

ПОСТНЬЮТОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ ГИБРИДНОЙ $f(R)$ -ГРАВИТАЦИИ

П. И. Дядина ^{a*}, С. П. Лабазова ^{b**}, С. О. Алексеев ^{a,c***}

^a Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Москва, Россия

^b Кафедра астрофизики и звездной астрономии, Физический факультет,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Москва, Россия

^c Кафедра квантовой теории и физики высоких энергий, Физический факультет,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119234, Москва, Россия

Поступила в редакцию 19 июня 2019 г.,
после переработки 1 июля 2019 г.
Принята к публикации 3 июля 2019 г.

На основании последних, наиболее точных значений постньютоновских параметров γ и β , полученных АМС «Мессенджер», накладываются ограничения на недавно предложенную модель гибридной $f(R)$ -гравитации в ее скалярно-тензорном представлении. Явно показано, что наличие легкого скалярного поля не противоречит экспериментальным данным не только по параметру γ (что уже было показано ранее), но и по всем остальным постньютоновским параметрам. Помимо этого, в работе обсуждается вопрос применения параметризованного постньютоновского формализма к теориям гравитации с массивными полями.

DOI: 10.1134/S0044451019110087

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время общая теория относительности (ОТО) является общепризнанной теорией гравитации, так как в течение последнего столетия многие проблемы физики были решены с ее помощью. При этом с ростом количества и качества наблюдений обнаружены явления, пока необъяснимые в рамках ОТО. Например, в конце XX столетия было установлено, что наша Вселенная ускоренно расширяется, но природа этого явления до сих пор до конца не раскрыта [1–3]. Другой загадкой современной физики является темная материя, проявляющаяся на масштабах галактик и их скоплений [4, 5]. Поиск решения этих проблем ведется различными способами: с помощью введения новых частиц или изменением геометрии пространства-времени. Вто-

рой путь приводит к появлению модифицированных моделей гравитации, которые основываются на изменении ОТО.

Среди различных способов расширения ОТО выделяется $f(R)$ -гравитация [6–9]. Действие этой теории строится путем обобщения гравитационной части действия ОТО как произвольной функции скаляра Риччи R . Такие модели получили широкое распространение после того, как $f(R)$ -гравитация была успешно применена в теориях инфляции [10]. Привлекательны $f(R)$ -модели тем, что ускоренное расширение Вселенной может возникать здесь естественным образом как следствие гравитационной теории. Помимо этого, $f(R)$ -гравитация интересна как альтернатива модели Λ CDM, поскольку она способна одновременно описывать инфляцию на ранних этапах и ускоренное расширение Вселенной, наблюдаемое в данный момент [11–18]. Более того, $f(R)$ -модели могут обеспечивать хорошее согласие с данными наблюдений, будучи почти неотличимыми от модели Λ CDM [19].

* E-mail: guldur.anwo@gmail.com

** E-mail: sp.labazova@physics.msu.ru

*** E-mail: alexeyev@sai.msu.ru

Существуют два различных способа получения уравнений поля в рамках моделей $f(R)$ -гравитации: метрический и Палатини. В метрическом подходе $g_{\mu\nu}$ — единственная динамическая переменная и действие варьируется только по ней. Метод Палатини основывается на том, что символы Кристоффеля объявляются независимыми от метрики величинами. Таким образом, варьирование происходит относительно и метрики, и символов Кристоффеля. Помимо этого, метод Палатини обеспечивает второй порядок для уравнений поля, тогда как в метрическом подходе они имеют четвертый порядок [20, 21].

Однако некоторые недостатки теории проявляются как в метрическом подходе, так и в методе Палатини. Одной из основных проблем метрической $f(R)$ -гравитации является то, что эти модели имеют сложности с прохождением стандартных тестов в Солнечной системе [22–24]. Конечно, ограниченный класс жизнеспособных моделей в метрическом подходе существует и был детально изучен в работах [15, 18, 19]. Наиболее ярко особенности $f(R)$ -гравитации проявляются в ее скалярно-тензорном представлении. В частности, ее метрическую модель можно интерпретировать как скалярно-тензорную теорию Бранса–Дикке с параметром $\omega_{BD} = 0$ (ω_{BD} — параметр Бранса–Дикке) и нетривиальным потенциалом $V(\phi)$. Чтобы теория удовлетворяла ограничениям, наложенным лабораторными экспериментами и наблюдениями в Солнечной системе, скалярное поле должно быть массивным, с диапазоном взаимодействия, не превышающим нескольких миллиметров. Такое скалярное поле, очевидно, не может влиять на космологию [25, 26]. Таким образом, метрические $f(R)$ -теории жизнеспособны только тогда, когда скалярное поле каким-то образом можно «скрыть» в локальных экспериментах, при этом на космологических масштабах оно будет вести себя как дальнедействующее поле, что достигается с помощью хамелеонного механизма [14, 25, 27, 28].

С другой стороны, $f(R)$ -модель Палатини можно представить как скалярно-тензорную теорию Бранса–Дикке с $\omega_{BD} = -3/2$ и тем же потенциалом $V(\phi)$, что и в метрической формулировке. Такая теория характеризуется нединамическим скалярным полем — превращением вакуумной модели в ОТО с эффективной космологической постоянной Λ_{eff} . Это свойство позволяет описать современное ускоренное расширение Вселенной, если Λ_{eff} мало. Несмотря на это привлекательное свойство, все изученные к настоящему моменту $f(R)$ -модели Палатини с малым Λ_{eff} приводят к неприемлемым

особенностям в эволюции космологических возмущений [29, 30].

Недавно в работе [31] была предложена теория, состоящая из суперпозиции метрического лагранжиана Эйнштейна–Гильберта с $f(R)$ -членом, построенным по методу Палатини. Модель получила название гибридной $f(R)$ -гравитации. Она исследовалась в скалярно-тензорном представлении. Было показано, что теория позволяет описывать космологическую крупномасштабную структуру, не влияя при этом на динамику Солнечной системы. Такие результаты вызвали многочисленные исследования гибридной $f(R)$ -гравитации. Космологические следствия теории рассматривались во многих работах: были исследованы статическая Вселенная Эйнштейна [32] и различные космологические модели [33, 34]; в работе [35] получены космологические решения и описано ускоренное расширение Вселенной. Более того, гибридная $f(R)$ -гравитация была изучена на астрофизических масштабах от звезд до скоплений галактик. В результате было показано, что различие вириальных и визуальных масс скоплений галактик может быть объяснено через геометрические члены в обобщенной теореме вириала [36]. Гибридная $f(R)$ -гравитация также позволяет объяснить скорости вращения пробных частиц, движущихся вокруг галактик. Этот подход предоставляет возможность избежать введения большого количества темной материи [37]. Помимо этого, получены решения типа кротовая нора [38]. Позднее были рассмотрены свойства нейтронных и кварковых звезд в данной модели [39]. Все это наводит на мысль о перспективности гибридной $f(R)$ -гравитации.

Основная концептуальная причина для введения гибридной $f(R)$ -гравитации заключается в следующем. Как подробно обсуждалось ранее, если $f(R)$ -гравитация представлена в скалярно-тензорном виде, то метрическая $f(R)$ -модель соответствует теории Бранса–Дикке с параметром $\omega_{BD} = 0$, тогда как $f(R)$ -гравитация Палатини — модели с $\omega_{BD} = -3/2$. Оба варианта несовместимы с ограничениями, накладываемыми наблюдениями в Солнечной системе, так как оригинальная теория Бранса–Дикке предсказывает, что $\omega_{BD} \rightarrow \infty$. Это несоответствие преодолевается, если рассмотреть такое действие, в котором стандартная часть ОТО, т.е. R , определяется согласно метрическому подходу, тогда как дальнейшие степени свободы гравитационного поля, т.е. $f(\mathfrak{R})$ задаются по методу Палатини. В этом случае скалярное поле является динамическим и устраняются недостатки как метрических моделей, так и моделей

Палатини. Привлекательной особенностью теории является то, что она допускает нестандартное скалярно-тензорное представление в терминах динамического скалярного поля (в отличие от моделей Палатини), которое не обязано иметь большую массу, чтобы соответствовать данным, полученным из лабораторных экспериментов и из наблюдений в Солнечной системе. Особенностей в эволюции космологических возмущений, которые появляются в моделях Палатини, здесь также не возникает, потому что скалярное поле слабо связано с веществом. Следовательно, в этой теории скалярное поле может играть активную роль в космологии, не вступая в противоречие с локальными экспериментами. Мы отсылаем читателя к работе [40] для обзора мотиваций для введения гибридной $f(R)$ -гравитации.

Ранее следствия гибридной $f(R)$ -гравитации изучались как на космологических масштабах, так и в пределе слабого поля. На теорию были наложены ограничения на основе экспериментальных данных по определению гравитационной постоянной и отклонению луча света в гравитационном поле Солнца (эксперимент «Кассини») [34]. Однако наиболее полным тестом теории гравитации в Солнечной системе является ее рассмотрение в рамках параметризованного постньютоновского формализма. Этому вопросу и посвящена данная работа. Основной нашей целью является ограничение теории с учетом последних наиболее точных значений постньютоновских параметров (γ и β), полученных из данных АМС «Мессенджер» [41–44].

Параметризованный постньютоновский (ППН) формализм был создан Уиллом и Нордтведтом [45–48]. В рамках ППН-формализма метрики различных гравитационных теорий представляют в виде обобщенной ППН-метрики, включающей ППН-потенциалы и ППН-параметры. Различия между гравитационными моделями и наблюдениями выражаются через набор из 10 ППН-параметров, в то время как форма ППН-потенциалов в различных теориях остается неизменной.

Картина меняется, когда в теории есть массивные поля. В этом случае метрика содержит не только стандартные ППН-потенциалы, но и потенциалы юкавского типа. Таким образом, ППН-формализм нельзя напрямую применить к моделям гравитации с массивными полями [49]. Существуют два способа модифицировать ППН-формализм. Первый заключается во введении новых ППН-потенциалов, включая потенциалы юкавского типа. В этом случае новые ППН-параметры остаются постоянными, одна-

ко необходимо обеспечить их связь со стандартными ППН-параметрами и с экспериментами в Солнечной системе [50]. Второй способ подразумевает сохранение стандартной формы ППН-потенциалов, но ППН-параметры становятся функциями, зависящими от пространственной переменной [51]. При этом ППН-параметры перестают быть константами, теряя свою универсальность, а их измеренное в эксперименте значение теперь зависит от расстояния, на котором проводился эксперимент. Тем не менее, этот метод также применим для проверки и ограничения моделей гравитации с массивными полями на конкретном расстоянии. В настоящей работе мы используем второй способ модификации ППН-формализма и накладываем ограничения на гибридную $f(R)$ -гравитацию в режиме слабого поля.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 рассматриваются действие и уравнения поля гибридной $f(R)$ -гравитации в общем виде и в скалярно-тензорном представлении. В разд. 3 обсуждается ППН-формализм, решаются постньютоновские уравнения и выводятся аналитические выражения для эффективных ППН-параметров в рамках гибридной $f(R)$ -гравитации. В разд. 4 рассматриваются ограничения на гибридную $f(R)$ -гравитацию с использованием наблюдаемых значений ППН-параметров. В разд. 5 представлены краткое изложение основных результатов работы и их обсуждение.

В работе греческие индексы (μ, ν, \dots) пробегают значения 0, 1, 2, 3 и используется сигнатура $(-, +, +, +)$. Все вычисления выполнены в системе единиц СГС.

2. ГИБРИДНАЯ $f(R)$ -ГРАВИТАЦИЯ

Действие гибридной $f(R)$ -гравитации имеет следующий вид [40]:

$$S = \frac{c^4}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(\mathfrak{R})] + S_m, \quad (1)$$

где c — скорость света, $k^2 = 8\pi G$, R — скалярная кривизна, $\mathfrak{R} = g^{\mu\nu} \mathfrak{R}_{\mu\nu}$ — кривизна Палатини, g — определитель метрики, S_m — действие материи. Здесь кривизна Палатини \mathfrak{R} определяется как функция $g_{\mu\nu}$ и символов Кристоффеля, не зависящих от метрики $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= g^{\mu\nu} \mathfrak{R}_{\mu\nu} = \\ &= g^{\mu\nu} (\hat{\Gamma}_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \hat{\Gamma}_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \hat{\Gamma}_{\alpha\lambda}^\alpha \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \hat{\Gamma}_{\mu\lambda}^\alpha \hat{\Gamma}_{\alpha\nu}^\lambda). \end{aligned} \quad (2)$$

Как и другие $f(R)$ -теории, гибридную $f(R)$ -гравитацию (1) можно представить как скалярно-тензорную модель:

$$S = \frac{c^4}{2k^2} \int d^4x \sqrt{-g} \times \left[(1 + \phi)R + \frac{3}{2\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \right] + S_m, \quad (3)$$

где ϕ — скалярное поле, $V(\phi)$ — скалярный потенциал. Здесь и ниже мы используем представление Йордана. После варьирования и нескольких преобразований можно получить уравнения поля в скалярно-тензорном представлении [31, 40]:

$$(1 + \phi)R_{\mu\nu} = \frac{k^2}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) - \frac{3}{2\phi} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[V(\phi) + \nabla_\alpha \nabla^\alpha \phi \right] + \nabla_\mu \nabla_\nu \phi, \quad (4)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi - \frac{1}{2\phi} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{\phi[2V(\phi) - (1 + \phi)V_\phi]}{3} = -\frac{k^2}{3c^4} \phi T. \quad (5)$$

В отличие от моделей Палатини, в гибридной $f(R)$ -гравитации скалярное поле является динамическим. Таким образом, теория не подвержена неустойчивостям, проявляющимся на малых масштабах в моделях Палатини [31, 40].

3. ППН-ПРЕДЕЛ ГИБРИДНОЙ $f(R)$ -ГРАВИТАЦИИ

ППН-формализм был создан для сравнения различных теорий гравитации между собой и с экспериментом [48]. Постньютоновский (ПН) предел достигается в пределе малых скоростей, асимптотически плоского пространственно-временного фона и слабых гравитационных полей. Таким образом, ППН-формализм позволяет проверять теории гравитации в Солнечной системе с высокой точностью.

Изначально Уилл и Нордтведт (создатели ППН-формализма) развивали несколько разные подходы [45, 46]: Нордтведт исследовал постньютоновскую метрику для системы точечных гравитирующих масс, тогда как Уилл рассматривал материю системы в приближении идеальной жидкости [45, 46]. Позднее было показано, что оба метода эквивалентны [47]. Мы применяем подход Нордтведта.

Для рассмотрения гибридной $f(R)$ -гравитации в пределе слабого поля разложим скалярное ϕ и тензорное $g_{\mu\nu}$ поля относительно их фоновых значений:

$$\phi = \phi_0 + \varphi, \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (6)$$

где ϕ_0 — асимптотическое значение скалярного поля вдали от источника, $\eta_{\mu\nu}$ — метрика Минковского, $h_{\mu\nu}$ и φ — малые возмущения соответственно тензорного и скалярного полей. В общем случае ϕ_0 не является константой, а представляет собой функцию, зависящую от времени, $\phi(t)$. Однако этой зависимостью можно пренебречь, если характерная шкала времени велика по сравнению с динамической шкалой времени, связанной с локальной системой. Таким образом, ϕ_0 предполагается постоянной величиной.

Полный постньютоновский предел требует оценки различных компонент возмущений метрики и скалярного поля до следующих порядков: $h_{00} \sim \sim O(2) + O(4)$, $h_{0j} \sim O(3)$, $h_{ij} \sim O(2)$ и $\varphi \sim O(2) + O(4)$ [48]. Тогда скалярный потенциал $V(\phi)$ представим в виде разложения Тейлора относительно фонового значения скалярного поля ϕ_0 в следующем виде:

$$V(\phi) = V_0 + V' \varphi + \frac{V'' \varphi^2}{2!} + \frac{V''' \varphi^3}{3!} + \dots \quad (7)$$

Его производная по φ примет вид $V_\phi = V' + V'' \varphi + V''' \varphi^2 / 2$.

Тензор энергии-импульса для системы точечных гравитирующих масс определяется как

$$T^{\mu\nu} = \frac{c}{\sqrt{-g}} \sum_a m_a \frac{u^\mu u^\nu}{u^0} \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (8)$$

где m_a — масса a -й частицы, \mathbf{r}_a — радиус-вектор a -й частицы, $u^\mu = dx_a^\mu / d\tau_a$ — четырехскорость a -й частицы, $d\tau = \sqrt{-ds^2} / c$, $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ — интервал, $u_\mu u^\mu = -c^2$, $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t))$ — трехмерная дельта-функция Дирака.

В постньютоновском приближении компоненты тензора энергии-импульса (8) и его след принимают вид

$$T_{00} = c^2 \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \left[1 - \frac{3}{2} h_{00} + \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{c^2} - \frac{1}{2} h \right], \quad (9)$$

$$T_{0i} = -c \sum_a m_a v_a^i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (10)$$

$$T_{ij} = \sum_a m_a v_a^i v_a^j \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (11)$$

$$T = -c^2 \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \times \left[1 - \frac{1}{2} h_{00} - \frac{1}{2} \frac{v_a^2}{c^2} - \frac{1}{2} h \right], \quad (12)$$

где v_a — скорость a -й частицы.

Для вывода уравнений поля (4) и (5) в пределе слабого поля (6) применим калибровку Натку [52]:

$$h_{\beta,\alpha}^\alpha - \frac{1}{2} \delta_{\beta}^\alpha h_{\mu,\alpha}^\mu = \frac{\varphi_{,\beta}}{1 + \phi_0}. \quad (13)$$

3.1. Решения для $\varphi^{(2)}$, $h_{00}^{(2)}$, $h_{ij}^{(2)}$

Начнем с ньютоновского предела гибридной $f(R)$ -гравитации. Уравнение поля (5) в терминах возмущений (6), в ведущем порядке ($O(2)$) принимает вид

$$(\nabla^2 - m_\varphi^2) \varphi^{(2)} = \frac{k^2 \phi_0}{3c^2} \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad (14)$$

где

$$m_\varphi^2 = [2V_0 - V' - (1 + \phi_0)\phi_0 V'']/3$$

— масса скалярного поля. Член нулевого порядка $\phi_0[2V_0 - (1 + \phi_0)V']/3$, появляющийся в уравнении, может быть поглощен переопределением координат. Верхний индекс «(2)» обозначает порядок возмущений.

Используя общее решение экранированного уравнения Пуассона и свойства дельта-функции Дирака, можно получить решение уравнения (14):

$$\varphi^{(2)} = -\frac{k^2 \phi_0}{12\pi c^2} \sum_a m_a \frac{e^{-m_\varphi r_a}}{r_a}, \quad (15)$$

где $r_a = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|$.

Выразим 00-компоненту уравнения (4) в ведущем порядке $O(2)$:

$$\nabla^2 \left(h_{00}^{(2)} - \frac{\varphi^{(2)}}{1 + \phi_0} \right) = -\frac{k^2}{c^2(1 + \phi_0)} \times \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) + \frac{V_0}{1 + \phi_0}. \quad (16)$$

Используя полученное выражение для $\varphi^{(2)}$ (15) и предполагая, что главный вклад в метрику Солнечной системы дает Солнце, находим решение для $h_{00}^{(2)}$:

$$h_{00}^{(2)} = \frac{k^2}{4\pi(1 + \phi_0)c^2} \frac{M}{r} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r} \right) + \frac{V_0}{1 + \phi_0} \frac{r^2}{6}, \quad (17)$$

где M — масса Солнца. Здесь $V_0/(\phi_0 + 1)$ — космологическая постоянная. Этот член пренебрежимо мал на масштабах Солнечной системы, поэтому ниже мы его не учитываем.

Из (17) можно выразить эффективную гравитационную постоянную [31, 40]:

$$G^{eff} = \frac{k^2}{8\pi(1 + \phi_0)} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r} \right). \quad (18)$$

Отметим, что верхним индексом « eff » мы обозначаем ППН-параметры, которые рассматриваются как функции, зависящие от расстояния. Верхний индекс « exp » используется для обозначения экспериментальных значений ППН-параметров. Для ППН-параметров оригинального ППН-формализма верхний индекс не используется. То же самое верно и для гравитационной постоянной.

В гибридной $f(R)$ -гравитации эффективная гравитационная постоянная не является константой, а представляет собой функцию, зависящую от расстояния. Ньютоновский предел воспроизводится двумя путями: $\phi_0 \ll 1$ или $m_\varphi r \gg 1$. Первый способ подразумевает возможность существования легкого скалярного поля, следовательно, в этом случае нет необходимости использовать экранирующие механизмы для описания динамики Солнечной системы в гибридной $f(R)$ -гравитации [31, 40].

Выразим ij -компоненты уравнений поля (4) в ведущем порядке $O(2)$:

$$\nabla^2 \left(h_{ij}^{(2)} + \delta_{ij} \frac{\varphi^{(2)}}{1 + \phi_0} \right) = -\left(\frac{k^2}{(1 + \phi_0)c^2} \times \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \frac{V_0}{1 + \phi_0} \right) \delta_{ij}, \quad (19)$$

где δ_{ij} — дельта-символ Кронекера. Получим уравнение, аналогичное $h_{00}^{(2)}$:

$$h_{ij}^{(2)} = \frac{\delta_{ij} k^2}{4\pi(1 + \phi_0)c^2} \frac{M}{r} \left(1 + \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r} \right) - \delta_{ij} \frac{V_0}{1 + \phi_0} \frac{r^2}{6}. \quad (20)$$

Для нахождения значений модифицированных ППН-параметров необходимо сравнить полученную метрику с общей ППН-метрикой для системы точечных гравитирующих масс (34), введенной Нордтведтом [47] (см. Приложение А).

После сравнения (20) с (34) эффективный ППН-параметр γ^{eff} можно выразить как [31, 40]

$$\gamma^{eff} = \frac{1 + \phi_0 e^{-m_\varphi r}/3}{1 - \phi_0 e^{-m_\varphi r}/3}. \quad (21)$$

Заметим, что γ^{eff} является функцией, зависящей от расстояния, а не константой. Современные наблюдения предсказывают, что $\gamma^{exp} \approx 1$ (в ОТО $\gamma = 1$) с высокой точностью [41–44, 53, 54]. Один из способов получить этот результат из γ^{eff} – рассмотреть случай $\phi_0 \ll 1$. Таким образом, итоговое выражение для γ^{eff} не противоречит предположению, что скалярное поле может быть легким [31, 40].

Помимо этого, есть и другой способ получения выражения для γ из решения уравнения распространения света. В работе [49] этот подход в деталях рассмотрен для массивной теории Бранса – Дикке. Ключевым моментом является учет неравенства наблюдаемой кеплеровской массы и массы, которая приводит к эффекту Шапиро. Поскольку гибридную $f(R)$ -гравитацию можно представить как скалярно-тензорную модель, выражение для γ может быть найдено тем же способом. Результат идентичен выражению (21), что означает эквивалентность двух подходов.

3.2. Решения для $\varphi^{(4)}$, $h_{00}^{(4)}$

После подстановки возмущений (6) до порядка $O(4)$ уравнения поля (4) и (5) принимают вид

$$(\nabla^2 - m_\varphi^2)\varphi^{(4)} = \frac{k^2\phi_0}{3c^2} \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \times \left[-\frac{1}{2}h_{jj}^{(2)} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \right] + h_{ij}^{(2)}\varphi_{,ij}^{(2)} + \frac{k^2}{3c^2}\varphi^{(2)} \times \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) + \varphi_{,00}^{(2)} + \frac{3\phi_0 + 1}{2\phi_0(1 + \phi_0)}(\nabla\varphi^{(2)})^2 - \frac{(\varphi^{(2)})^2}{3} \times \left[\frac{V''' \phi_0(\phi_0 + 1)}{2} + V''(\phi_0 + 1) \right], \quad (22)$$

$$\nabla^2 \left(h_{00}^{(4)} - \frac{\varphi^{(4)}}{1 + \phi_0} \right) = -\frac{k^2}{c^2(1 + \phi_0)} \times \sum_a m_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \left[-h_{00}^{(2)} + \frac{3}{2}\frac{v_a^2}{c^2} - \frac{1}{2}h_j^j \right] + h_{00,00}^{(2)} - (\nabla h_{00}^{(2)})^2 + h_{ij}^{(2)}h_{00,ij}^{(2)} - \frac{1}{1 + \phi_0}h_{ij}^{(2)}\varphi_{,ij}^{(2)} - \frac{\varphi_{,00}^{(2)}}{1 + \phi_0} - \frac{1}{1 + \phi_0}h_{00}\delta\varphi^{(2)} - \frac{\varphi^{(2)}}{1 + \phi_0}\delta h_{00}^{(2)} - \frac{1}{(1 + \phi_0)^2}(\nabla\varphi)^2. \quad (23)$$

Чтобы обеспечить адекватную космологическую картину, V_0 должен быть того же порядка, что

и плотность энергии космологической постоянной. Дополнительно будем ожидать, что $V'(\phi_0)$ – достаточно малая величина и ее вкладом можно пренебречь. Причина заключается в том, что либо скалярное поле приближается к минимуму на поздних временах, либо потенциал принимает вид $V = V_0 e^{-ak\phi}$ (где a порядка единицы), поэтому $V'(\phi_0) \sim kV_0$. Это предположение кажется правдоподобным во всех разумных моделях [55]. Следовательно, пренебрежем вкладами, содержащими V_0 , V' , умноженные на возмущения любого порядка (например, $V_0 h_{00}$), так как эти члены не должны приводить к наблюдательным следствиям на масштабах Солнечной системы.

Для решения (22) и (23) удобно использовать следующие выражения:

$$(\nabla\varphi)^2 = \frac{1}{2}(\nabla^2 - m_\varphi^2)\varphi^2 - \varphi \left(\nabla^2 - \frac{m_\varphi^2}{2} \right) \varphi, \quad (24)$$

$$(\nabla h_{00})^2 = \frac{1}{2}\nabla^2 h_{00}^2 - h_{00}\nabla^2 h_{00}. \quad (25)$$

Далее, из (22) для $\varphi^{(4)}$ находим

$$\begin{aligned} \varphi^{(4)} = & \frac{k^2\phi_0}{24\pi c^2} \sum_a m_a \partial_t \partial_t \frac{e^{-m_\varphi r_a}}{m_\varphi} + \frac{k^4\phi_0(1 + 3\phi_0)}{576\pi^2 c^4(1 + \phi_0)} \times \\ & \times \sum_a m_a \frac{e^{-m_\varphi r_a}}{r_a} \sum_b m_b \frac{e^{-m_\varphi r_b}}{r_b} + \frac{k^4\phi_0}{96\pi^2 c^4(1 + \phi_0)} \times \\ & \times \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} e^{-m_\varphi r_a} \left(1 + \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_{ab}} \right) - \\ & - \frac{k^4\phi_0(\phi_0 - 1)}{288\pi^2 c^4(1 + \phi_0)} \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} e^{-m_\varphi r_a} e^{-m_\varphi r_{ab}} + \\ & + \frac{k^2\phi_0}{24\pi c^4} \sum_a v_a^2 \frac{m_a}{r_a} e^{-m_\varphi r_a} - \frac{k^4\phi_0 m_\varphi}{96\pi^2 c^4(1 + \phi_0)} \times \\ & \times \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_{ab}} \left[-Ei(-2m_\varphi r_a) e^{-m_\varphi r_{ab}} e^{m_\varphi r_a} + \right. \\ & \left. + Ei(-2m_\varphi r_b) e^{m_\varphi r_b} - \ln(r_a) e^{-m_\varphi r_b} + \ln(r_b) e^{-m_\varphi r_b} \right] - \\ & - \left[\frac{k^4\phi_0(1 + 7\phi_0)m_\varphi}{1152\pi^2 c^4(1 + \phi_0)} + \frac{k^4\phi_0^2(1 + \phi_0)}{864\pi^2 c^4 m_\varphi} \left(V'' + \phi_0 \frac{V'''}{2} \right) \right] \times \\ & \times \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_{ab}} \left[Ei(-3m_\varphi r_b) e^{4m_\varphi r_{ab}} e^{m_\varphi r_a} - \right. \\ & \left. - Ei(-3m_\varphi r_a) e^{m_\varphi r_{ab}} e^{m_\varphi r_a} - Ei(-m_\varphi r_b) e^{-m_\varphi r_a} + \right. \\ & \left. + Ei(-m_\varphi r_a) e^{-m_\varphi r_b} \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

Здесь Ei обозначает экспоненциальный интеграл, который определяется как

$$Ei(-x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt. \quad (27)$$

Таким образом, используя решение (26) и выражения для $\varphi^{(2)}, h_{00}^{(2)}, h_{ij}^{(2)}$, из уравнения (23) получаем

$$\begin{aligned} h_{00}^{(4)} = & - \frac{k^4}{32\pi^2 c^4 (1 + \phi_0)^2} \sum_a \frac{m_a}{r_a} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_a} \right) \times \\ & \times \sum_b \frac{m_b}{r_b} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_b} \right) + \frac{k^4 \phi_0 (1 + \phi_0)}{576\pi^2 c^4 (1 + \phi_0)^2} \times \\ & \times \sum_a m_a \frac{e^{-m_\varphi r_a}}{r_a} \sum_b m_b \frac{e^{-m_\varphi r_b}}{r_b} - \frac{k^4}{32\pi^2 c^4 (1 + \phi_0)^2} \times \\ & \times \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_a} \right) \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_{ab}} \right) + \\ & + \frac{k^4 \phi_0 (\phi_0 + 1)}{288\pi^2 c^4 (1 + \phi_0)^2} \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} e^{-m_\varphi r_a} e^{-m_\varphi r_{ab}} + \\ & + \frac{k^2}{8\pi c^4 (1 + \phi_0)} \sum_a v_a^2 \frac{m_a}{r_a} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_a} \right) + \\ & + \frac{k^2}{4\pi c^4 (1 + \phi_0)} \sum_a v_a^2 \frac{m_a}{r_a} \left(1 + \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_a} \right) - \\ & - \frac{k^4 \phi_0 m_\varphi}{96\pi^2 c^4 (1 + \phi_0)^2} \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} \times \\ & \times \left[- Ei(-2m_\varphi r_a) r_a e^{-m_\varphi r_{ab}} e^{m_\varphi r_a} + \right. \\ & + Ei(-2m_\varphi r_b) r_b e^{m_\varphi r_b} - \ln(r_a) r_a e^{-m_\varphi r_b} + \\ & \left. + \ln(r_b) r_b e^{-m_\varphi r_b} \right] - \left[\frac{k^4 \phi_0 (1 + 7\phi_0) m_\varphi}{1152\pi^2 c^4 (1 + \phi_0)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{k^4 \phi_0^2}{864\pi^2 c^4 m_\varphi} \left(V'' + \phi_0 \frac{V'''}{2} \right) \right] \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{m_a m_b}{r_a r_{ab}} \times \\ & \times \left[Ei(-3m_\varphi r_b) r_b e^{4m_\varphi r_{ab}} e^{m_\varphi r_a} - \right. \\ & - Ei(-m_\varphi r_b) r_b e^{-m_\varphi r_a} + Ei(-m_\varphi r_a) r_a e^{-m_\varphi r_b} - \\ & \left. - Ei(-3m_\varphi r_a) r_a e^{m_\varphi r_{ab}} e^{m_\varphi r_a} \right] + \frac{k^2}{4\pi c^2 (1 + \phi_0)} \times \\ & \times \sum_a m_a \partial_t \partial_t \left(\frac{r_a}{2} \right) + \frac{k^2 \phi_0}{24\pi c^2 (1 + \phi_0)} \times \\ & \times \sum_a m_a \partial_t \partial_t \left(\frac{e^{-m_\varphi r_a}}{m_\varphi} \right). \quad (28) \end{aligned}$$

Сравнивая ППН-метрику гибридной $f(R)$ -гравитации с обобщенной метрикой Нордтведта (34), можно выразить оставшиеся эффективные ППН-параметры. Аналитическое выражение для β^{eff} получается из первых двух слагаемых (28). После добавления

естественного предположения, что Солнце обеспечивает главный вклад в гравитацию Солнечной системы, β^{eff} принимает вид

$$\beta^{eff} = 1 - \frac{\phi_0 (\phi_0 + 1) e^{-2m_\varphi r}}{18 \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r} \right)^2}. \quad (29)$$

Таким образом, параметр β^{eff} (так же, как и γ^{eff}) предполагает наличие двух вариантов, при которых достигается значение $\beta^{eff} \approx 1$: $\phi_0 \ll 1$ или $m_\varphi r \gg 1$.

Рассматривая члены вида $\sum_a v_a^2 m_a / r_a$, можно получить эффективные ППН-параметры $\alpha_3^{eff} = \zeta_1^{eff} = 0$. Члены вида $\sum_a \sum_{b \neq a} m_a m_b / r_a r_{ab}$ связаны с комбинацией параметров $-2\beta^{eff} + 1 + \zeta_2^{eff}$ в оригинальной метрике (34). После выделения всех членов с уже известными эффективными ППН-параметрами остаются только слагаемые с множителями, содержащими m_φ, V'', V''' . Все они должны вкладываться в ζ_2^{eff} . Здесь важно подчеркнуть, что в гибридной $f(R)$ -гравитации параметры $\alpha_3 = \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_4$ равны нулю [56], потому что выполняется полный набор постньютоновских законов сохранения (энергии, импульса, момента импульса и движения центра масс) [31, 40]. Таким образом, все вклады, умноженные на m_φ, V'', V''' , должны проявляться лишь в следующем ПН-порядке, поэтому ими можно пренебречь.

В (28) нерассмотренными остались только члены, содержащие производные по времени. Обсудим их вклад отдельно.

3.3. Решения для $h_{0i}^{(3)}$

Решение для $0i$ -компоненты уравнения поля (4) до порядка $O(3)$ имеет следующий вид:

$$h_{0i}^{(3)} = - \frac{k^2}{2(1 + \phi_0)c^3} \sum_a \frac{m_a}{r_a} v_a^i. \quad (30)$$

Мы используем конформную гармоническую калибровку (13). Чтобы привести ее к стандартной постньютоновской калибровке, проведем координатные преобразования $t = \bar{t} + \partial_{\bar{t}} X / 2c^4$ и $x^j = \bar{x}^j$. Здесь X — суперпотенциал, определяемый как $\nabla^2 X = 2G^{eff} M / r$. Переходя к новым координатам в метрике (\bar{t}, \bar{x}^j) и отбрасывая верхнюю черту у новых переменных, получаем, что решение для ij -компоненты останется прежним. В 00 -компоненте все слагае-

мые с производными по времени уходят, в то время как $0i$ -компонента принимает вид [57]

$$h_{0i}^{(3)} = -\frac{3k^2}{16\pi c^3(1+\phi_0)} \sum_a \frac{m_a v_a^i}{r_a} \times \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_a}\right) - \frac{k^2}{4\pi c^3(1+\phi_0)} \times \sum_a \frac{m_a v_a^i}{r_a} \left(1 + \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_a}\right) + \frac{k^2}{16\pi c^3(1+\phi_0)} \times \sum_a \frac{m_a r_a^i}{r_a^3} (\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{r}_a) \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi r_a}\right). \quad (31)$$

После сравнения этого выражения с обобщенной метрикой Нордтведта (34) получаем, что $\alpha_1^{eff} = \alpha_2^{eff} = 0$. Таким образом, в гибридной $f(R)$ -гравитации нет эффектов привилегированной системы отсчета.

3.4. ППН-метрика в приближении идеальной жидкости

Помимо метрики для системы точечных гравитирующих масс, нами была также получена ППН-метрика в приближении идеальной жидкости для гибридной $f(R)$ -гравитации (37). Мы приводим конечное выражение в Приложении В, здесь же представлено только обсуждение полученной метрики.

В первоначальном варианте ППН-формализма все ППН-параметры являются константами, так как изначально формализм создавался для теорий гравитации без массивных полей. Однако применение ППН-формализма к гравитационным моделям с массивными полями привело к тому, что ППН-параметры больше не являются постоянными, став функциями, зависящими от расстояния. Более того, мы обнаружили, что в приближении идеальной жидкости ППН-параметры становятся неотделимыми от ППН-потенциалов. Поэтому их выделение является трудновыполнимой задачей, а их физический смысл утрачивается. Однако некоторые детали из этой метрики извлечь можно.

В оригинальном варианте ППН-метрика в приближении идеальной жидкости (35) включает в себя 10 ППН-параметров: $\gamma, \beta, \xi, \zeta_{1,2,3,4}, \alpha_{1,2,3}$. Они эквивалентны ППН-параметрам, появляющимся в приближении системы точечных гравитирующих масс (34), но ξ и $\zeta_{3,4}$ не включены в метрику Нордтведта. Однако, сравнивая полученную метрику (37) с обобщенной метрикой Уилла (35), можно определить, что $\xi^{eff} = 0, \zeta_3^{eff} = 0$ в гибридной $f(R)$ -гравитации.

Параметр ζ_4^{eff} может быть выражен через комбинацию других ППН-параметров: $6\zeta_4 = 3\alpha_3 + 2\zeta_1 - 3\zeta_3$ [54]. Все параметры в этой комбинации равны нулю, следовательно, $\zeta_4^{eff} = 0$.

4. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ

Главной целью данной работы является наложение дополнительных ограничений на гибридную $f(R)$ -гравитацию и изучение поведения этой модели в Солнечной системе. Чтобы найти ограничения на ϕ_0 и m_φ , используем данные проекта «Мессенджер» для γ и β [43]. В этом проекте недавно были получены новые наблюдательные данные для β [58]. Однако в работе [58] авторы комбинировали γ^{exp} , полученную из наблюдений аппарата «Кассини», с данными измерений вековой и периодической прецессии орбиты Меркурия, что позволяет оценить совместно β^{exp} и J_2 . Таким образом, значение β^{exp} было найдено с использованием значения γ^{exp} , полученного на расстоянии от гравитирующего источника (Солнца), отличном от того, на котором проводился эксперимент «Мессенджера». Поэтому самые новые значения для β из работы [58] некорректно использовать для проверки массивных скалярно-тензорных теорий, так как ППН-параметры являются функциями r и их значения могут меняться в зависимости от расстояния, на котором они измерены.

В нашей работе мы ограничиваем гибридную $f(R)$ -гравитацию, используя следующие экспериментальные значения параметров γ^{exp} и β^{exp} [41,43]: $\gamma^{exp} = 1 - 0.3 \cdot 10^{-5} \pm 2.5 \cdot 10^{-5}$ и $\beta^{exp} = 1 + 0.2 \cdot 10^{-5} \pm 2.5 \cdot 10^{-5}$. Ограничения на ϕ_0 и m_φ , полученные из этих данных, показаны на рисунке. Закрашенные области отражают исключенные значения параметров. Очевидно, что γ^{exp} дает лучшие ограничения по сравнению с β^{exp} . Показано, что для всех малых значений ϕ_0 масса скалярного поля может принимать любое значение, включая самые малые. При больших значениях массы скалярного поля значения ϕ_0 могут быть любыми. Далее рассмотрим два предельных случая, которые позволяют ограничить значение ϕ_0 .

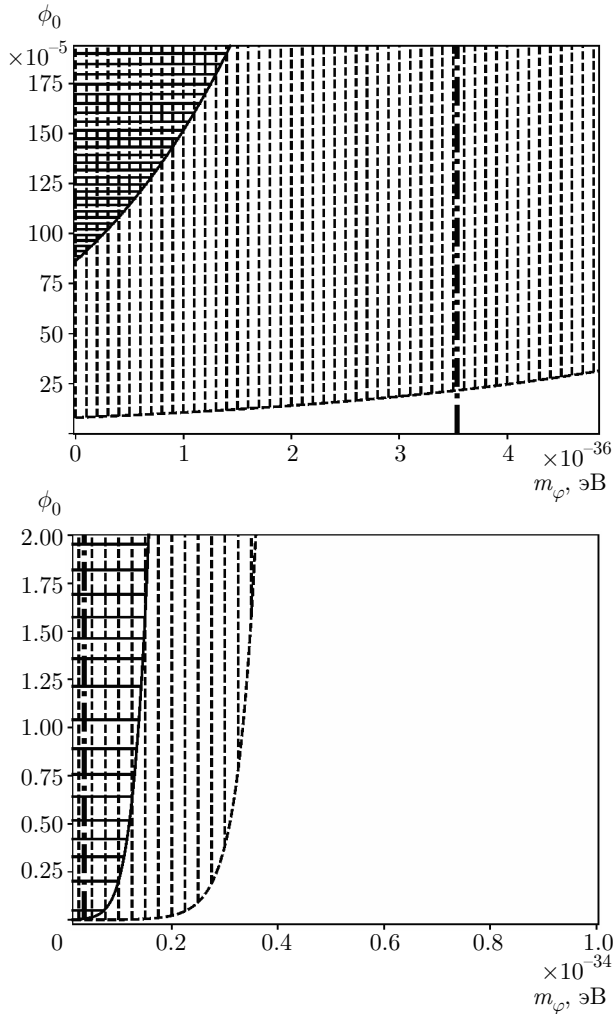
Сначала рассмотрим случай очень легкого скалярного поля: $m_\varphi r \ll 1$. Тогда можно ограничить ϕ_0 :

$$-8 \cdot 10^{-5} < \phi_0 < 7 \cdot 10^{-5} \quad (32)$$

из γ^{exp} и

$$-9 \cdot 10^{-4} < \phi_0 < 9 \cdot 10^{-4} \quad (33)$$

из β^{exp} с точностью до 2σ . Ограничения, полученные из γ^{exp} , более строгие, чем полученные из β^{exp} .



Зависимости фонового значения скалярного поля от его массы. Два графика соответствуют разным масштабам. Вертикальные штриховые линии соответствуют исключенным значениям, полученным из данных γ^{exp} ; горизонтальные сплошные линии соответствуют исключенным значениям, полученным из β^{exp} ; вертикальная штрихпунктирная линия соответствует критическому значению массы скалярного поля $m_\phi = 1/r_0$, где r_0 — расстояние от Солнца до Меркурия

В случае массивного скалярного поля $\gamma^{eff} \approx 1$ и $\beta^{eff} \approx 1$. Тогда ϕ_0 может быть ограничено из G^{eff} и его экспериментального значения [59]. В [34] показано, что в таком случае ϕ_0 имеет также очень малое значение ($|\phi_0| < 5 \cdot 10^{-4}$).

Таким образом, экспериментальные данные, полученные в рамках Солнечной системы, показывают, что параметр ϕ_0 близок к нулю. В этом случае m_ϕ может принимать любые значения, поэтому нет возможности установить ограничения на массу скалярного поля в слабополевом пределе в настоящий

момент. Однако ограничения на m_ϕ были получены из других локальных систем, например, из двойных систем с пульсаром [60].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен постньютоновский предел гибридной $f(R)$ -гравитации. Так как эта теория представима в скалярно-тензорном виде с массивным скалярным полем [31, 40], оригинальный параметризованный постньютоновский формализм [45–48, 57] не применим напрямую [49]. В этом случае возможны два пути использования ППН-формализма. Первый заключается в модифицировании ППН-формализма таким образом, чтобы включить в него не только стандартные ППН-потенциалы, но и дополнительно потенциалы юкавского типа. При таком подходе модифицированные ППН-параметры остаются константами, но требуют переопределения [50]. Второй способ заключается в сохранении ППН-потенциалов в их оригинальной форме и включении модификаций, связанных с присутствием массивных полей, в ППН-параметры. В этом случае последние уже будут не константами, а зависящими от расстояния функциями [51]. Мы использовали второй способ.

Модифицированная ППН-метрика гибридной $f(R)$ -гравитации получена нами в двух различных приближениях: системы точечных гравитирующих масс и идеальной жидкости [47]. Первый подход использован для выделения эффективных ППН-параметров. Помимо этого, показано, что во втором случае ППН-параметры не только являются зависящими от расстояния функциями, но и становятся частью ППН-потенциалов. Таким образом, чтобы использовать приближение идеальной жидкости для проверки моделей гравитации с массивными полями в пределе слабого поля, необходимо модифицировать оригинальные ППН-потенциалы, оставляя ППН-параметры константами, при этом переопределяя их.

Мы получили выражения для 10 эффективных ППН-параметров в гибридной $f(R)$ -гравитации. Из них только γ^{eff} и β^{eff} не равны нулю. Параметр γ^{eff} был получен ранее [31, 40], тогда как выражение для β^{eff} представлено впервые. Так же, как и в случае с γ^{eff} , ожидаемое значение $\beta^{eff} \approx 1$ достигается при двух условиях: $\phi_0 \ll 1$ или $m_\phi r \gg 1$. Первый позволяет скалярному полю быть очень легким, оставляя поведение в Солнечной системе без изменений, но модифицируя космологическую и га-

лактическую динамики без необходимости введения экранирующих механизмов. Более того, ранее было показано, что даже в случае очень массивного скалярного поля фоновое значение ϕ_0 должно оставаться малым ($|\phi_0| < 5 \cdot 10^{-4}$) [34]. Эта проверка основывается на эффективной гравитационной постоянной гибридной $f(R)$ -гравитации. В предположении, что скалярное поле легкое, мы наложили ограничения на фоновое значение ϕ_0 из γ^{eff} и β^{eff} , используя данные «Мессенджера» [41–44] с точностью 2σ . Показано, что ограничения, полученные из γ^{exp} , более строгие: $-8 \cdot 10^{-5} < \phi_0 < 7 \cdot 10^{-5}$.

Ранее было показано, что легкое скалярное поле в гибридной $f(R)$ -гравитации не противоречит наблюдательным данным, полученным в Солнечной системе. Вывод был сделан на основании единственного ППН-параметра γ [34, 40]. В нашей работе мы провели полный постньютоновский анализ и явно показали, что легкое скалярное поле в гибридной $f(R)$ -гравитации не противоречит экспериментальным данным не только по параметру γ , но и по всем остальным параметрам постньютоновского формализма.

Несмотря на тот факт, что гибридная $f(R)$ -гравитация согласуется с данными наблюдений в пределе слабого поля, интересно проверить следствия теории и в режиме более сильного поля, реализующегося в двойных системах с пульсаром. Некоторые ограничения уже были получены с помощью проверки гибридной $f(R)$ -гравитации на наблюдательных данных изменения орбитального периода в системах PSR J1738+0333, PSR J0737-3039 [60]. Для завершения работы требуется полный посткеплеровский тест с учетом всех посткеплеровских параметров, так как массы компонент двойных систем с пульсаром, предсказанные теорией, могут отличаться от масс, предсказанных ОТО, что влияет на конечные ограничения, накладываемые на модель [39].

Развитием данной работы может стать создание универсального аппарата для проверки теорий гравитации с массивными полями в пределе слабого поля (аналога оригинального ППН-формализма для безмассовых моделей), но эта тема требует более обширных исследований.

Благодарности. Авторы признательны Н. А. Авдееву и В. В. Колыбасовой за полезные обсуждения.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №18-32-00785).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Метрики ППН-формализма

Метрика для системы точечных гравитирующих масс имеет вид [47]

$$\begin{aligned}
 g_{00} = & -1 + 2 \sum_k \frac{G}{c^2} \frac{m_k}{r_k} - 2\beta \left(\sum_k \frac{G}{c^2} \frac{m_k}{r_k} \right)^2 + \\
 & + 2(1 - 2\beta + \zeta_2) \sum_k \frac{G}{c^2} \frac{m_k}{r_k} \sum_{j \neq k} \frac{G}{c^2} \frac{m_j}{r_{jk}} + \\
 & + (2\gamma + 1 + \alpha_3 + \zeta_1) \sum_k \frac{G}{c^4} \frac{m_k v_k^2}{r_k} - \\
 & - \zeta_1 \sum_k \frac{G}{c^4} \frac{m_k}{r_k^3} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r}_k)^2 - (\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) w^2 \times \\
 & \times \sum_k \frac{G}{c^4} \frac{m_k}{r_k^3} - \alpha_2 \sum_k \frac{G}{c^4} \frac{m_k}{r_k} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_k)^2 + \\
 & + (2\alpha_3 - \alpha_1) \sum_k \frac{G}{c^4} \frac{m_k}{r_k} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_k), \tag{34}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{0j} = & -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1) \sum_k \frac{G}{c^3} \frac{m_k v_k^j}{r_k} - \\
 & - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1) \sum_k \frac{G}{c^3} \frac{m_k}{r_k^3} (\mathbf{v}_k \cdot \mathbf{r}_k) r_k^j - \\
 & - \frac{1}{2}(\alpha_1 - 2\alpha_2) w^j \sum_k \frac{G}{c^3} \frac{m_k}{r_k} + \\
 & + \alpha_2 \sum_k \frac{G}{c^3} \frac{m_k}{r_k^3} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{r}_k) r_k^j, \\
 g_{ij} = & \left(1 + 2\gamma \sum_k \frac{G}{c^2} \frac{m_k}{r_k} \right) \delta_{ij},
 \end{aligned}$$

здесь w^i — координатная скорость системы отсчета ППН относительно системы покоя Вселенной.

Метрика в приближении идеальной жидкости [57]:

$$\begin{aligned}
 g_{00} = & -1 + 2 \frac{1}{c^2} U - 2\beta \frac{1}{c^4} U^2 + \\
 & + (2\gamma + 1 + \alpha_3 + \zeta_1 - 2\xi) \frac{1}{c^4} \Phi_1 - \\
 & - 2(2\beta - 1 - \zeta_2 - \xi) \frac{1}{c^4} \Phi_2 + 2(1 + \zeta_3) \frac{1}{c^4} \Phi_3 + \\
 & + \frac{1}{c^4} \Phi^{PF} + 2(3\gamma + 3\zeta_4 - 2\xi) \frac{1}{c^4} \Phi_4 - \\
 & - (\zeta_1 - 2\xi) \frac{1}{c^4} \Phi_6 - 2\xi \frac{1}{c^4} \Phi_W, \tag{35} \\
 g_{0j} = & -\frac{1}{2}(4\gamma + 3 + \alpha_1 - \alpha_2 + \zeta_1 - 2\xi) \frac{1}{c^3} V_j - \\
 & - \frac{1}{2}(1 + \alpha_2 - \zeta_1 + 2\xi) \frac{1}{c^3} W_j + \frac{1}{c^3} \Phi_j^{PF}, \\
 g_{ij} = & \left(1 + 2\gamma \frac{1}{c^2} U \right) \delta_{ij},
 \end{aligned}$$

где ППН-потенциалы представлены как

$$\begin{aligned}
 U &= \int G \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', & \Phi_1 &= \int G \frac{\rho'v'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \\
 \Phi_2 &= \int G \frac{\rho'U'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', & \Phi_3 &= \int G \frac{\rho'\Pi'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \\
 \Phi_4 &= \int G \frac{p'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', & V_j &= \int G \frac{\rho v_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \\
 \Phi_6 &= \int G \rho' v'_j v'_k \frac{(r-r')^j (r-r')^k}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}', \\
 \Phi_j^{PF} &= -\frac{1}{2} \alpha_1 w_j U + \alpha_2 w^k U_{ij}, \\
 \Phi_W &= \int G^2 \rho' \rho'' \frac{(r-r')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \left[\frac{(r'-r'')^j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} - \frac{(r-r'')^j}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} \right] d\mathbf{r}' d\mathbf{r}'', \\
 W_j &= \int G \frac{\rho' \mathbf{v}'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\mathbf{r}', \\
 U_{ij} &= \int G \frac{\rho'(r-r')_i (r-r')_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \\
 \Phi^{PF} &= (\alpha_3 - \alpha_1) w^2 U + \alpha_2 w^j w^k U_{ij} + (2\alpha_3 - \alpha_1) w^j V_j.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Здесь индекс «PF» обозначает потенциалы, ответственные за наличие привилегированной системы отсчета.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

5.1. ППН-метрика гибридной $f(R)$ -гравитации в приближении идеальной жидкости

$$\begin{aligned}
 g_{00} &= -1 + \frac{k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^2} \int \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' - \frac{k^4}{32\pi^2(1+\phi_0)^2c^4} \times \\
 &\times \int \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{\rho''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \right) d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}' + \frac{k^4}{32\pi^2(1+\phi_0)^2c^4} \frac{\phi_0(1+\phi_0)}{18} \times \\
 &\times \int \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\rho''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} d\mathbf{r}'' d\mathbf{r}' + \frac{k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^4} \int \frac{\Pi' \rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' + \\
 &+ \frac{k^2}{2\pi(1+\phi_0)c^4} \int \frac{\rho'v'^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' + \frac{3k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^4} \int \frac{p'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(1 + \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) d\mathbf{r}' + \\
 &+ \frac{k^4}{32\pi^2(1+\phi_0)^2c^4} \int \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] d\mathbf{r}' \int \frac{\hat{\rho}}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} \right) d\hat{\mathbf{r}} + \\
 &+ \frac{3k^4}{32\pi^2(1+\phi_0)^2c^4} \int \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] d\mathbf{r}' \int \frac{\hat{\rho}}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} \left(1 + \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} \right) d\hat{\mathbf{r}} - \\
 &- \frac{k^4}{16\pi^2(1+\phi_0)^2c^4} \int \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] d\mathbf{r}' \int \frac{\hat{\rho}}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} \right) d\hat{\mathbf{r}} + \\
 &+ \frac{k^4}{16\pi^2(1+\phi_0)^2c^4} \frac{\phi_0(1+\phi_0)}{18} \int \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \int \frac{\hat{\rho}}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} d\hat{\mathbf{r}} + \\
 &+ \frac{(7\phi_0+1)k^4\phi_0}{2304\pi^3(1+\phi_0)^2c^4} m_\varphi^2 \int \frac{e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \left(\int \frac{\hat{\rho}}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} \frac{\rho''}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} d\hat{\mathbf{r}} d\mathbf{r}'' \right) + \\
 &+ \frac{k^4\phi_0}{192\pi^3(1+\phi_0)^2c^4} m_\varphi \int \frac{e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \left(\int \frac{\hat{\rho}}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} \frac{\rho''}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} d\hat{\mathbf{r}} d\mathbf{r}'' \right) + \\
 &+ \frac{k^4\phi_0^2}{1728\pi^3c^4} \left[V'' - \frac{\phi_0}{2} V''' \right] \int \frac{e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \left(\int \frac{\hat{\rho}}{|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\hat{\mathbf{r}}|} \frac{\rho''}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}''|} d\hat{\mathbf{r}} d\mathbf{r}'' \right),
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$g_{0i} = -\frac{k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^3} \int \frac{\rho' v'_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(1 + \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d\mathbf{r}' - \frac{3k^2}{16\pi(1+\phi_0)c^3} \int \frac{\rho' v'_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d\mathbf{r}' -$$

$$-\frac{k^2}{16\pi(1+\phi_0)c^3} \int \frac{\rho' x'_i(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \left[1 - \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right] d\mathbf{r},$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{k^2}{4\pi(1+\phi_0)c^2} \int \frac{\rho'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(1 + \frac{\phi_0}{3} e^{-m_\varphi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) d\mathbf{r}'\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
2. A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
3. A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
4. F. Zwicky, *Helvetica Phys. Acta* **6**, 110 (1933).
5. J. H. Oort, *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **6**, 249 (1932).
6. P. G. Bergmann, *Int. J. Theor. Phys.* **1**, 25 (1968).
7. A. De Felice and S. Tsujikawa, *Living Rev. Rel.* **13**, 3 (2010).
8. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and V. K. Oikonomou, *Phys. Rep.* **692**, 1 (2017).
9. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rep.* **505**, 59 (2011).
10. A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
11. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **68**, 123512 (2003).
12. F. Briscese, E. Elizalde, S. Nojiri, and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **646**, 105 (2007).
13. D. Saez-Gomez, *Gen. Rel. Grav.* **41**, 1527 (2009).
14. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **657**, 238 (2007).
15. S. Nojiri and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **77**, 026007 (2008).
16. S. Nojiri, S. D. Odintsov, and D. Saez-Gomez, *Phys. Lett. B* **681**, 74 (2009).
17. G. Cognola, E. Elizalde, S. D. Odintsov, P. Tretyakov, and S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **79**, 044001 (2009).
18. G. Cognola, E. Elizalde, S. Nojiri, S. D. Odintsov, L. Sebastiani, and S. Zerbini, *Phys. Rev. D* **77**, 046009 (2008).
19. S. D. Odintsov, D. Saez-Gomez, and G. S. Sharov, *Eur. Phys. J. C* **77**, 862 (2017).
20. S. Capozziello and M. Francaviglia, *Gen. Rel. Grav.* **40**, 357 (2008).
21. T. P. Sotiriou and V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
22. T. Chiba, *Phys. Lett. B* **575**, 1 (2003).
23. G. J. Olmo, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 261102 (2005).
24. G. J. Olmo, *Phys. Rev. D* **75**, 023511 (2007).
25. J. Khoury and A. Weltman, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 171104 (2004).
26. S. Capozziello and S. Tsujikawa, *Phys. Rev. D* **77**, 107501 (2008).
27. J. Khoury and A. Weltman, *Phys. Rev. D* **69**, 044026 (2004).
28. W. Hu and I. Sawicki, *Phys. Rev. D* **76**, 064004 (2007).
29. T. Koivisto and H. Kurki-Suonio, *Class. Quant. Grav.* **23**, 2355 (2006).
30. T. Koivisto, *Phys. Rev. D* **73**, 083517 (2006).
31. T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, *Phys. Rev. D* **85**, 084016 (2012).
32. C. G. Böhmner, F. S. N. Lobo, and N. Tamanini, *Phys. Rev. D* **88**, 104019 (2013).
33. N. A. Lima and V. Smer-Barreto, *Astrophys. J.* **818**, 186 (2016).
34. I. Leanizbarrutia, F. S. N. Lobo, and D. Sáez-Gómez, *Phys. Rev. D* **95**, 084046 (2017).
35. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, *JCAP* **04**, 011 (2013).
36. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, *JCAP* **07**, 024 (2013).
37. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, *Astropart. Phys.* **50–52C**, 65 (2013).
38. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, *Phys. Rev. D* **86**, 127504 (2012).
39. B. Danila, T. Harko, F. S. N. Lobo, and M. K. Mak, *Phys. Rev. D* **95**, 044031 (2017).
40. S. Capozziello, T. Harko, T. S. Koivisto, F. S. N. Lobo, and G. J. Olmo, *Universe* **1**, 199 (2015).

41. C. M. Will, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 191101 (2018).
42. A. Fienga, J. Laskar, P. Kuchynka, H. Manche, G. Desvignes, M. Gastineau, I. Cognard, and G. Theureau, *Celestial Mech. Dyn. Astron.* **111**, 363 (2011).
43. A. Verma, A. Fienga, J. Laskar, H. Manche, and M. Gastineau, *Astron. Astrophys.* **561**, A115 (2014).
44. A. Fienga, J. Laskar, P. Exertier, H. Manche, and M. Gastineau, *Celestial Mech. Dyn. Astron.* **123**, 325 (2015).
45. K. Nordtvedt, *Phys. Rev.* **169**, 1017 (1968).
46. C. M. Will, *Astrophys. J.* **163**, 611 (1971).
47. C. M. Will and K. Nordtvedt, *Astrophys. J.* **177**, 757 (1972).
48. C. M. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (1993).
49. J. Alsing, E. Berti, C. M. Will, and H. Zaglauer, *Phys. Rev. D* **85**, 064041 (2012).
50. T. Helbig, *Astrophys. J.* **382**, 223 (1991).
51. L. Perivolaropoulos, *Phys. Rev. D* **81**, 047501 (2010).
52. Y. Nutku, *Astrophys. J.* **155**, 999 (1969).
53. B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, *Nature* **425**, 374 (2003).
54. C. M. Will, *Living Rev. Rel.* **17**, 4 (2014).
55. T. P. Sotiriou and E. Barausse, *Phys. Rev. D* **75**, 084007 (2007).
56. D. L. Lee, *Phys. Rev. D* **10**, 2374 (1974).
57. E. Poisson and C. M. Will, *Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (2014).
58. R. S. Park, W. M. Folkner, A. S. Konopliv, J. G. Williams, D. E. Smith, and M. T. Zuber, *Astron. J.* **153**, 3, 121 (2017).
59. P. J. Mohr, D. B. Newell, and B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 035009 (2016).
60. P. I. Dyadina, N. A. Avdeev, and S. O. Alexeyev, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **483**, 947 (2019).