

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ И КРИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АНТИФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА НА ОБЪЕМНО-ЦЕНТРИРОВАННОЙ КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ ВТОРЫХ БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ

А. К. Муртазаев, Д. Р. Курбанова, М. К. Рамазанов*

*Институт физики Дагестанского научного центра Российской академии наук
367015, Магачкала, Россия*

Поступила в редакцию 26 апреля 2019 г.,
после переработки 28 мая 2019 г.
Принята к публикации 28 мая 2019 г.

На основе репличного алгоритма метода Монте-Карло выполнены исследования фазовых переходов и критических свойств антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке с учетом взаимодействий первых и вторых ближайших соседей. Исследования проведены для соотношений величины обменных взаимодействий первых и вторых ближайших соседей в интервале значений $0.0 \leq r \leq 1.0$. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей. На диаграмме обнаружена область, где переход из антиферромагнитной фазы в парамагнитную является переходом первого рода. Рассчитан весь набор основных статических критических индексов. Показано, что класс универсальности критического поведения сохраняется в интервале значений $0.0 \leq r \leq 0.6$. Установлено, что изменение величины взаимодействия вторых ближайших соседей в диапазоне $0.8 \leq r \leq 1.0$ приводит к неуниверсальному критическому поведению.

DOI: 10.1134/S0044451019110142

1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитные системы с конкурирующими антиферромагнитными обменными взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей находятся в центре интенсивных исследований физики конденсированных сред уже более двух десятилетий [1–3]. Наличие конкурирующих обменных взаимодействий в магнитных материалах может привести к большому разнообразию магнитных упорядоченных состояний и фазовых переходов (ФП) между ними. Кроме того, особенности ФП при разных значениях соотношения обменных взаимодействий между первыми и вторыми ближайшими соседями известны лишь в общих чертах [4, 5].

В настоящее время двумерная модель Гейзенберга изучена достаточно хорошо и известны практически все ее свойства [6–12]. Эта модель может быть

использована для описания магнитных структур реальных материалов. Например, при малых значениях взаимодействий вторых ближайших соседей J_2 данная модель хорошо описывает свойства монослоев оксида меди в высокотемпературных оксидных сверхпроводниках на основе Cu [6, 7], а при больших значениях J_2 — антиферромагнитных материалов $\text{Li}_2\text{VO}_2\text{Si}_2\text{O}_4$ и $\text{Li}_2\text{VOGeO}_4$ [8, 9]. Наиболее хорошо двумерная модель Гейзенберга описывает монослои Fe–As в сверхпроводниках LaOFeAs [10, 11] и BaFe_2As_2 [12] на основе Fe.

В отличие от двумерного случая, трехмерная антиферромагнитная модель Гейзенберга на объемно-центрированной кубической (ОЦК) решетке с конкурирующими взаимодействиями [13–21] до сих пор мало изучена. Имеются немногочисленные работы по изучению фазовой диаграммы и термодинамических свойств квантовой антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК-решетке [13–16, 20, 21]. Для этой модели были получены интересные результаты. Однако, насколько нам известно, исследование классической модели Гейзенберга на ОЦК-решетке с

* E-mail: d_kurbanova1990@mail.ru

конкурирующими взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей до сих пор никем не проводилось.

Интерес к этой модели обусловлен еще и тем, что учет взаимодействий вторых ближайших соседей может приводить к возникновению фрустраций, что усложняет решение [17–21]. Известно, что многие физические свойства фрустрированных систем сильно отличаются от соответствующих нефрустрированных систем.

В связи с этим, в настоящей работе нами на основе метода Монте-Карло (МК) проводятся исследования ФП и критических свойств классической антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК-решетке для различных соотношений величины обменных взаимодействий первых и вторых ближайших соседей.

Из данных, полученных на сегодняшний день, нельзя однозначно определить характер ФП и закономерности изменения критического поведения данной модели, и эти вопросы до сих пор остаются открытыми. Исследование антиферромагнитной модели Гейзенберга на ОЦК-решетке с конкурирующими взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей на основе современных методов и идей позволит получить ответ на ряд вопросов, связанных с ФП, термодинамическими и критическими свойствами фрустрированных спиновых систем.

2. МОДЕЛЬ И МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Антиферромагнитная модель Гейзенберга на ОЦК-решетке с учетом взаимодействий первых и вторых ближайших соседей описывается следующим гамильтонианом [13]:

$$H = -J_1 \sum_{\langle i,j \rangle} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) - J_2 \sum_{\langle i,l \rangle} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_l), \quad (1)$$

где $|\mathbf{S}_i|$ — трехкомпонентный единичный вектор $\mathbf{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$. Первый член в формуле (1) учитывает обменное взаимодействие первых ближайших соседей ($J_1 < 0$), а второй — вторых ближайших соседей ($J_2 < 0$). Известно, что для данной модели при $J_2 = 0$ основное состояние имеет обычное антиферромагнитное упорядочение. Ненулевое обменное взаимодействие J_2 может нарушить данный порядок и привести к возникновению фрустраций. Достаточно большое значение J_2 приводит к появлению страйп-структур.

Данные, полученные на основе теории среднего поля, указывают на существование двух фаз с раз-

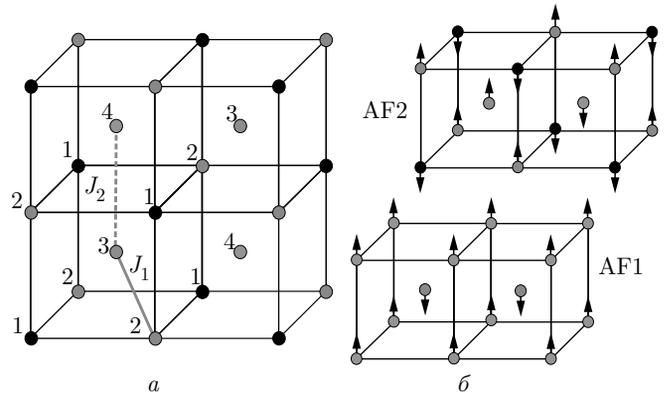


Рис. 1. а) ОЦК-решетка. Цифрами обозначены четыре подрешетки; б) AF1 и AF2 — упорядоченные фазы

личным упорядочением спинов [22]. Переход между фазой Нееля (AF1) и коллинеарной фазой (AF2) определяется соотношением взаимодействий J_2/J_1 . Для ОЦК-решетки антиферромагнитную фазу AF1 можно описать с помощью стандартной двухподрешеточной системы, как в случае двумерных моделей, характеризующейся волновыми векторами $(\pm\pi, 0, 0)$, $(0, \pm\pi, 0)$, $(0, 0, \pm\pi)$, в то время как для правильного описания антиферромагнитной фазы AF2 с волновым вектором $(\pm\pi/2, \pm\pi/2, \pm\pi/2)$ необходимо ввести четыре подрешетки. Схематически эта модель представлена на рис. 1а.

Фаза AF1 соответствует состоянию, в котором каждый спин имеет восемь ближайших соседей с антипараллельным упорядочением, и его шесть вторых ближайших соседей упорядочены параллельно (рис. 1б). Фаза AF2 может быть описана как две взаимопроникающие простые кубические решетки, каждая из которых имеет антиферромагнитное упорядочение (рис. 1б) [14–16, 23].

В настоящее время ФП фрустрированных спиновых систем на основе микроскопических гамильтонианов довольно успешно изучаются методами МК [24–27]. Методы МК позволяют исследовать физические свойства спиновых систем практически любой сложности. На их основе на сегодняшний день изучены целые классы спиновых систем и рассчитаны критические индексы широкого спектра моделей. В данном исследовании мы использовали репличный обменный алгоритм метода МК [28], который является наиболее мощным и эффективным для исследования фрустрированных спиновых систем. Более подробно этот алгоритм описан нами в работе [29].

Расчеты проводились для систем с периодическими граничными условиями и линейными размерами $2 \times L \times L \times L = N$, $L = 24 \div 90$, где L измеряется

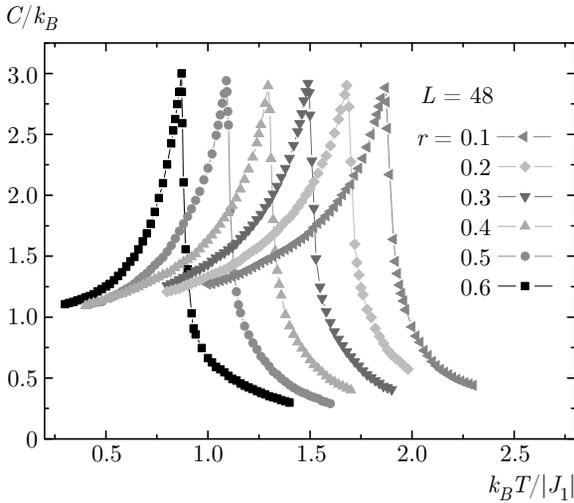


Рис. 2. Зависимость теплоемкости C/k_B от температуры $k_B T / |J_1|$ для разных r при $L = 48$

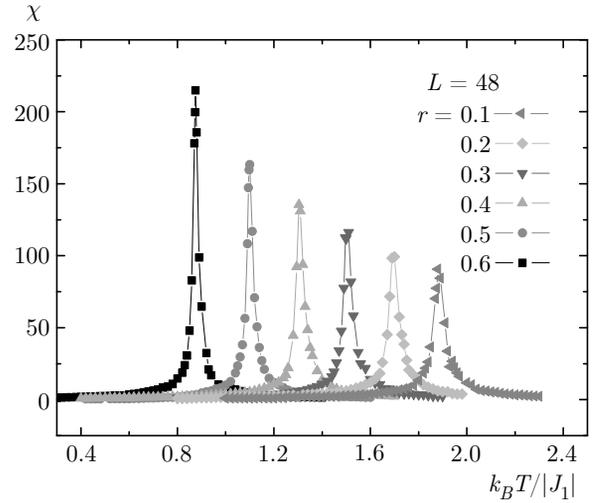


Рис. 3. Зависимость восприимчивости χ от температуры $k_B T / |J_1|$ для разных r при $L = 48$

в размерах элементарной ячейки. Соотношение величины обменных взаимодействий первых и вторых ближайших соседей $r = |J_2/J_1|$ меняется в интервале $0.0 \leq r \leq 1.0$. Для вывода системы в состояние термодинамического равновесия отсекался неравновесный участок длиной $\tau_0 = 4 \cdot 10^5$ МК-шагов на спин, что в несколько раз больше длины неравновесного участка. Усреднение термодинамических параметров проводилось вдоль марковской цепи длиной до $\tau = 500\tau_0$ МК-шагов на спин.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для наблюдения за температурным ходом теплоемкости и восприимчивости использовались выражения [30, 31]

$$C = (NK^2) (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2), \quad (2)$$

$$\chi = \begin{cases} (NK) (\langle M^2 \rangle - \langle |M| \rangle^2), & T < T_N, \\ (NK) \langle M^2 \rangle, & T \geq T_N, \end{cases} \quad (3)$$

где $K = |J_1|/k_B T$, N — число частиц, T_N — критическая температура (здесь и далее температура дана в единицах $|J_1|/k_B$), U — внутренняя энергия, M — подрешеточная намагниченность.

На рис. 2 и 3 представлены температурные зависимости теплоемкости и восприимчивости, полученные при $L = 48$ для различных значений r (здесь и далее статистическая погрешность не превышает размеров символов, использованных для построения зависимостей). На рисунках видно, что в зависимости теплоемкости C и восприимчивости χ от

температуры для всех значений r вблизи критической температуры наблюдаются хорошо выраженные максимумы, которые с ростом r смещаются в сторону более низких температур, причем увеличение значения r приводит к росту абсолютных значений максимумов восприимчивости, что обусловлено усилением флуктуаций, вследствие увеличения конкуренции первых и вторых ближайших соседей.

Для определения критической температуры T_N был использован метод кумулянтов Биндера U_L четвертого порядка [32]:

$$V_L = 1 - \frac{\langle U^4 \rangle_L}{3 \langle U^2 \rangle_L^2}, \quad (4)$$

$$U_L = 1 - \frac{\langle M^4 \rangle_L}{3 \langle M^2 \rangle_L^2}, \quad (5)$$

где V_L — кумулянт по энергии, U_L — кумулянт по намагниченности.

Выражения (4) и (5) позволяют определить критическую температуру T_N с большой точностью. Следует отметить, что применение кумулянтов Биндера дает возможность также хорошо тестировать тип ФП в системе. Известно, что в случае ФП второго рода кривые температурной зависимости кумулянтов Биндера U_L имеют четко выраженную точку пересечения [32].

На рис. 4 представлена характерная зависимость U_L от температуры для $r = 0.6$ при разных значениях L . Этот рисунок демонстрирует точность определения критической температуры. На рисунке видно, что в критической области наблюдается четко выраженная точка пересечения ($T_N = 0.871(1)$), что

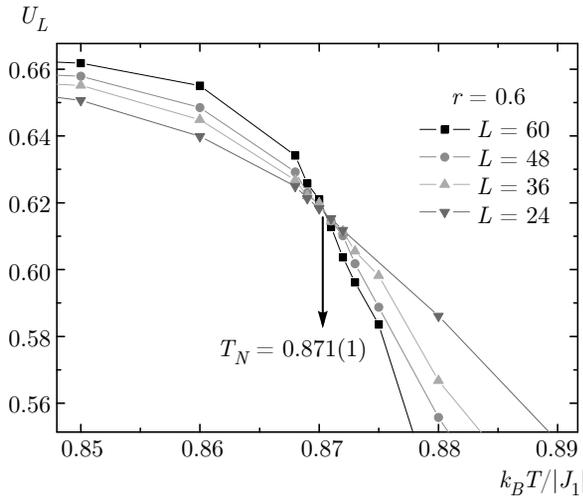


Рис. 4. Зависимость кумулянта Биндера U_L от температуры $k_B T / |J_1|$ для $r = 0.6$

свидетельствует о ФП второго рода. Аналогичным образом были определены критические температуры и для остальных значений r .

Для более подробного анализа характера ФП был также использован гистограммный анализ данных метода МК [33, 34]. Этот метод позволяет надежно определить род ФП. Определение рода ФП этим методом подробно описано нами в работах [26, 27].

Для исследуемой модели при $r = 1.0$ в работе [35] было показано, что для систем с малыми линейными размерами ($L < 48$) наблюдается ФП первого рода. Согласно данным работы [36], для модели Изинга на ОЦК-решетке при значении $r = 0.7$ для систем с малыми линейными размерами ($L \leq 60$) наблюдается ФП первого рода. Однако для систем с большими линейными размерами ($L > 60$) наблюдается ФП второго рода. Таким образом, при анализе ФП на основе гистограммного метода целесообразно рассматривать системы с большими линейными размерами ($L > 60$). В данной работе мы для получения достоверных результатов при построении гистограммы распределения энергии рассматривали системы с $L \geq 80$.

На рис. 5 представлены гистограммы распределения энергии для случая $r = 2/3$ с линейными размерами $L = 90$. Графики построены при критической температуре ($T_N = 0.670(1)$) и вблизи нее. На рисунке видно, что в зависимости вероятности W от энергии E/N для всех значений температур наблюдается один хорошо выраженный максимум, который свидетельствует в пользу ФП второго рода.

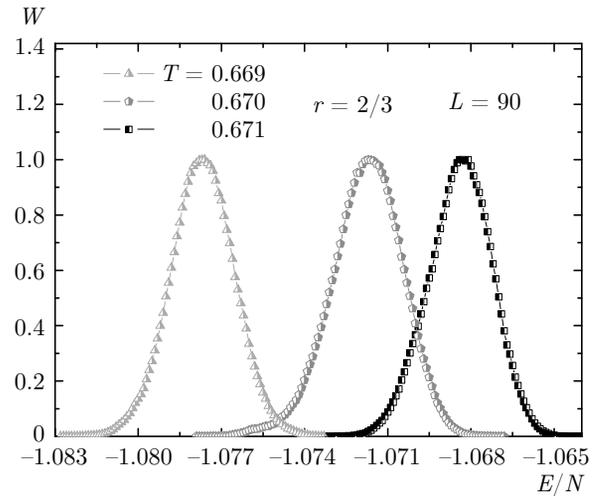


Рис. 5. Гистограмма распределения энергии для $r = 2/3$ при $L = 90$

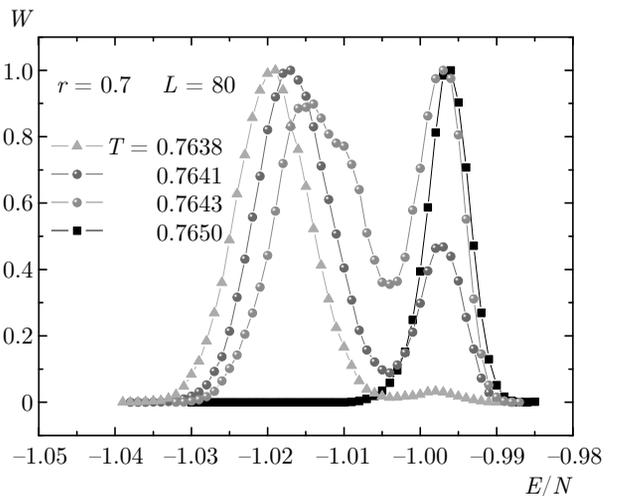


Рис. 6. Гистограмма распределения энергии для $r = 0.7$ при $L = 80$

На рис. 6 представлены гистограммы распределения энергии для системы с линейными размерами $L = 80$ для случая $r = 0.7$. Как видно на рисунке, вблизи температуры ФП ($T_N = 0.7643$) в системе наблюдается бимодальное распределение энергии. Наличие двойного максимума в зависимости вероятности W от энергии E/N является характерным признаком ФП первого рода.

Это подтверждается данными, показанными на рис. 7, где приведена временная динамика изменения внутренней энергии в ходе компьютерного моделирования для системы с линейными размерами $L = 80$ для случая $r = 0.7$. По горизонтальной оси отложено количество МК-шагов на спин (NMCS).

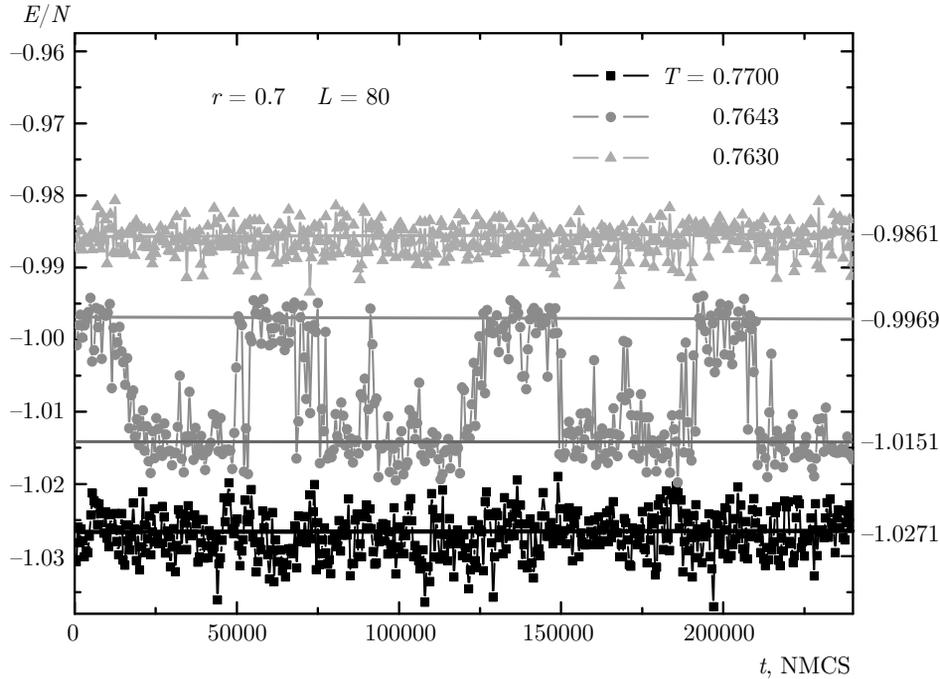


Рис. 7. Временная динамика изменения внутренней энергии при различных температурах для $r = 0.7$ при $L = 80$

Результаты приведены для трех температур: в точке ФП ($T_N = 0.7643$), а также выше и ниже критической температуры ($T = 0.7700$ и $T = 0.7630$). Как видно на рисунке, в точке ФП имеются два метастабильных энергетических уровня $E_1 = -1.0151$ и $E_2 = -0.9969$. Система совершает случайные флуктуации около этих двух энергетических состояний. Энергия E_1 соответствует первому максимуму на гистограмме распределения энергии, а E_2 — второму максимуму (рис. 6). Такое поведение временной динамики изменения внутренней энергии подтверждает наличие ФП первого рода. Аналогичное поведение наблюдается в интервале $2/3 < r \leq 0.75$.

На рис. 8 приведена фазовая диаграмма зависимости критической температуры T_N от величины r взаимодействия вторых ближайших соседей. На рисунке видно, что по мере приближения к точке $r = 2/3$, где сосуществуют три фазы, температура ФП уменьшается. Для рассмотренной модели при $r = 2/3$ система имеет минимальную температуру ФП $k_B T / J_1 = 0.670(1)$. На диаграмме видно, что в точке $r = 2/3$ пересекаются три различные фазы: антиферромагнитная — AF1, парамагнитная — PM и антиферромагнитная — AF2 [15–18]. Переход из фазы AF1 к фазе AF2 в данной модели обусловлен изменением структуры основного состояния. Согласно данным, полученным на основе теории сред-

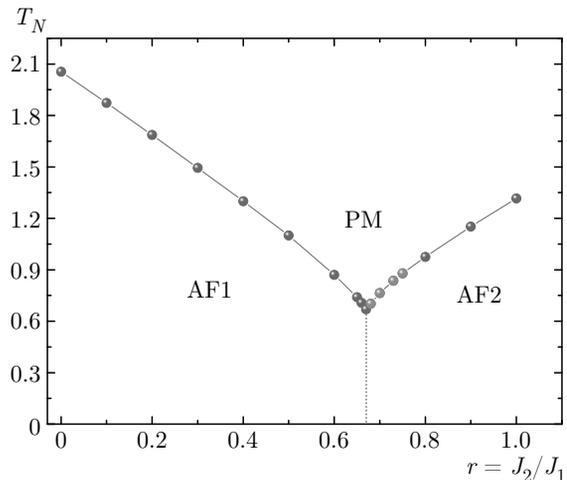


Рис. 8. Фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей

него поля [22], для модели Гейзенберга на ОЦК-решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей значение $r = 2/3$ является классической точкой перехода, где происходит ФП из фазы AF1 в фазу AF2.

Наши результаты, полученные в рамках данного исследования, показывают, что в интервалах $0.0 \leq r \leq 0.6$ и $0.8 \leq r \leq 1.0$ наблюдается ФП второго

рода. Установлено, что в интервале $2/3 < r \leq 0.75$ (на рис. 8 выделено красным цветом) переход из антиферромагнитной фазы в парамагнитную реализуется как ФП первого рода. Более подробное исследование показало, что для случая $r = 2/3$ наблюдается ФП второго рода. Диаграмма, полученная для этой модели, качественно совпадает с диаграммой трехмерной модели Изинга на ОЦК-решетке [37–39].

Для расчета статических критических индексов теплоемкости α , восприимчивости γ , параметра порядка β , радиуса корреляции ν и индекса Фишера η применялись соотношения теории конечно-размерного скейлинга (КРС) [40].

Из теории КРС следует, что в системе с размерами $L \times L \times L$ при $T = T_N$ и достаточно больших L выполняются следующие выражения [40–42]:

$$M \propto L^{-\beta/\nu}, \tag{6}$$

$$\chi \propto L^{\gamma/\nu}, \tag{7}$$

$$V_n \propto L^{1/\nu} g_{V_n}, \tag{8}$$

где g_{V_n} — некоторая постоянная, а в качестве V_n могут выступать

$$V_n = \frac{\langle M^n U \rangle}{\langle M^n \rangle} - \langle U \rangle, \quad n = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Эти выражения были нами использованы для определения β , γ и ν .

Для аппроксимации температурной зависимости теплоемкости от L на практике, как правило, используется выражение

$$C_{max}(L) = A_1 - A_2 L^{\alpha/\nu}, \tag{10}$$

где A_1 и A_2 — некоторые коэффициенты.

На рис. 9 в двойном логарифмическом масштабе представлены характерные зависимости параметров V_n при $n = 1, 2, 3$ от линейных размеров решетки L для $r = 0.2$. Как видно на рисунке, все точки на графиках в пределах погрешности хорошо ложатся на прямые. Зависимости на рисунках, проведенные в соответствии с методом наименьших квадратов, параллельны друг другу. Углы наклона прямых определяют значения $1/\nu$. Вычисленные таким образом значения ν использовались для определения критических индексов теплоемкости α , восприимчивости γ и параметра порядка β .

На рис. 10 и 11 в двойном логарифмическом масштабе представлены характерные зависимости магнитного параметра порядка M и восприимчивости χ от линейных размеров решетки L для $r = 0.2$. Все точки в пределах погрешности ложатся на прямые.

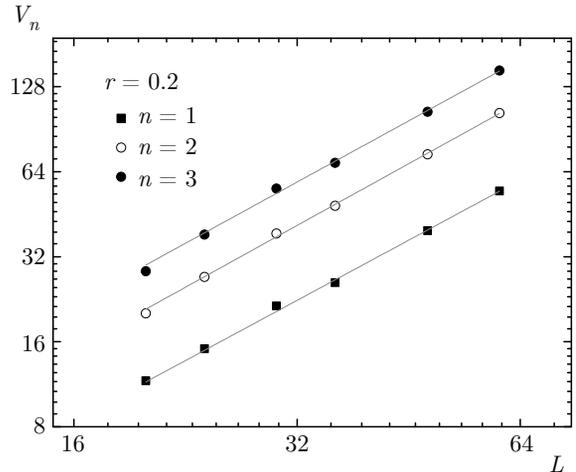


Рис. 9. Зависимость параметра V_n от линейных размеров системы L при $T = T_N$ для $r = 0.2$

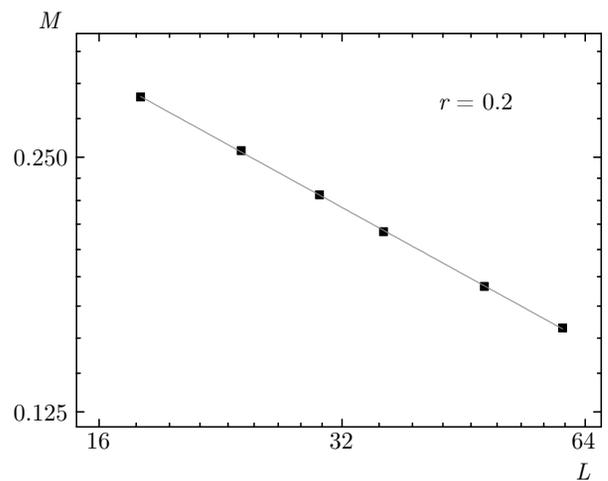


Рис. 10. Зависимость параметра порядка M от линейных размеров L системы при $T = T_N$ для $r = 0.2$

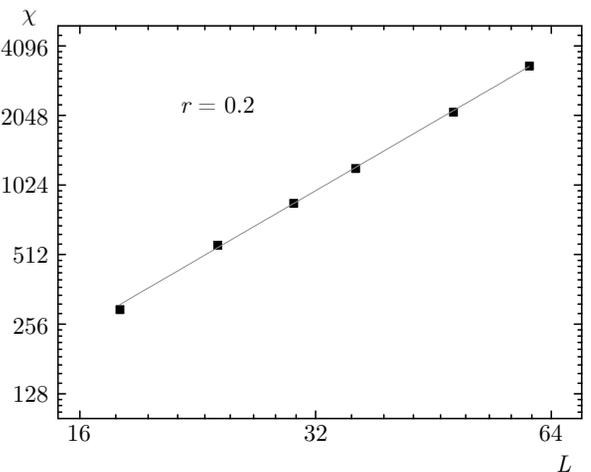


Рис. 11. Зависимость восприимчивости χ от линейных размеров L системы при $T = T_N$ для $r = 0.2$

Таблица. Значения критических индексов для трехмерной антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке

r	T_N	ν	α	β	γ	η	$\alpha + 2\beta + \gamma = 2$
0.0	2.056(1)	0.70(1)	-0.13(1)	0.37(1)	1.39(1)	0.02(1)	2.0
0.1	1.873(1)	0.70(1)	-0.12(1)	0.36(1)	1.38(1)	0.03(1)	1.98
0.2	1.687(1)	0.70(1)	-0.13(1)	0.37(1)	1.39(1)	0.02(1)	2.0
0.3	1.494(1)	0.70(1)	-0.12(1)	0.36(1)	1.39(1)	0.02(1)	1.99
0.4	1.301(1)	0.70(1)	-0.12(1)	0.36(1)	1.38(1)	0.03(1)	1.98
0.5	1.094(1)	0.70(1)	-0.12(1)	0.37(1)	1.39(1)	0.02(1)	2.01
0.6	0.871(1)	0.71(1)	-0.13(1)	0.37(1)	1.38(1)	0.03(1)	1.99
0.8	0.975(1)	0.60(1)	0.21(4)	0.29(4)	1.24(4)	0.01(4)	2.03
0.9	1.152(1)	0.61(1)	0.18(2)	0.30(1)	1.22(2)	0.02(2)	2.0
1.0	1.316(1)	0.60(1)	0.17(2)	0.30(1)	1.21(2)	0.02(2)	1.98
Нефрустрированная модель Гейзенберга [44]	—	0.7112(5)	-0.1336(15)	0.3689(3)	1.3960(9)	0.0375(5)	—

Углы наклона этих прямых определяют значения β/ν и γ/ν . По этой схеме были определены значения и для теплоемкости α/ν . С помощью данных ν вычислялись статические критические индексы α , β и γ .

Эта процедура использовалась для расчета критических индексов для значений $r = 1.0; 0.9; 0.8; 0.6; 0.5; 0.4; 0.3; 0.2, 0.1, 0$. Все значения статических критических индексов, полученные в данной работе, представлены в таблице.

Особо следует отметить процедуру, использованную нами для определения индекса Фишера η . На основе отношения между восприимчивостью χ и радиусом корреляции ξ [43]

$$\chi \propto \xi^{\gamma/\nu}, \tag{11}$$

а также соотношения $\eta = 2 - \gamma/\nu$, связывающего индексы η и ν , мы получаем

$$\ln(\chi/\xi^2) = c - \eta \ln \xi, \tag{12}$$

где c — некоторая константа. Для систем с конечными размерами $\xi = L$ при $k_B T/|J_1| = k_B T_N/|J_1|$ имеем

$$\ln(\chi/L^2) = c - \eta \ln L. \tag{13}$$

С помощью выражения (13) было определено значение индекса Фишера η . Эти данные также представлены в таблице.

Как следует из таблицы, почти все значения критических индексов, рассчитанные нами в интервале $0.0 \leq r \leq 0.6$, в пределах погрешности совпадают между собой. Это свидетельствует о том, что в этом интервале система проявляет универсальное критическое поведение. Отметим, что полученные нами значения критических индексов в пределах погрешности совпадают с соответствующими значениями критических индексов для нефрустрированной трехмерной модели Гейзенберга [44]. Это подтверждает, что в интервале $0.0 \leq r \leq 0.6$ исследуемая модель принадлежит к тому же классу универсальности критического поведения, что и трехмерная модель Гейзенберга на кубической решетке.

В интервале $0.8 \leq r \leq 1.0$ значения критических индексов отличаются от соответствующих значений из интервала $0.0 \leq r \leq 0.6$. Можно предположить, что при увеличении величины взаимодействия вторых ближайших соседей в системе происходит смена класса универсальности критического поведения. Кроме того, в интервале $0.8 \leq r \leq 1.0$ индексы меняются с изменением r . Это позволяет нам говорить о том, что в этом интервале наблюдается неуниверсальное критическое поведение.

Полученные в работе данные могут быть использованы для описания конкретных антиферромагнитных материалов, таких как FeCr, FeAl, FeCo и ряда других, имеющих ОЦК-решетку.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование фазовых переходов и критических свойств антиферромагнитной модели Гейзенберга на объемно-центрированной кубической решетке с взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей выполнено с использованием высокоэффективного репличного алгоритма метода Монте-Карло. На основе гистограммного метода и метода кумулянтов Биндера проведен анализ характера фазовых переходов для различных значений величины взаимодействия r вторых ближайших соседей. Построена фазовая диаграмма зависимости критической температуры от величины взаимодействия вторых ближайших соседей. Установлено, что в интервале значений $2/3 < r \leq 0.75$ в исследуемой модели переход из антиферромагнитной фазы в парамагнитную реализуется как фазовый переход первого рода.

Рассчитаны значения всех основных статических критических индексов в интервалах $0.0 \leq r \leq 0.6$ и $0.8 \leq r \leq 1.0$. Показано, что в интервале $0.0 \leq r \leq 0.6$ исследуемая модель проявляет универсальное критическое поведение и принадлежит к тому же классу универсальности критического поведения, что и трехмерная модель Гейзенберга. Обнаружено, что изменение величины взаимодействия вторых ближайших соседей в интервале $0.8 \leq r \leq 1.0$ приводит к неуниверсальному критическому поведению.

Финансирование. Исследование выполнено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 18-32-00391 мол-а, 19-02-00153 а, 18-32-20098 мол-а-вед).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Introduction to Frustrated Magnetism: Materials, Experiments, Theory*, Series in Solid-State Sciences 164, ed. by C. Lacroix, P. Mendels, and F. Mila, Springer, Berlin (2011).
2. S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*, 1st ed., Cambridge University Press, Cambridge (2001).
3. H. T. Diep, *Frustrated Spin Systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (2004).
4. D. P. Landau and K. Binder, *Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
5. F. A. Kassan-Ogly, B. N. Filippov, A. K. Murtazaev, M. K. Ramazanov, and M. K. Badiev, *J. Magn. Mater.* **324**, 3418 (2012).
6. E. Dagotto and A. Moreo, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 2148 (1989).
7. E. Manousakis, *Rev. Mod. Phys.* **63**, 1 (1991).
8. H. Rosner, R. R. P. Singh, W. H. Zheng, J. Oitmaa, and W. E. Pickett, *Phys. Rev. B* **67**, 014416 (2003).
9. J. Sirker, Zheng Weihong, O. P. Sushkov, and J. Oitmaa, *Phys. Rev. B* **73**, 184420 (2006).
10. Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano, and H. Hosono, *J. Amer. Chem. Soc.* **130**, 3296 (2008).
11. H. H. Wen, G. Mu, L. Fang, H. Yang, and X. Zhu, *Europhys. Lett.* **82**, 17009 (2008).
12. M. Rotter, M. Tegel, and D. Johrendt, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 107006 (2008).
13. R. Schmidt, J. Schulenburg, J. Richter, and D. D. Betts, *Phys. Rev. B* **66**, 224406 (2002).
14. J. Oitmaa and W. Zheng, *Phys. Rev. B* **69**, 064416 (2004).
15. K. Majumdar and T. Datta, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 406004 (2009).
16. M. R. Pantic, D. V. Kapor, S. M. Radošević, and P. M. Mali, *Sol. St. Comm.* **182**, 55 (2014).
17. J. Richter, P. Müller, A. Lohmann, and H.-J. Schmidt, *Phys. Proc.* **75**, 813 (2015).
18. P. Müller, J. Richter, A. Hauser, and D. Ihle, *Eur. Phys. J. B* **88**, 159 (2015).
19. D. J. J. Farnell, O. Götze, and J. Richter, *Phys. Rev. B* **93**, 235123 (2016).
20. Bin-Zhou Mi, *Sol. St. Comm.* **239**, 20 (2016).
21. Bin-Zhou Mi, *Sol. St. Comm.* **251**, 79 (2017).
22. J. S. Smart, *Effective Field Theories of Magnetism*, Saunders, Philadelphia (1966).
23. J. R. Banavar, D. Jasnow, and D. P. Landau, *Phys. Rev. B* **20**(9), 3820 (1979).
24. H. Kawamura, *J. Phys. Soc. Jap.* **61**, 1299 (1992).
25. A. Mailhot, M. L. Plumer, and A. Caille, *Phys. Rev. B* **50**, 6854 (1994).

26. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, Письма в ЖЭТФ **103**, 522 (2016).
27. М. К. Рамазанов, А. К. Муртазаев, Письма в ЖЭТФ **106**, 72 (2017).
28. A. Mitsutake, Y. Sugita, and Y. Okamoto, Biopolymers (Peptide Science) **60**, 96 (2001).
29. A. K. Murtazaev, M. K. Ramazanov, and M. K. Badiiev, Physica A **507**, 210 (2018).
30. K. Binder and J.-Sh. Wang, J. Stat. Phys. **55**, 87 (1989).
31. P. Peczak, A. M. Ferrenberg, and D. P. Landau, Phys. Rev. B **43**, 6087 (1991).
32. K. Binder and D. W. Heermann, *Monte Carlo Simulation in Statistical Physics*, Springer-Verlag (1988).
33. F. Wang and D. P. Landau, Phys. Rev. E **64**, 056101 (2001).
34. F. Wang and D. P. Landau, Phys. Rev. Lett. **86**(10), 2050 (2001).
35. А. К. Муртазаев, М. К. Рамазанов, Д. Р. Курбанова, М. К. Бадиев, ФТТ **60**, 1162 (2018).
36. А. К. Муртазаев, М. К. Рамазанов, Д. Р. Курбанова, М. К. Бадиев, Я. К. Абуев, ФТТ **59**, 1082 (2017).
37. А. К. Муртазаев, М. К. Рамазанов, Ф. А. Касан-Оглы, Д. Р. Курбанова, ЖЭТФ **147**, 127 (2015).
38. А. К. Муртазаев, М. А. Магомедов, М. К. Рамазанов, Письма в ЖЭТФ **107**, 265 (2018).
39. A. K. Murtazaev, M. K. Ramazanov, D. R. Kurbanova, M. A. Magomedov, and K. Sh. Murtazaev, Mater. Lett. **236**, 669 (2019).
40. A. Mailhot, M. L. Plumer, and A. Caille, Phys. Rev. B **50**, 6854 (1994).
41. P. Peczak, A. M. Ferrenberg, and D. P. Landau, Phys. Rev. B **43**, 6087 (1991).
42. А. К. Муртазаев, М. К. Рамазанов, и М. К. Бадиев, Physica B: Cond. Matt. **476**, 1 (2015).
43. Ch. Holm and W. Janke, Phys. Rev. B **48**, 936 (1993).
44. M. Campostrini, M. Hasenbusch, A. Pelissetto, P. Rossi, and E. Vicari, Phys. Rev. B **65**, 144520 (2002).