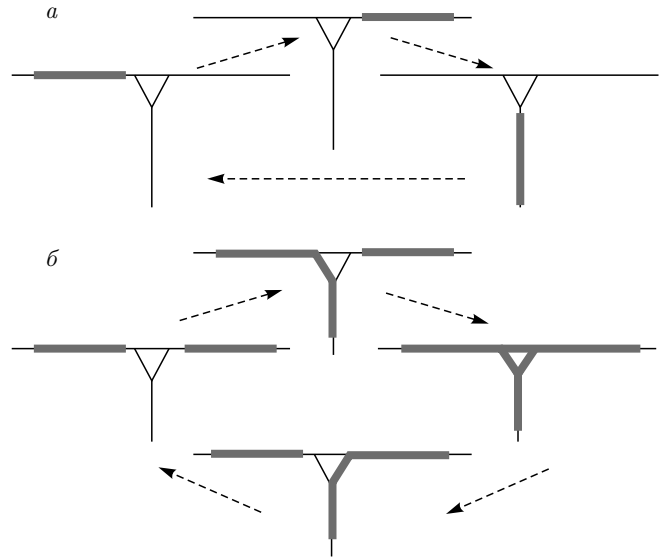


Рис. 2. Операция переплетения с ферромагнитными кубитами: а — однокубитное переплетение, б — двухкубитное переплетение. В процессе операций топологические области (жирные линии) сдвигаются из одной цепочки в другую, как показано на рис. Стрелками показан переход от одного этапа операции к следующему

Аналогично передвижение двух кубитных интервалов, см. рис. 2б, позволяет выполнить двухкубитную операцию [13, 15]. Результат этой операции легко найти для простого начального состояния системы — оба кубита и вспомогательный спин находятся в состоянии «спин вверх» — и для упрощенной (для описания, но не для выполнения, см. ниже) процедуры изменения параметров гамильтониана [13, 15]. Такое рассмотрение легко обобщить на остальные начальные базисные состояния, но в описании оператора этого квантового преобразования остается неопределенность: для каждого начального состояния рассмотрение адиабатической эволюции позволяет определить конечное состояние только с точностью до фазового множителя. Более того, использование упрощенной процедуры оставляет открытыми вопросы об устойчивости результирующей операции. Эти вопросы обсуждаются ниже.

Начнем с обсуждения изменения параметров (локальных полей), требуемых для выполнения операции. Начальное состояние перед операцией показано на рис. 2б: при этом один кубит находится в левой цепочке (Chain 1), а другой — в правой (Chain 3). В ходе первого этапа операции правый конец первого кубитного интервала передвигается из цепочки 1 вниз в цепочку 2; при этом сохраняется  $S_z$ -компонента вспомогательного спина, так что опе-

рацию удобно описывать в ее собственном базисе. На втором этапе операции другой кубит передвигается по цепочке 3 к Т-контакту. В случае упрощенной процедуры это происходит при  $J_{13} = J_{23} = 0$ , что позволяет легко отследить адиабатическое изменение состояния спина  $\sigma_3(1)$ . На следующем этапе поперечное поле для спина  $\sigma_1(1)$  увеличивается и замораживает его в направлении оси  $x$ , а правый конец первого кубита возвращается в цепочку 1. В ходе этого этапа вспомогательный спин адиабатически поворачивается в направлении  $x$ . На последнем этапе левый конец второго (правого) кубита возвращается в цепочку 3 (как и выше, этот этап удобно описывать в собственном базисе  $S_x$ ).

Поэтапно отслеживая эволюцию, можно найти получающееся состояние системы. Рассмотрим базисные состояния первого кубитного интервала со всеми спинами вверх ( $a = +1$ ) или вниз ( $a = -1$ ) и аналогично для второго кубитного интервала ( $b = \pm 1$ ) и вспомогательного спина ( $S \equiv S_z = \pm 1$ ). Для начального состояния кубитов и вспомогательного спина  $a = +1, b = +1, S = +1$  конечное состояние будет  $|a = +1, b = +1, +\hat{x}\rangle$  с точностью до фазового множителя. В этом состоянии вспомогательный спин имеет направление  $+x$ .

Можно ли найти оператор получающегося преобразования, несмотря на неопределенность в относительной фазе для различных начальных базовых состояний? Что происходит, если управляющие параметры меняются не точно в соответствии с описанной процедурой, а только приближенно? Эти вопросы обсуждаются ниже.

### 3. СИММЕТРИИ ЗАДАЧИ И ПОЛНАЯ ДВУХКУБИТНАЯ ОПЕРАЦИЯ

В этом разделе показано, что задача Т-контакта инвариантна относительно действия трех описанных ниже операций симметрии. С одной стороны, это позволяет полностью описать двухкубитную операцию, т. е. найти результат ее применения к любым базисным состояниям и их суперпозициям, основываясь только на результате ее применения к одному начальному базисному состоянию, как это описано выше. Помимо этого, это позволяет показать, что система обладает определенной устойчивостью в описанном ниже смысле.

Три операции симметрии, сохраняющие гамильтониан, имеют следующий вид: первая операция,

$$R_2 = R_y^S(\pi) \prod_{i \geq 1} R_x^{\sigma_i^2}(\pi), \tag{4}$$

обращает ( $z$ -компоненту) всех спинов в цепочке 2, а также  $x$ - и  $z$ -компоненты вспомогательного спина. Другая операция,

$$R_1 = R_x^S(\pi) \prod_{i \geq 1} R_x^{\sigma_i^1}(\pi), \tag{5}$$

обращает все спины в цепочке 1, а также  $y$ - и  $z$ -компоненты вспомогательного спина. Наконец, третья операция,

$$R_3 = R_z^S(\pi) \prod_{i \geq 1} R_x^{\sigma_i^3}(\pi), \tag{6}$$

обращает все спины в цепочке 3, а также  $x$ - и  $y$ -компоненты вспомогательного спина.

Таким образом, каждая из трех операций обращает  $z$ -компоненты всех спинов в одной из трех цепочек (отмеченной индексом в обозначении операции), а также две компоненты вспомогательного спина, контролируемые две связи в треугольнике, прилегающие к этой цепочке (эти компоненты показаны на рис. 1 рядом с этой цепочкой). Из этого краткого описания операций легко видеть, что они действительно сохраняют гамильтониан Т-контакта.

Эти симметрии сохраняют гамильтониан даже при наличии некоторого беспорядка, например, при неоднородном поперечном поле  $h_i$ . Поскольку они коммутируют с гамильтонианом, они связывают эволюцию с различными начальными состояниями, одно из которых получается из другого применением симметрии. Действительно, если  $R$  — одна из этих операций или их комбинация, то  $RH = HR$ , и поэтому если эволюция некоторой волновой функции  $|\psi(t)\rangle$  с начальным состоянием  $|\psi(0)\rangle$  вызвана гамильтонианом  $H$ , то  $R|\psi(t)\rangle$  — также эволюция, вызванная  $H$ , но для другого начального состояния  $R|\psi(0)\rangle$ .

Рассмотрим, как эти симметрии действуют на интересующие нас начальные базисные состояния: состояние  $|a, b, S\rangle$  они переводят соответственно в

$$R_2 : |a, b, S\rangle \mapsto |a, b, -S\rangle, \tag{7}$$

$$R_1 : |a, b, S\rangle \mapsto |-a, b, -S\rangle, \tag{8}$$

$$R_3 : |a, b, S\rangle \mapsto |a, -b, S\rangle. \tag{9}$$

Помимо самих  $R_i$  можно использовать их комбинации, причем каждый из них может входить или не входить в комбинацию, что дает всего  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  вариантов. Из одного начального состояния  $|a = 1, b = 1, S = 1\rangle$  под действием  $R_i$  в результате получаются все восемь базисных состояний. Таким образом, зная результат применения двухкубитной

операции к одному начальному состоянию, мы получаем все восемь результатов для всех восьми начальных базисных состояний, а значит, полное описание операции.

В результате можно показать, что переплетение реализует следующий оператор на состоянии кубитов и вспомогательного спина:

$$U = \exp \left[ -i \frac{\pi}{4} S^y \tau_1^z \tau_2^z \right]. \quad (10)$$

Этот оператор выражен через оператор  $S^y$  вспомогательного спина и матрицы Паули кубитов. Легко видеть, что этот оператор коммутирует с операциями симметрии.

#### 4. ДВУХКУБИТНАЯ ОПЕРАЦИЯ БЕЗ СОЗДАНИЯ ЗАПУТАННОСТИ СО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫМ СПИНОМ

В предыдущем разделе был получен результат (10) для операции двухкубитного переплетения. Он показывает, что, помимо изменения состояния пары кубитов, эта операция приводит к созданию квантовой запутанности (entanglement) кубитов со вспомогательным спином (если он не находился в собственном состоянии  $S_y$ ). Однако с точки зрения реализации квантовых вычислений требуется проводить двухкубитную логическую операцию, не затрагивая состояние остальных степеней свободы. Ниже показано, как можно модифицировать процедуру, чтобы добиться этого результата.

Требуемая операция основана на (10). Нужный результат достигается, если перед началом операции оба кубита находятся в одной и той же цепочке, а не в разных. Предположим, что оба кубита расположены в цепочке 1. Для выполнения операции второй кубит, который расположен ближе к Т-контакту, сначала сдвигается в цепочку 3 через область контакта. После этого проводится операция переплетения, как описано выше. После нее второй кубит возвращается обратно из цепочки 3 в цепочку 1.

Результат такой операции может быть найден на основе выражения (10), если его сопрячь оператором сдвига  $V$  второго кубита ( $\text{chain } 1 \leftrightarrow \text{chain } 3$ ). Этот оператор сдвига представляет собой зависящую от  $S^y$  операцию переворота второго кубита:  $V = 1$  при  $S^y = 1$  и  $V = \tau_2^x$  при  $S^y = -1$ . Явное вычисление результата сопряжения дает выражение для полной двухкубитной операции:

$$U_{2qb} = \exp \left[ -i \frac{\pi}{4} \tau_1^z \tau_2^z \right]. \quad (11)$$

Легко видеть, что эта операция действительно представляет собой двухкубитную операцию, не затрагивающую состояния вспомогательного спина.

#### 5. ОБСУЖДЕНИЕ

Результат предыдущего раздела показывает, что двухкубитную операцию можно провести без создания корреляций между кубитами и вспомогательным спином. Такой метод особенно удобен, так как позволяет проводить операцию непосредственно на кубитах без дополнительных операций со вспомогательным спином (ср. аналогичные результаты для однокубитной операции [12]). В частности, результат такой операции не зависит от начального состояния вспомогательного спина, даже если он находится в смешанном состоянии. Вместе с однокубитными операциями такая операция может быть использована для создания универсального набора элементарных операций для квантовых алгоритмов. Отметим, что получающаяся двухкубитная операция (11) является клиффордовой.

Поскольку клиффордовы операции не образуют универсального набора и недостаточны для квантовых вычислений, требуется дополнить их другими операциями. Для этого можно, например, прикладывать управляющие поля к вспомогательному спину и/или локальные магнитные поля к спином в цепочках. Напомним, что рассматриваемые кубиты не защищены от продольного шума, однако, с другой стороны, как описано выше, этот канал дает возможность для реализации необходимых квантовых операций.

Необходимо сделать замечание о влиянии шума. Как видно из рассуждений выше, частичная топологическая устойчивость проявляется в защите от влияния шума в параметрах гамильтониана (1), но дополнительная защита от продольного шума отсутствует. Таким образом, в экспериментах с такими ферромагнитными кубитами требуются составляющие их «обычные» кубиты с продолжительной когерентностью. Так как в зависимости от реализации кубитов продольное и поперечное времена релаксации могут значительно различаться, описанная частичная топологическая защита может значительно удлинить время когерентности композитных (псевдо)топологических кубитов.

Результаты разд. 3 показывают устойчивость реализуемой операции в следующем смысле. В первых, результат применения операции к начальному состоянию  $|a = 1, b = 1, S = 1\rangle$  устойчив (с точ-

ностью до фазового множителя) по отношению к отклонениям параметров гамильтониана в процессе выполнения операции от их номинальных значений — при сохранении адиабатичности операции. То же самое верно для остальных семи базисных состояний. Если эти восемь фазовых множителей совпадают, операция определена однозначно (с точностью до общего фазового множителя, который в таких условиях несуществен). Однако если для восьми базисных состояний фазовые множители различны, операция может значительно измениться. Результаты разд. 3 означают, что эти восемь фазовых множителей жестко связаны между собой, в том числе для всех путей в пространстве параметров, близких к идеальному.

Более того, подчеркнем, что эти результаты подразумевают, что полученное описание операции сохраняется в широком диапазоне при отклонении управляющих параметров гамильтониана от идеальных значений, предписанных процедурой (при этом отклонения возможны на всех этапах, а не только на этапах 2 или 3, как в [15]). Кроме того, эти же результаты позволяют учесть и случай конечных (небесконечных) поперечных полей в парамагнитной области, в том числе на начальном этапе операции или в ее процессе. Все эти свойства демонстрируют (частичную) топологическую защиту системы кубитов.

**Финансирование.** Исследования в Высшей школе экономики были поддержаны Программой фундаментальных исследований ВШЭ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R. M. Lutchyn, E. P. A. M. Bakkers, L. P. Kouwenhoven, P. Krogstrup, C. M. Marcus, and Y. Oreg, *Nat. Rev. Mater.* **3**, 52 (2018).
2. A. Rahmani and M. Franz, arXiv:1811.02593.
3. A. Yu. Kitaev, *Ann. Phys.* **303**, 2 (2003).
4. C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1083 (2008).
5. S. Das Sarma, M. Freedman, and C. Nayak, *NPJ Quant. Inf.* **1**, 15001 (2015).
6. N. Read and D. Green, *Phys. Rev. B* **61**, 10267 (2000).
7. D. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 268 (2001).
8. J. Alicea, Y. Oreg, G. Refael, F. von Oppen, and M. P. A. Fisher, *Nat. Phys.* **7**, 412 (2011).
9. J. Alicea, *Rep. Progr. Phys.* **75**, 076501 (2012).
10. P. Jordan and E. Wigner, *Z. Phys.* **47**, 631 (1928).
11. N. Crampé and A. Trombettoni, *Nucl. Phys. B* **871**, 526 (2013).
12. S. Backens, A. Shnirman, Yu. Makhlin, Y. Gefen, J. E. Mooij, and G. Schön, *Phys. Rev. B* **96**, 195402 (2017).
13. S. Backens, A. Shnirman, and Yu. Makhlin, *Sci. Rep.* **9**, 2598 (2019).
14. A. Petrescu, H. E. Türeci, A. V. Ustinov, and I. M. Pop, *Phys. Rev. B* **98**, 174505 (2018).
15. Yu. Makhlin, S. Backens, and A. Shnirman, *JETP Lett.* **108**, 763 (2018).
16. P. Hauke, D. Marcos, M. Dalmonte, and P. Zoller, *Phys. Rev. X* **3**, 041018 (2013).
17. C. Hutter, A. Shnirman, Yu. Makhlin, and G. Schön, *Europhys. Lett.* **74**, 1088 (2006).
18. J. K. Pachos and M. B. Plenio, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 056402 (2004).
19. A. M. Tsvelik, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 147202 (2013).
20. M. Pino, A. M. Tsvelik, and L. B. Ioffe, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 197001 (2015).