

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИФРАКЦИЯ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ РЕШЕТКЕ И ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ НЕЙТРОНУ

Г. В. Куллин^a, А. И. Франк^{a}, М. А. Захаров^{a,b}, С. В. Горюнов^a,
В. А. Бушуев^c, А. Панзарелла^{d**}, П. Гелтенборт^{e***}, М. Еншель^{e***}*

^a Объединенный институт ядерных исследований
141980, Дубна, Московская обл., Россия

^b Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

^c Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия

^d ESRF, Grenoble, France-71
38043, Grenoble Cedex 9, France

^e Institut Laue-Langevin-71
38042, Grenoble Cedex 9, France

Поступила в редакцию 16 апреля 2019 г.,
после переработки 10 июля 2019 г.

Принята к публикации 10 июля 2019 г.

Дискретный спектр ультрахолодных нейтронов, возникающий при дифракции на движущейся решетке, был измерен с помощью времязадержки-спектрометра. Показано, что выбором глубины профиля решетки можно существенно менять соотношение интенсивностей волн разных дифракционных порядков. Результаты эксперимента хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями, основанными на многоволновой динамической теории дифракции нейтронов на объемной периодической решетке.

DOI: 10.1134/S0044451019110038

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно достаточно большое число нестационарных квантовых эффектов, которые могут наблюдаться [1–13] или уже наблюдались [14–16] в экспериментах с нейтронами. Теоретическое описание этих явлений основано, как правило, на решении нестационарного уравнения Шредингера.

Существуют, однако, нестационарные явления, теория которых может быть исчерпывающим образом построена на решении стационарного уравнения Шредингера, примером чего является дифракция нейтронов на равномерно движущейся периодической структуре. Такой структурой может быть волна, бегущая по поверхности твердого тела, или искусственная дифракционная решетка.

Качественно этот эффект рассматривался впервые в работе [17], где дифракция ультрахолодных нейтронов (УХН) на поверхностных рэлеевских волнах рассматривалась в качестве причины неупругого рассеяния нейтронов, приводящего к уменьшению времени хранения УХН в ловушках. Рассмотрение основывалось на анализе стационарной картины дифракции нейтронной волны на периодической структуре в движущейся системе координат. Позднее дифракция холодных нейтронов на поверхностной акустической волне наблюдалась в работе [18]. Результаты эксперимента хорошо согласовывались с теорией, основанной на решении уравнения Шредингера с переменными граничными условиями. Передача энергии нейтрону была малой и, строго говоря, в опыте не измерялась. Спустя почти двадцать лет после работы [17] эффект изменения энергии нейтронов при дифракции на движущейся ре-

* E-mail: frank@nf.jinr.ru

** A. Panzarella, P. Geltenbort, M. Jentschel

решетке фактически был заново переосмыслен в работах [8, 19]. В этом случае анализ также основывался на классическом решении задачи дифракции в системе покоя решетки. Вместе с тем было показано, что поглощающая или фазовая решетка, движущаяся поперек нейтронного пучка, должна действовать как квантовый модулятор прошедшей волны [4], дискретным образом изменяющий спектр проходящих через него нейтронов. Классический метод решения приводил, таким образом, к предсказаниям чисто квантового эффекта.

Появление такого дискретного спектра было продемонстрировано в эксперименте с УХН [20], а более детально эффект был исследован в работе [21]. Кроме того, было экспериментально продемонстрировано, что, в согласии с предсказаниями [22], движущаяся апериодическая решетка может служить нейтронной временной линзой, с помощью которой можно фокусировать нейтроны во времени [23, 24].

Явление нестационарной дифракции нейтронов на движущейся решетке нашло свое применение в экспериментах по проверке слабого принципа эквивалентности для нейтрона [25, 26]. Их развитие [27] привело к пониманию необходимости более детального теоретического и экспериментального изучения энергетического спектра УХН, возникающего в результате дифракции на движущейся решетке. Последовавшая работа [28] была посвящена описанию динамического подхода к теории дифракции на физической решетке конечной толщины. В работе [29] сообщалось о создании времяпролетного фурье-спектрометра, необходимого для измерения нейтронных спектров в более широком, чем ранее, диапазоне энергий. Результаты измерения дифракционных спектров УХН от движущейся фазовой решетки и сравнение их с предсказаниями динамической теории приведены в работе [30]. Измерения проводились с единственной решеткой, скорость которой варьировалась. Эксперименты подтвердили предсказание теории о зависимости интенсивностей дифракционных порядков от скорости решетки. Однако зависимость интенсивности порядков от глубины профиля решетки, также предсказанная теорией, тогда продемонстрирована не была. Настоящая работа частично восполняет этот пробел.

2. ДИФРАКЦИЯ НЕЙТРОНОВ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ДИФРАКЦИОННОЙ РЕШЕТКЕ КАК НЕСТАЦИОНАРНОЕ КВАНТОВОЕ ЯВЛЕНИЕ

Задача о дифракции нейтронов на движущейся решетке многократно рассматривалась ранее

[19, 20, 28, 30]. Во всех случаях решение находилось в движущейся системе координат с последующим его преобразованием в лабораторную систему. В системе покоя решетки волновые числа и частоты дифрагированных волн одинаковы в силу упругости процесса дифракции. Однако последующее преобразование решения в лабораторную систему координат меняет лишь компоненты волновых векторов, коллинеарные вектору скорости решетки, в то время как нормальные ему компоненты остаются без изменения. Именно поэтому дискретное угловое распределение волновых векторов дифракционных порядков в движущейся системе координат приводит к появлению дискретного энергетического спектра в лабораторной системе.

Приведем здесь результат решения этой задачи [28]. Полагая, что штрихи решетки ориентированы вдоль оси y , будем рассматривать только двумерный случай, а кроме того, положим, что решетка бесконечно тонкая. Исходная волна, падающая на решетку, имеет вид

$$\Psi_{in}(x, z, t) = \exp[i(k_{0x}x + k_{0z}z - \omega_0 t)], \quad (1)$$

где $k_{0x} = Mv_{0x}/\hbar$, $k_{0z} = Mv_{0z}/\hbar$, v_{0x} и v_{0z} — соответственно тангенциальная и нормальная компоненты скорости, M — масса нейтрона, $\omega_0 = \hbar k_0^2/2M$ и $k_0 = \sqrt{k_{0x}^2 + k_{0z}^2}$ — частота и волновое число.

Положим, что решетка движется со скоростью V_g в положительном направлении оси x . Решая задачу о дифракции в движущейся системе, в которой решетка покоятся, можно найти проекции волновых векторов k_{mx} и k_{mz} в этой системе, а также амплитуды a_m дифракционных порядков. В области $z > 0$ волновая функция дифрагировавших нейтронов имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi'(x', z, t) = \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp [i(k'_{mx}x' + k_{mz}z - \omega' t)], \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} k'_{mx} &= k_{mx} - k_V, \quad k_{mx} = k_{0x} + g_m, \\ k_V &= MV_g/\hbar, \\ k_{mz} &= \sqrt{k_{0z}^2 + 2(k_V - k_{0x})g_m - g_m^2}, \\ \omega'_0 &= \hbar k_0'^2/2M, \quad k'_0 = \sqrt{k_{0x}'^2 + k_{0z}'^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

$g_m = mg_0$, $g_0 = 2\pi/d$ — величина вектора обратной решетки, d — пространственный период решетки, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — целые числа, а вопрос о величине амплитуд a_m рассмотрим ниже (см. формулу (6)).

После преобразования решения в лабораторную систему координат $x = x' + V_g t$ для волновой функции дифрагировавших нейтронов получим

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp[i(k_{mx}x + k_{mz}z - \omega_m t)], \quad (4)$$

где проекции k_{mx} и k_{mz} определены в (3), а частоты дифрагировавших волн $\omega_m = \omega_0 + m\Omega$ характеризуются спектральным расщеплением $\Omega = 2\pi/\tau$, где $\tau = d/V_g$. Величина этого расщепления увеличивается с увеличением скорости движения решетки и (или) с уменьшением ее периода. Амплитуды дифрагировавших волн в лабораторной системе определяются из условия сохранения потока

$$A_m = a_m [k_0^2 / (k_0^2 + 2k_V g_m)]^{1/4}. \quad (5)$$

3. АМПЛИТУДЫ ДИФРАКЦИОННЫХ ПОРЯДКОВ

В работах [8, 19] задача о дифракции в движущейся системе рассматривалась в рамках кинематической теории, в которой для амплитуд a_m принимались величины фурье-амплитуд периодической функции пропускания решетки $f(x) = f(x + d)$:

$$a_m = \frac{1}{d} \int_0^d f(x) \exp(-img_0x) dx. \quad (6)$$

При этом молчаливо предполагалось, что факт движения решетки не меняет функцию пропускания, что возможно только для идеально тонкой решетки. В работе [19] отмечалось, что с практической точки зрения выгодно использовать так называемую π -решетку, для которой фаза меняется скачком на π через каждые полпериода. Такая решетка характеризуется отсутствием четных порядков, а интенсивности дифракционных порядков ± 1 в четыре раза превышают соответствующие величины для амплитудных решеток. Именно фазовая π -решетка была использована в экспериментах [20, 21], где зависимость фазы проходящей волны от координаты достигалась за счет преломления в материале решетки, толщина которой менялась каждые полпериода.

На самом деле, идеально скачкообразного изменения фазы на π в реальных условиях добиться трудно. Это связано с тем, что в системе координат движущейся решетки нейтроны падают на нее под некоторым углом, поэтому изменение фазы имеет трапециевидный вид из-за разных длин пробега в веществе вблизи краев П-образных выступов решетки

(подробнее см. [28]). Попытка учесть это обстоятельство была сделана в работе [31], где для вычисления амплитуд дифракционных порядков в соответствии с выражением (6) использовалась трапециевидная зависимость фазы от координаты. Для характеристики профиля использовался параметр

$$C = \frac{2h}{d} (V_g - v_{0x})/v_{0z},$$

где h — глубина профиля решетки. Этот параметр увеличивается с увеличением скорости решетки, глубины профиля и с уменьшением ее периода. При $C \ll 1$ фазовый профиль близок к прямоугольному, а при $C = 1$ он принимает треугольную форму.

В таком модифицированном кинематическом подходе [31] полагалось, что объемный характер структуры, т. е. наличие зубцов и канавок, приводит только к модификации функции пропускания, а волны с разными порядками m дифракции в выражении (2) никак не связаны между собой и не влияют друг на друга, как если бы это было в бесконечно тонкой решетке. В более строгом подходе необходимо принять во внимание, что волны, распространяющиеся в материале решетки конечной толщины, могут взаимодействовать. Для учета этого обстоятельства необходим динамический подход к дифракции [28], основанный на решении уравнения Шредингера

$$\Delta\Psi(\mathbf{r}) + [k^2 - \chi(\mathbf{r})]\Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (7)$$

где k — волновое число нейтронов в вакууме, $\chi(\mathbf{r}) = 4\pi N(\mathbf{r})b(\mathbf{r})$, $N(\mathbf{r})$ — плотность ядер, $b(\mathbf{r})$ — длина когерентного рассеяния нейтронов в среде. Как функция $\chi(x)$, периодическая в области $0 \leq z \leq h$, занимаемой решеткой, так и волновая функция в веществе, записанная в движущейся системе координат, представляются в виде сумм:

$$\chi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \chi_n \exp(ig_n x), \quad (8)$$

$$\Psi'(x', z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Psi_m(z) \exp[i(q_{mx}x' + q_{0z}z)], \quad (9)$$

где $g_n = ng_0$, $g_0 = 2\pi/d$, χ_n — фурье-амплитуды функции $\chi(x)$, а

$$q_{mx} = k_{0x} - k_V + g_m, \quad q_{0z} = \sqrt{k_{0z}^2 - \chi_0} \quad (10)$$

— проекции волновых векторов.

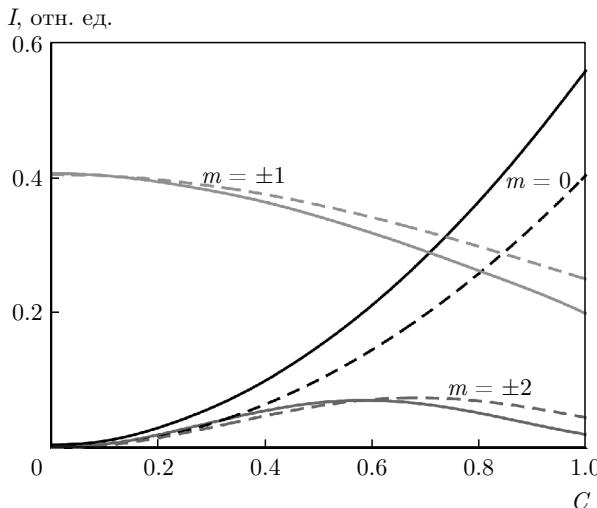


Рис. 1. Интенсивности дифракционных порядков для движущейся π -решетки, рассчитанные в кинематическом приближении [31] (штриховые кривые) и в рамках динамической теории [28] (сплошные кривые) в зависимости от параметра C

Тогда решение уравнения (7) определяется бесконечной системой связанных дифференциальных уравнений второго порядка. Однако, как показано в работе [28], при определенных условиях, справедливых в условиях экспериментов [21–26], в этой системе уравнений можно пренебречь вторыми производными по координате z , что упрощает ситуацию и приводит к системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\Psi_m}{dz} = -i\alpha_m\Psi_m - i\sum_{n \neq 0} \beta_n \Psi_{m-n}, \quad (11)$$

где $\alpha_m = g_m[g_m - 2(k_V - k_{0x})]/2q_{0z}$, $\beta_n = \chi_n/2q_{0z}$.

Что касается волновой функции нейтронов в лабораторной системе координат, то в области наблюдения $z > h$ она также определяется соотношениями (4) и (5), в которых амплитуды a_m следует заменить на величины $\Psi_m(z = h)$, полученные из решения системы уравнений (11).

Результаты для интенсивностей дифракционных порядков движущейся π -решетки с коэффициентом заполнения $1/2$, рассчитанные в рамках модифицированного кинематического приближения [31] и динамической теории [28], приведены на рис. 1. Видно, что обе модели предсказывают уменьшение интенсивностей первого порядка с увеличением параметра C при одновременном росте интенсивности нулевого порядка и немонотонном поведении интенсивностей волн второго порядка. При этом динамическая теория предсказывает, что с увеличением

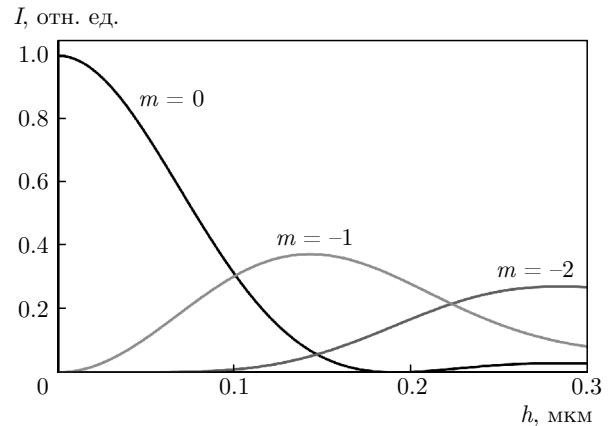


Рис. 2. Интенсивности дифракционных порядков в зависимости от глубины h профиля решетки, рассчитанные в рамках динамической теории. Число штрихов $N = 84000$, частота вращения 4800 об./мин, начальная энергия нейтронов 120 нэВ

параметра C отличие интенсивностей дифракционных порядков от рассчитанных в кинематическом приближении возрастает. Недавние измерения спектров УХН при дифракции на движущейся решетке [30] демонстрируют вполне удовлетворительное согласие с расчетами, основанными на динамической теории.

Таким образом, можно прийти к выводу, что желание увеличить величину спектрального расщепления путем увеличения скорости решетки или уменьшения ее периода практически неизбежно приводит к росту интенсивности нулевого порядка, отвечающего волне с исходной частотой, и к заметной потере интенсивности первых порядков, т. е. к потере эффективности передачи нейтрону кванта энергии $\Delta E = \hbar\Omega$.

Подчеркнем, однако, что приведенные выше результаты относятся только к решетке с фиксированной высотой зуба (π -решетка) и равных ширинах зуба и канавки. В то же время теория предсказывает, что при заданной скорости решетки и энергии нейтрона соотношение между интенсивностями порядков существенным образом зависит от глубины профиля h . Рисунок 2 иллюстрирует это обстоятельство.

4. НОВЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ И СРАВНЕНИЕ С РАСЧЕТОМ

Эксперимент был поставлен на источнике ультрахолодных нейтронов PF2 Института Лауз–Ланжевена (Гренобль, Франция) с использованием вре-

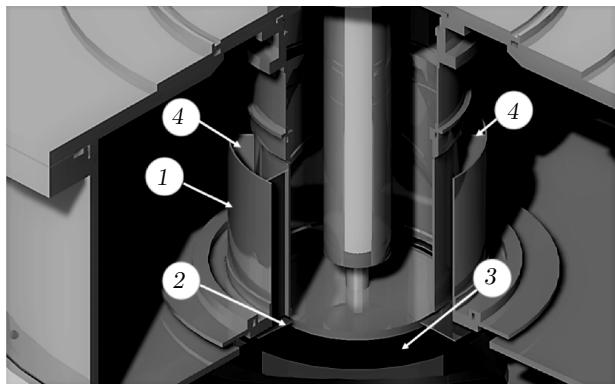


Рис. 3. Верхняя часть спектрометра: 1 — кольцевой коридор; 2 — монохроматор; 3 — дифракционная решетка; 4 — вертикальные разделители

мяпролетного фурье-спектрометра УХН [29]. Постановка эксперимента аналогична описанной в работе [30]. Исходный спектр формировался путем пропускания УХН через комбинацию пятислойного интерференционного фильтра Ni–Ti и многослойного «суперокна» [32, 33], установленных на выходе кольцевого коридора и формирующего пространственное распределение потока УХН, падающего на решетку (рис. 3). Такая комбинация монохроматора и интерференционного фильтра обеспечивала монохроматизацию по вертикальной компоненте скоростей на уровне $\Delta v_{0z}/v_{0z} \leq 0.02$ (см. рис. 9 в [30]).

В отличие от эксперимента работы [30], внутри кольцевого коридора были установлены шесть вертикальных пластин-разделителей. Они были изготовлены из нержавеющей стали и покрыты полиэтиленом. Благодаря малой граничной скорости и большому сечению неупругого рассеяния полиэтилен является эффективным поглотителем УХН. Образуя своеобразный коллиматор, эти разделители препятствовали прохождению через коридор нейтронов с большой горизонтальной скоростью.

Так же как и в работе [30], дифракционная решетка была приготовлена на периферической области кремниевого диска. Она имела вид кольца со средним диаметром 12 см и шириной около 2 см. Угловой период структуры $\alpha = 2\pi/N$ был точно известен. Измерения проводились с двумя решетками. Решетка 1 была той же, что и в работе [30]. Она имела 94500 канавок глубиной $h = 0.14$ мкм. У решетки 2 было меньшее число канавок, $N = 84000$, но их глубина была больше, $h = 0.22$ мкм. Обе решетки исследовались с помощью микроскопа атомных сил. В обоих случаях глубина профиля удовлетворительно соответствовала расчетному значению. Однако

форма профиля была не в точности прямоугольной, а имела трапециoidalный вид, причем ширина канавок слегка уменьшалась с глубиной. Это сужение составляло около 0.2 мкм.

Времяпролетные спектры УХН, возникающие при дифракции на вращающейся решетке, измерялись при частоте вращения решетки 4800 об./мин.

Детальное моделирование эксперимента методом Монте-Карло и анализ результатов осуществлялись с помощью двух программ [34]. С помощью первой из них вычислялся спектр нейтронов после дифракции на решетке. При этом моделировался угловой и энергетический спектры нейтронов.

Известная трудность была связана с некоторой неопределенностью распределения горизонтальных скоростей, поскольку прибор изначально был сконструирован для измерения только вертикальной компоненты скорости нейтронов. В расчетах спектр горизонтальных скоростей принимался гауссовым с нулевым средним значением и шириной на половине высоты 5 м/с.

Как видно из выражений (3), распределение по горизонтальным скоростям непосредственно входит в распределение вертикальных скоростей, приводя к спектральному уширению соответствующих дифракционных пиков. Симметричное распределение горизонтальных скоростей приводит к появлению дополнительной дисперсии σ_m пиков соответствующих дифракционных порядков, оценка которых приведена в работе [28]. В условиях нашего эксперимента наличие коллимирующих пластин-разделителей ограничивало величину горизонтальной скорости и, следовательно, величину добавочного уширения пиков.

В расчете также учитывалось то обстоятельство, что ширина канавок в силу радиальной ориентации канавок зависела от радиуса при примерно одинаковом угле наклона стенок. Вторая программа моделировала процесс измерения спектра времяпролетным фурье-спектрометром.

Результаты измерений в сравнении с расчетами показаны на рис. 4. Начальная энергия и, соответственно, положение нулевого пика при измерении с двумя решетками слегка различаются, поскольку в этих измерениях в качестве монохроматоров использовались разные пятислойные интерференционные фильтры. Спектры пропускания каждого из них измерялись обычным методом времени пролета (см. рис. 3 в [29]), а полученные результаты учитывались в расчете.

Из результатов, приведенных на рис. 4, ясно видно, что спектры, полученные с двумя решетками,

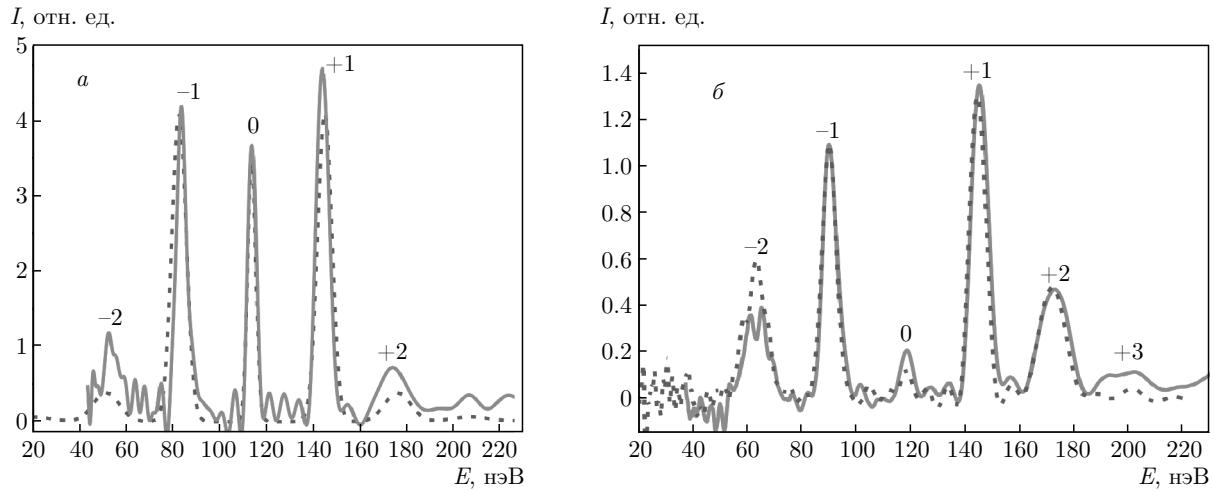


Рис. 4. (В цвете онлайн) Времяпролетные спектры при дифракции УХН на движущихся решетках в сравнении с результатами расчетов. Экспериментальные (красные сплошные линии) и расчетные (синие штриховые линии) показаны для решетки 1 (a) и 2 (б)

как и ожидалось, существенно различаются. В соответствии с расчетами относительная интенсивность нулевого порядка при дифракции на решетке 2 существенно меньше, чем на решетке 1. Кроме того, спектр, полученный с решеткой 2, отличается заметным увеличением интенсивностей второго порядка, что хорошо согласуется с расчетом интенсивности $|\Psi_{\pm 2}(h)|^2$ (см. значения кривой с $m = -2$ на рис. 2 при $h = 0.14$ и $h = 0.22$ мкм).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дискретные спектры УХН, возникающие при дифракции нейтронов на движущихся решетках, были измерены для двух фазовых решеток с различающимися глубинами профиля. Падающий на решетку пучок имел узкое распределение скоростей в направлении, нормальному к поверхности решетки, при относительно широком распределении в плоскости, параллельной решетке. Передача энергии при такой нестационарной дифракции составляла 30 и 60 нэВ соответственно для первого и второго дифракционных порядков.

Измерения проводились с помощью времяпролетного фурье-спектрометра. Показано, что в соответствии с теоретическими предсказаниями возможно существенно изменять соотношение между интенсивностями дифракционных порядков путем подходящего выбора глубины профиля. Относительное увеличение интенсивности первого и второ-

го порядков может быть весьма важным для увеличения эффективности передачи энергии нейтрону.

Полученные результаты находятся в прекрасном согласии с расчетами [34], основанными на динамической теории дифракции на движущейся решетке. Этот результат вместе с предшествующим результатом работы [30] можно рассматривать как достаточно убедительную проверку динамической теории дифракции нейтронов на дифракционных решетках [28], которая в рамках модели связанных волн позволила более строго, по сравнению с предыдущим кинематическим подходом, описать зависимость интенсивностей дифракционных порядков от периода решетки, скорости ее движения, глубины профиля и параметров потока падающих нейтронов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Герасимов, М. В. Казарновский, Письма в ЖЭТФ **71**, 1700 (1976).
2. R. Gähler and R. Golub, Z. Phys. B **56**, 5 (1984).
3. J. Felber, R. Gähler, and R. Golub, Physica B **151**, 135 (1988).
4. J. Felber, G. Müller, R. Gähler, and R. Golub, Physica B **162**, 191 (1990).
5. V. G. Nosov and A. I. Frank, J. Moscow Phys. Soc. **1**, 1 (1991).
6. R. Golub and S. K. Lamoreaux, Phys. Lett. A **162**, 122 (1992).

7. J. Summhammer, Phys. Rev. A **47**, 556 (1993).
8. В. Г. Носов, А. И. Франк, ЯФ **57**, 1029 (1994).
9. A. I. Frank and V. G. Nosov, Ann. N. Y. Acad. Sci. **755**, 293 (1995).
10. В. Г. Носов, А. И. Франк, ЯФ **62**, 807 (1999).
11. J. Felber, R. Gähler, R. Golub, P. Hank, V. Ignatovich, T. Keller, and U. Rauch, Found. Phys. **29**, 381 (1999).
12. A. I. Frank and D. B. Amandzholova, Ann. N. Y. Acad. Sci. **755**, 858 (1995).
13. А. В. Козлов, А. И. Франк, ЯФ **68**, 1149 (2005).
14. Th. Hils, J. Felber, R. Gähler, W. Gläser, R. Golub, K. Habicht, and P. Wille, Phys. Rev. A **58**, 4784 (1998).
15. J. Summhammer, K. A. Hamacher, H. Kaiser, H. Weinfurter, D. L. Jacobson, and S. A. Werner, Phys. Rev. Lett. **75**, 3206 (1995).
16. J. Felber, R. Gähler, C. Rausch, and R. Golub, Phys. Rev. A **53**, 319 (1996).
17. И. М. Франк, Сообщения ОИЯИ Р4-8851, Дубна (1975).
18. W. A. Hamilton, A. G. Klein, G. I. Opat, and P. A. Timmins, Phys. Rev. Lett. **58**, 2770 (1987).
19. A. I. Frank and V. G. Nosov, Phys. Lett. A **188**, 120 (1994).
20. A. I. Frank, S. N. Balashov, I. V. Bondarenko, P. Geltenbort, P. Høghøj, S. V. Masalovich, and V. G. Nosov, Phys. Lett. A **311**, 6 (2003).
21. А. И. Франк, П. Гелтенборт, Г. В. Кулин, Д. В. Кустов, В. Г. Носов, А. Н. Стрепетов, Письма в ЖЭТФ **81**, 541 (2005).
22. А. И. Франк, Р. Гэйлер, ЯФ **63**, 605 (2000).
23. А. И. Франк, П. Гелтенборт, Г. В. Кулин, А. Н. Стрепетов, Письма в ЖЭТФ **78**, 224 (2003).
24. S. N. Balashov, I. V. Bondarenko, A. I. Frank, P. Geltenbort, P. Høghøj, G. V. Kulin, S. V. Masalovich, V. G. Nosov, and A. N. Strepetov, Physica B **350**, 246 (2004).
25. А. И. Франк, П. Гелтенборт, М. Жентшель, Г. В. Кулин, Д. В. Кустов, В. Г. Носов, А. Н. Стрепетов, Письма в ЖЭТФ **86**, 255 (2007).
26. A. I. Frank, P. Geltenbort, M. Jentschel, G. V. Kulin, D. V. Kustov, V. G. Nosov, and A. N. Strepetov, Nucl. Instr. Meth. A **611**, 314 (2009).
27. G. V. Kulin, A. I. Frank, S. V. Goryunov, D. V. Kustov, P. Geltenbort, M. Jentschel, A. N. Strepetov, and V. A. Bushuev, Nucl. Instr. Meth. A **792**, 38 (2015).
28. В. А. Бушуев, А. И. Франк, Г. В. Кулин, ЖЭТФ **149**, 41 (2016).
29. G. V. Kulin, A. I. Frank, S. V. Goryunov, D. V. Kustov, P. Geltenbort, M. Jentschel, B. Lauss, and Ph. Schmidt-Wellenburg, Nucl. Instr. Meth. A **819**, 67 (2016).
30. G. V. Kulin, A. I. Frank, S. V. Goryunov, P. Geltenbort, M. Jentschel, V. A. Bushuev, B. Lauss, Ph. Schmidt-Wellenburg, A. Panzarella, and Y. Fuchs, Phys. Rev. A **93**, 033606 (2016).
31. А. И. Франк, П. Гелтенборт, Г. В. Кулин, Д. В. Кустов, В. Г. Носов, А. Н. Стрепетов, Сообщения ОИЯИ Р3-2004-207, Дубна (2004).
32. И. В. Бондаренко, В. И. Боднарчук, С. Н. Балашов, П. Гелтенборт, А. Г. Кляин, А. В. Козлов, Д. А. Корнеев, С. В. Масалович, В. Г. Носов, А. И. Франк, П. Хогхой, А. Чиммино, ЯФ **62**, 775 (1999).
33. A. I. Frank, S. V. Balashov, V. I. Bodnarchuk, I. V. Bondarenko, A. Cimmino, P. Geltenbort, P. Hoghoj, A. G. Klein, D. A. Korneev, A. V. Kozlov, and S. V. Masalovich, Proc. SPIE **3767**, 360 (1999).
34. М. А. Захаров, А. И. Франк, Г. В. Кулин, С. В. Горюнов, Сообщения ОИЯИ Р3-2018-20, Дубна (2018).