

# СОЛИТОНЫ БЕЗ ОГИБАЮЩЕЙ В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ, ИМПЛАНТИРОВАННОЙ В АНИЗОТРОПНУЮ МАТРИЦУ

А. А. Заболотский\*

*Институт автоматизации и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук  
690090, Новосибирск, Россия*

Поступила в редакцию 23 мая 2019 г.,  
после переработки 29 мая 2019 г.  
Принята к публикации 30 мая 2019 г.

Рассмотрена модель эволюции импульсов поля в среде двухуровневых атомов, помещенных в анизотропную матрицу. Показано, что в приближении однонаправленного распространения система редуцированных уравнений Максвелла–Блоха может быть полностью интегрируемой. Для частного случая модели приведены солитонные решения, описывающие эволюцию импульсов поля. Показано, что, изменяя параметры анизотропии внешней среды, можно контролировать параметры импульсов.

DOI: 10.1134/S0044451019110063

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные явления, связанные с эволюцией ультракоротких импульсов света в прямолинейных изотропных средах, содержащих резонансные атомы или молекулы, исследуются в рамках уравнений Максвелла–Блоха длительное время, см., например, [1–4]. Особенное значение имеют полностью интегрируемые модели [5], в рамках которых можно найти многосолитонные и другие решения, исследовать взаимодействие импульсов поля. Интегрируемые редуцированные уравнения Максвелла–Блоха (РУМБ) [6–9] описывают явление самоиндуцированной прозрачности в двухуровневой среде для линейной поляризации однокомпонентного поля вне рамок приближения медленно меняющейся огибающей. Обобщение на случаи двухкомпонентного поля в моделях нелинейной оптики и двух-, трехкомпонентного поля в акустических моделях было сделано автором и другими [10–21]. В этих работах представлены интегрируемые обобщения РУМБ, описывающие поляризационные эффекты в атомах, находящихся в однородных изотропных средах. Оптические характеристики атомов определяются значениями дипольных переходов и частот. Представляет практический интерес исследование влияния анизотропных характеристик матрицы на эволюцию

ультракоротких импульсов поля в двухуровневой атомной среде как дополнительных параметров. Изменение линейных оптических характеристик матрицы открывает новые возможности управления параметрами импульсов поля, которые отсутствуют в изотропном варианте. В связи с описанием эволюции импульсов поля без огибающей представляет интерес нахождение полностью интегрируемых моделей в таких системах. В настоящей работе приводится интегрируемое обобщение РУМБ, описывающее динамику поляризации поля в среде двухуровневых атомов, имплантированных в линейную анизотропную среду.

## 2. ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ И ЕЕ СВОЙСТВА

Редуцированные уравнения Максвелла–Блоха для среды двухуровневых атомов, взаимодействующих с двухкомпонентным полем, имеют вид [6–8, 11, 15, 16]

$$\frac{\partial \mathcal{E}_\perp}{\partial z} = -2\pi d_0 n_0 \epsilon \frac{\partial \mathbf{S}_\perp}{c \partial t'}, \quad (1)$$

$$\hbar \partial_t \mathbf{S} = d_0 [\mathcal{E}, \mathbf{S}]. \quad (2)$$

Здесь  $t' = t - z/c$  и  $t, z, n_0, d_0$  — временная, пространственная переменные, плотность атомов и дипольный момент перехода соответственно,  $c$  — фазовая скорость поля в среде;  $\mathcal{E}_\perp = \{\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y\}$ ,  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \hbar\omega/d_0\}$ ,  $\mathbf{S}_\perp = \{S_x, S_y\}$ ,  $\mathbf{S} = \{S_x, S_y, S_z\}$ ;

\* E-mail: zabolotskii@iae.nsk.su

$\hbar\omega$  — энергия перехода. В отличие от цитированных выше работ здесь дополнительно учтена анизотропия матрицы, в которую помещены атомы. Безразмерный тензор анизотропии имеет вид

$$\epsilon = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Обозначим  $E_{x,y} = d_0 \mathcal{E}_{x,y} / (\hbar\omega)$ ,  $\tau' = -\omega t'$ ,  $\chi = z 2\pi n d_0^2 (c\hbar)^{-1}$ . В новых обозначениях уравнения (1)–(3) имеют вид

$$\frac{\partial E_x}{\partial \chi} = a(S_y - d_y E_y S_y) + b(-S_y + d_x E_x S_z), \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial \chi} = d(-S_x + d_x E_x S_z) + b(S_y - d_y E_y S_z), \quad (5)$$

$$\partial_{\tau'} S_x = S_y - E_y S_z, \quad (6)$$

$$\partial_{\tau'} S_y = -S_x + E_x S_z, \quad (7)$$

$$\partial_{\tau'} S_z = E_y S_x - E_x S_y. \quad (8)$$

Система уравнений (4)–(8) допускает представление нулевой кривизны для любых  $a, d, b \in \mathbb{R}$ . Однако в общем случае не удается получить удобную для применения форму. В Приложении приведено представление для  $a = d$  и  $b \neq 0$ .

В частном случае  $\det \epsilon = 0$  производные  $\partial_z E_x$  и  $\partial_z E_y$  пропорциональны, т.е.  $E_x = q_0 E_y + E_0$ , где  $q_0$  — константа и  $E_0 = E_0(\tau')$ . Для нулевой асимптотики по  $\tau'$  получаем  $E_0 \equiv 0$ . Этот случай не рассматриваем, поскольку солитонные решения с нулевой асимптотикой приводятся к решениям РУМБ, полученным в работе [6]. Можно показать, что соответствующая спектральная проблема сводится к проблеме Захарова–Шабата [5] с действительным потенциалом.

### 2.1. Анизотропная, не гиротропная среда

Рассмотрим частный случай анизотропной среды  $a \neq d, ad > 0, b = 0$ , т.е. в среде отсутствуют гиротропные эффекты. Положим в (4)–(8)  $a = 1, d = r^2$ . Система уравнений (4)–(8) является условием совместности ( $\partial_\chi U - \partial_\tau V + [U, V] = 0$ ) двух линейных систем уравнений

$$\begin{aligned} \partial_\tau \Phi &= U\Phi \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} -i\kappa \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) & \lambda G + \frac{1}{\lambda} F \\ \lambda F + \frac{1}{\lambda} G & i\kappa \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \end{pmatrix} \Phi, \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\chi \Phi &= V\Phi \equiv \Omega(r, \lambda) \times \\ &\times \begin{pmatrix} -i\frac{\kappa}{r} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) S_z & \lambda R + \frac{1}{\lambda} Q \\ \lambda Q + \frac{1}{\lambda} R & i\frac{\kappa}{r} \left( \lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) S_z \end{pmatrix} \Phi, \quad (10) \end{aligned}$$

где  $\lambda$  — спектральный параметр,  $\kappa = \sqrt{1 - r^2}/2$ ,  $G = irE_x - E_y$ ,  $F = G^*$ ,  $R = iS_x - iS_y/r$ ,  $Q = S^*$ ,  $\tau = \kappa\tau'/(2r)$  и

$$\Omega(r, \lambda) = -\frac{4\lambda^2 r^2 \kappa}{(\lambda^2 - 1)^2 r^2 - (\lambda^2 + 1)^2}. \quad (11)$$

Отметим, что для перехода к изотропному пределу  $r \rightarrow 1$  следует заменить спектральный параметр  $\lambda \rightarrow \lambda/\kappa$ . Здесь  $r \neq 0$ . Случай  $r = 0$  был рассмотрен в работах [6, 7]. Диагональный член матрицы  $U$  с учетом нормировки координаты имеет вид  $\pm \kappa^2 (\lambda^2/\kappa^2 - \kappa^2/\lambda^2)$  и т.д. То есть в пределе  $r \rightarrow 1, \kappa \rightarrow 0$  получаем спектральную задачу Каупа–Ньюелла [22], которая использовалась в том числе при решении задач, описывающих эволюцию поля в двухуровневой среде [16, 23, 24].

Из системы (9), (10) получаем уравнения Риккати для  $\alpha(\tau, \chi) = \varphi_1/\varphi_2$ , где  $\{\varphi_1, \varphi_2\}^T$  — первый столбец матричнозначной функции  $\Phi$ ,

$$\begin{aligned} \partial_\tau \alpha &= -2i\kappa(\lambda^2 - \lambda^{-2})\alpha + \left( G\lambda + \frac{F}{\lambda} \right) - \\ &- \left( F\lambda + \frac{G}{\lambda} \right) \alpha^2, \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\chi \alpha &= \Omega(r, \lambda) \left[ -2i\frac{\kappa}{r}(\lambda^2 - \lambda^{-2})R_z \alpha + \right. \\ &\left. + \left( R\lambda + \frac{Q}{\lambda} \right) - \left( Q\lambda + \frac{R}{\lambda} \right) \alpha^2 \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

Линейные системы (9), (10) обладают следующими свойствами симметрии:

$$1) \quad W(1/\lambda) = \sigma_1 W(\lambda) \sigma_1, \quad (14)$$

$$2) \quad W(-\lambda) = \sigma_3 W(\lambda) \sigma_3, \quad (15)$$

$$3) \quad W^*(\lambda^*) = \sigma_1 W(\lambda) \sigma_1, \quad (16)$$

где  $W = U, V$  и  $\sigma_1, \sigma_3$  — матрицы Паули. В равенстве (16) учтена редукция  $G = F^*$ . Соответственно для решений уравнений Риккати находим свойства симметрии

$$1) \quad \lambda \rightarrow 1/\lambda, \quad \alpha \rightarrow 1/\alpha,$$

$$2) \quad \lambda \rightarrow -\lambda, \quad \alpha \rightarrow -\alpha,$$

$$3) \quad \lambda \rightarrow \lambda^*, \quad \alpha \rightarrow 1/\alpha^*.$$

### 3. РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ

#### 3.1. $N$ -солитонное решение

Солитонные решения строим, используя технику преобразования Дарбу, развитую в работах [25, 26]. Пусть  $G(\chi)$ ,  $F(\chi)$  и  $\Phi$  — известные решения системы уравнений (9). Новое решение  $(\Phi^{[1]}, U^{[1]})$  получаем калибровочным преобразованием

$$\Phi^{[1]}(\lambda, \tau) = P(\lambda, \tau)\Phi(\lambda, \tau), \quad (17)$$

$$U^{[1]} = \partial_\tau P P^{-1} + P U P^{-1}, \quad (18)$$

где матричная функция  $P$  обладает симметрией:

$$P(1/\lambda) = \sigma_1 P(\lambda) \sigma_1, \quad P(-\lambda) = \epsilon \sigma_3 P(\lambda) \sigma_3, \quad (19)$$

$$\epsilon = \pm 1.$$

После преобразования матрица  $U^{[1]}$  должна иметь прежний вид:

$$U^{[1]}(\lambda, \tau) \propto \begin{pmatrix} -i\chi(\lambda^2 - \lambda^{-2}) & G^{[1]}(\tau)\lambda + \frac{F^{[1]}(\tau)}{\lambda} \\ F^{[1]}(\tau)\lambda + \frac{G^{[1]}(\tau)}{\lambda} & i\chi(\lambda^2 - \lambda^{-2}) \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В качестве примера выберем  $P = P_{-1}/\lambda + P_0 + P_1\lambda$ . Тогда из (19) находим  $P_1\sigma_3 = -\epsilon\sigma_3P_1$ . Дополнительно, из условия отсутствия элементов, пропорциональных  $\lambda^3$ , равенство (18) дает  $P_1\sigma_3 = \sigma_3P_1$ , т.е.  $\epsilon = -1$ .

$N$ -кратное преобразование Дарбу имеет вид

$$\Phi^{[N]} = P^{[N]}\Phi, \quad P^{[N]} = \sum_{l=-N}^N P_m \lambda^m. \quad (21)$$

Вместо условия (18) имеем

$$U^{[N]}P^{[N]} - \partial_\tau P^{[N]} - P^{[N]}U = 0. \quad (22)$$

$$P^{[N]} = \sum_{l=-N}^N \begin{pmatrix} p_{2l+1}\lambda^{2l+1} + p_{2l-1}\lambda^{2l-1} & p_{2l}\lambda^{2l} \\ p_{-2l}\lambda^{-2l} & p_{-2l-1}\lambda^{-2l-1} + p_{-2l+1}\lambda^{-2l+1} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Аналогично уравнению (28) получаем

$$\sum_{k=-n}^n [p_{2k+1}\lambda^{2k+1} + p_{2k-1}\lambda^{2k-1}] + \beta_a \sum_{l=-n}^n p_{2l}\lambda_a^{2l} = 0, \quad a = 1, 2, \dots, 2N. \quad (30)$$

Потенциал находим, сравнивая коэффициенты при  $\lambda^{\pm N}$  для внедиагональных элементов матрицы (22). В итоге находим

$$G^{[N]} = \frac{2i\chi p_{N-1} + p_N G^{[0]}}{p_{-N}}, \quad (31)$$

$$F^{[N]} = \frac{-2i\chi p_{1-N} + p_{-N} F^{[0]}}{p_N}. \quad (32)$$

Для коэффициентов при  $\lambda^N$  в (22) находим  $\sigma_3 P_N - P_N \sigma_3 = 0$ . Обобщение условий (19) записывается как

$$P^{[N]}(1/\lambda) = \sigma_1 P^{[N]}(\lambda) \sigma_1, \quad (23)$$

$$P^{[N]}(-\lambda) = (-1)^N \sigma_3 P^{[N]}(\lambda) \sigma_3.$$

Для  $N = 2n$  матрица  $P_m$ ,  $m = 2k, 2l+1$ , имеет структуру

$$P_{2k} = \begin{pmatrix} p_{2k} & 0 \\ 0 & p_{-2k} \end{pmatrix}, \quad k = -n, \dots, n, \quad (24)$$

$$P_{2l+1} = \begin{pmatrix} 0 & p_{2l+1} \\ p_{-2l-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad l = -n, \dots, n-1. \quad (25)$$

Условие  $\det P(\lambda_n) = 0$  дает

$$P(\lambda_n, \tau)\Phi(\lambda_n, \tau)\mathbf{q}_n = 0, \quad (26)$$

где  $\mathbf{q}_n$  — нетривиальный вектор, не зависящий от  $\tau$ , см. [25]. Без потери общности перепишем (26) в виде

$$P^{[N]}(\lambda_j) \begin{pmatrix} \alpha_j(\tau, \chi) \\ 1 \end{pmatrix} \equiv 0, \quad j = 1, \dots, N. \quad (27)$$

Коэффициенты  $\alpha_j(\tau, \chi)$ ,  $j = 1, \dots, N$  — решения уравнений Риккати (12). Обозначим  $\lambda_{N+j} = \lambda_j^{-1}$ ,  $\alpha_{N+j} = \alpha_j^{-1}$ ,  $\beta_a = \alpha_a^{-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $a = 1, 2, \dots, 2N$ . Условие (27) дает  $2N$  уравнений для  $2N + 1$  неизвестных  $p_{-N}, \dots, p_N$ :

$$\sum_{k=-n}^n p_{2k}\lambda_a^{2k} + \beta_a \sum_{l=-n}^{n-1} p_{2l+1}\lambda_a^{2l+1} = 0, \quad (28)$$

$$a = 1, 2, \dots, 2N.$$

Для  $N = 2n + 1$  матрица  $P^{[N]}$  имеет вид

Зависимости  $\alpha$  от  $\tau$  и  $\chi$  можно, например, найти из уравнений Риккати (12), (13).

### 3.2. Примеры солитонных решений

#### 3.2.1. $N = 1$

Простейший вариант матрицы (19)

$$P(\lambda, \tau) = \begin{pmatrix} p_1(\tau)\lambda + p_{-1}(\tau)/\lambda & p_0(\tau) \\ p_0(\tau) & p_{-1}(\tau)\lambda + p_1(\tau)/\lambda \end{pmatrix} \quad (33)$$

имеет детерминант  $\det(P) = p_{-1}^2 - p_0^2 + p_1^2 + (\lambda^2 + \lambda^{-2})p_1p_{-1}$ . Если  $\lambda_1$  — нуль детерминанта  $\det(P)$ , то из (33) и (19) находим, что  $\det(P)$  имеет всего 4 нуля:  $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, -\lambda_1$  и  $-\lambda_1^{-1}$ . Решение алгебраической системы (28) имеет вид

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{k_1}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}}, \quad \frac{p_{-1}}{p_0} = \frac{l_1}{\lambda_1^2 - \lambda_1^{-2}}, \quad (34)$$

где

$$k_1 \equiv \frac{\alpha_1}{\lambda_1} - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}, \quad l_1 \equiv -\alpha_1\lambda_1 + \frac{1}{\alpha_1\lambda_1}. \quad (35)$$

Применяя компьютерные символьные вычисления, можно прямой подстановкой показать, что условие (18) выполняется и  $F^{[1]} = G^{[1]*}$  — решение исходной системы уравнений.

Пусть  $G^{[0]} = F^{[0]} = R^{[0]} = Q^{[0]} = 0, R_z = -1$  и  $\lambda_1 = i \exp(i\varphi)$ . Тогда решение уравнений (12), (13) имеет вид

$$\alpha_1 = \exp[\mu_1(-\tau + \chi\Omega_1)], \quad (36)$$

где

$$\mu_1 = 2\kappa \sin 2\varphi, \quad \Omega_1 = \frac{2r^2\kappa}{r^2 + 1 - 4\kappa^2 \cos(2\varphi)}. \quad (37)$$

Из (31), (34) находим простейшее солитонное решение

$$G^{[1]} = \frac{i\mu_1}{\kappa} \{ \text{sh} [\mu_1(\tau - \chi\Omega_1) - i\varphi] \}. \quad (38)$$

#### 3.2.2. $N = 2$

Берем прежнее вакуумное решение:  $G^{[0]} = F^{[0]} = R^{[0]} = Q^{[0]} = 0, R_z = -1$  и пусть  $\lambda_2 = \lambda_1^*$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= i \frac{\eta}{\kappa} e^{i\varphi}, & \lambda_2 &= \lambda_1^*, \\ \lambda_3 &= \lambda_1^{-1}, & \lambda_4 &= \lambda_2^{-1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Соответствующие функции  $\beta_k(\chi, \tau)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \exp(\theta_r + i\theta_i), & \beta_2 &= \exp(-\theta_r + i\theta_i), \\ \beta_3 &= \beta_1^{-1} = \alpha_1, & \beta_4 &= \beta_2^{-1} = \alpha_2. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь фазы  $\theta_r, \theta_i$  — действительные функции  $\chi$  и  $\tau$ , определяемые из равенства

$$\theta_r + i\theta_i = \mu_1 \left( \frac{\tau'}{2r} - \Omega_1\chi \right), \quad (41)$$

где

$$\mu_1 = i(-\eta^2 e^{2i\varphi} + (\kappa^2/\eta^2)e^{-2i\varphi}), \quad (42)$$

$$\Omega_1 = -\frac{2\eta^2 r^2}{4\eta^4 e^{2i\varphi} - 2\eta^2(r^2 + 1) + \kappa^2 e^{-2i\varphi}}. \quad (43)$$

Используя (31) и решая (28), получаем

$$G^{[2]} = -\frac{2i\kappa D_1}{D_{-2}}. \quad (44)$$

Здесь  $4 \times 4$ -детерминанты  $D_1, D_{-2}$  имеют вид

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda_1^{-2} & 1 & \lambda_1^2 & \beta_1\lambda_1^{-1} \\ \lambda_1^{*-2} & 1 & \lambda_1^{*2} & \beta_1^{*-1}\lambda_1^{*-1} \\ \lambda_1^2 & 1 & \lambda_1^{-2} & \beta_1^{-1}\lambda_1 \\ \lambda_1^{*2} & 1 & \lambda_1^{*-2} & \beta_1^*\lambda_1^* \end{vmatrix}, \quad (45)$$

$$D_{-2} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1^2 & \beta_1\lambda_1^{-1} & \beta_1\lambda_1 \\ 1 & \lambda_1^{*2} & \beta_1^{*-1}\lambda_1^{*-1} & \beta_1^{*-1}\lambda_1^* \\ 1 & \lambda_1^{-2} & \beta_1^{-1}\lambda_1 & \beta_1^{-1}\lambda_1^{-1} \\ 1 & \lambda_1^{*-2} & \beta_1^*\lambda_1^* & \beta_1^*\lambda_1^{*-1} \end{vmatrix}. \quad (46)$$

Решение для амплитуды поля имеет вид

$$\begin{aligned} G^{[2]} &= irE_x - E_y = -2i\eta \sin(2\varphi)e^{-i\theta_i} \times \\ &\times \frac{\text{ch}(\theta_r + i\varphi) + (\kappa^2/\eta^2)e^{2i\theta_i} \text{ch}(\theta_r - 3i\varphi)}{\text{ch}^2(\theta_r - i\varphi) - (\kappa^2/\eta^2)e^{-2i\theta_i} \sin^2(2\varphi)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Анизотропия среды проявляется в отличии  $\kappa$  от нуля. В пределе  $\kappa \rightarrow 0$  получаем солитонное решение, описывающее вращение круговой поляризации поля в двухуровневой среде [15, 24]. На рис. 1 и 2 показаны координатные зависимости поляризации солитона (47) соответственно для изотропной и сильно анизотропной сред.

Графики решений 1 и 2 иллюстрируют факт существенного влияния анизотропии матрицы на амплитуду и поляризацию солитонных импульсов. Здесь степень анизотропии среды, в которую имплантированы атомы, определяется коэффициентом  $r$ . Для некоторых значений амплитуд  $\eta/\kappa < 1$  и  $\lambda_1$  в решении (47) знаменатель может обращаться в нуль. Таким образом, в случае анизотропной среды амплитуда импульса поля  $E_z^2 + E_y^2$  может быть в разы больше, чем в случае изотропной.

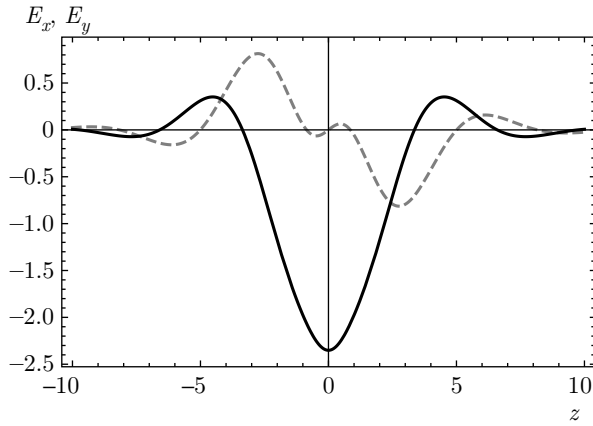


Рис. 1. Изотропная среда, отвечающая пределу  $\kappa \rightarrow 0$ ,  $\lambda_1 \rightarrow \exp(i\pi/5)$ . Зависимости  $E_x(z)$  и  $E_y(z)$  в произвольных единицах показаны штриховой и сплошной линиями соответственно

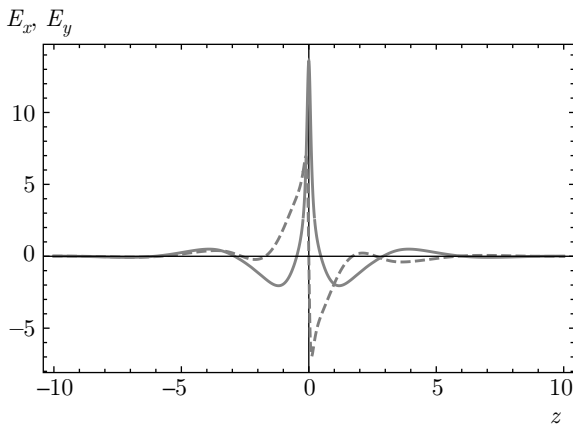


Рис. 2. То же что на рис. 1 для анизотропной среды  $r = 0.5$

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приводится обобщение интегрируемой системы, которая включает систему РУМБ, применяемую для описания эволюции импульсов поля в двухуровневой среде с учетом характеристик анизотропной матрицы, в которую эта среда имплантирована. Существенного изменения параметров атомов, таких как дипольный момент и частота перехода, в реальной системе двухуровневой среды добиться экспериментально невозможно. Плотность атомов определяет длину формирования и эволюции импульсов, но не оказывает влияния на его внутренние степени свободы. Поэтому изменение оптических свойств матрицы является новым инструментом управления параметрами импульса поля, если не включать дополнительные оптические элементы

и среды. Отметим, что для случая  $N = 1$  влияние анизотропии слабее, чем для решения с  $N = 2$ . Солитонное решение (47) в изотропном пределе  $\kappa \rightarrow 0$  приводится к решению с нелинейной фазовой модуляцией [16]. Эффекты, связанные с анизотропией, проявляются в дополнительной нелинейной модуляции как фазы, так и амплитуды импульса. Отметим, что линейные характеристики среды, в которую помещена нелинейная среда, приводят к критическому изменению нелинейной динамики солитонов, но не нарушают интегрируемость модели. Метод построения солитонных решений, примененный в настоящей работе, может быть использован для построения  $N$ -солитонного решения. Из свойств симметрии спектральной задачи следует, что ее собственные значения появляются парами  $\{\lambda_n, 1/\lambda_n\}$ . То есть простейшим нетривиальным решением рассмотренной здесь модели является аналог бризера вместо  $N = 1$  солитона в случае  $2\pi$ -импульсов РУМБ [4, 6].

Случай гиротропной среды  $b \neq 0$  дает еще один параметр для контроля характеристик солитонов. Представляет также интерес интегрируемое обобщение РУМБ на случай ненулевого постоянного дипольного момента двухуровневой среды. Однако эти интегрируемые модели требуют отдельного рассмотрения ввиду их сложности.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-02-00379) и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (грант № АААА-А17-117060810014-9).

#### ПРИЛОЖЕНИЕ

##### Представление нулевой кривизны для гиротропной среды

Представление нулевой кривизны уравнений (4)–(8) для  $a = d = 1$ ,  $b \neq 0$  имеет вид

$$\partial_\tau \psi = \begin{bmatrix} -i\lambda & \mu_x E_x + \mu_y E_y \\ \tilde{\mu}_x E_x + \tilde{\mu}_y E_y & i\lambda \end{bmatrix} \psi, \quad (\text{A.1})$$

$$\partial_\chi \psi = \begin{bmatrix} i\alpha S_z & \gamma S_x + \beta S_y \\ \tilde{\gamma} S_x + \tilde{\beta} S_y & -i\alpha P_z \end{bmatrix} \psi. \quad (\text{A.2})$$

Здесь  $k$  — спектральный параметр и

$$\lambda = \frac{bk}{k^2(b-1) + 1 + b}, \quad (\text{A.3})$$

$$\mu_x = -\frac{\sqrt{b}}{2} \frac{k+i}{\sqrt{1+b} - k\sqrt{1-b}}, \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{\mu}_x = \frac{\sqrt{b}}{2} \frac{k-i}{\sqrt{1+b} + k\sqrt{1-b}}, \quad (\text{A.5})$$

$$\mu_y = \frac{\sqrt{b}}{2} \frac{k-i}{\sqrt{1+b} - k\sqrt{1-b}}, \quad (\text{A.6})$$

$$\tilde{\mu}_y = -\frac{\sqrt{b}}{2} \frac{k+i}{\sqrt{1+b} + k\sqrt{1-b}}, \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha = \frac{bk}{k^2 - 1}, \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{b}}{2} \frac{k+i}{k^2 - 1} \left( \sqrt{1+b} + k\sqrt{1-b} \right), \quad (\text{A.9})$$

$$\tilde{\gamma} = -\frac{\sqrt{b}}{2} \frac{k-i}{k^2 - 1} \left( \sqrt{1+b} - k\sqrt{1-b} \right), \quad (\text{A.10})$$

$$\beta = -\frac{\sqrt{b}}{2} \frac{k-i}{k^2 - 1} \left( \sqrt{1+b} + k\sqrt{1-b} \right), \quad (\text{A.11})$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\sqrt{b}}{2} \frac{k+i}{k^2 - 1} \left( \sqrt{1+b} - k\sqrt{1-b} \right). \quad (\text{A.12})$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. F. T. Arecchi and R. Bonifacio, *IEEE J. Quant. Electron.* **1**(4), 169 (1965).
2. L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Dover, New York (1987).
3. A. I. Maimistov, A. M. Basharov, S. O. Elyutin, and Yu. S. Sklyarov, *Phys. Rep.* **191**, 1594 (1990).
4. А. И. Маймистов, *КЭ* **40**, 756 (2010).
5. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
6. J. K. Eilbeck, *J. Phys. A: Math. Gen.* **5**, 1355 (1972).
7. J. K. Eilbeck, J. D. Gibbon, P. J. Caudrey, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, 1337 (1973).
8. P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon, and R. K. Bullough, *J. Phys. A: Math. Gen.* **6**, L53 (1973).
9. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Phys. D* **138**, 134 (2000).
10. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **121**, 1012 (2002).
11. А. А. Заболотский, *Письма в ЖЭТФ* **77**, 558 (2003).
12. A. A. Zabolotskii, *Phys. Rev. E* **67**, 066606 (2003).
13. A. A. Zabolotskii, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 8077 (2003).
14. A. A. Zabolotskii, *Physica D: Nonlin. Phen.* **185**(2), 117 (2003).
15. А. А. Заболотский, *ЖЭТФ* **125**, 1220 (2004).
16. H. Steudel and A. A. Zabolotskii, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 5047 (2004).
17. A. A. Zabolotskii, *Phys. Rev. E* **75**, 036612 (2007).
18. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ТМФ* **164**, 222 (2010).
19. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **141**, 738 (2012).
20. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, *ЖЭТФ* **151**, 249 (2017).
21. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Phys. Rev. A* **98**, 063803 (2018).
22. D. J. Kaup and A. C. Newell, *J. Math Phys.* **19**, 798 (1978).
23. A. A. Zabolotskii, *Phys. Lett. A* **124**, 500 (1987).
24. H. Steudel and A. A. Zabolotskii, *J. Phys. A: Math. Gen.* **34**, 5297 (2001).
25. G. Neugebauer and R. Meinel, *Phys. Lett. A* **100**, 467 (1984).
26. H. Steudel, R. Meinel, and G. Neugebauer, *J. Math. Phys.* **38**, 4692 (1997).