

# ПОДАВЛЕНИЕ МЕЛКОМАСШТАБНОЙ ГЕНЕРАЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ ТРАНСФОРМАЦИИ СПЕКТРА КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

*Е. В. Юшков<sup>a,b,\*</sup>, А. С. Лукин<sup>a,c</sup>, Д. Д. Соколов<sup>b,d</sup>*

<sup>a</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук  
117997, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
119991, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики  
101100, Москва, Россия*

<sup>d</sup> *Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн Российской академии наук  
108840, Троицк, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 21 мая 2019 г.,  
после переработки 6 июня 2019 г.  
Принята к публикации 6 июня 2019 г.

Исследуется процесс стабилизации мелкомасштабного динамо, причиной которого является изменение энергетического спектра потока проводящей плазмы. Подобное изменение кинетических свойств может быть обусловлено обратной перекачкой генерируемой магнитной энергии в энергию движения. Процесс обратной перекачки моделируется нами с помощью классической модели Казанцева, описывающей работу мелкомасштабного динамо в зеркально-симметричном турбулентном течении. Полученные результаты позволяют утверждать, что появление магнитной энергии на малых масштабах в кинетическом спектре способно остановить процесс генерации. Такая стабилизация оказывается не менее эффективной, чем процесс торможения турбулентного динамо за счет сохранения суммарной магнитной и кинетической энергий, однако выглядит более реалистичной, так как для большинства динамо-систем наблюдаемая магнитная энергия на порядки ниже кинетической. Мы показываем, что при таком способе нелинейного подавления просто появления энергии на малых масштабах бывает недостаточно, в частности, простое смещение гауссова спектра в сторону малых масштабов лишь усиливает генерацию. В настоящей работе описывается разумный способ трансформации спектра, который позволяет стабилизировать генерацию как при критических, так и при сверхкритических режимах работы мелкомасштабного динамо-механизма. Не менее важным является и тот факт, что описываемая трансформация спектра может быть напрямую зафиксирована при экспериментальной проверке.

DOI: 10.1134/S0044451019120162

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Магнитные поля Земли, Солнца, звезд и галактик образуются в результате действия электромагнитной индукции в турбулентных потоках проводящей среды. Одним из наиболее известных механизмов формирования таких полей является динамо-механизм среднего поля, описывающий перекачку кинетической энергии движения плазмы в энергию

крупномасштабных полей за счет совместного действия дифференциального вращения астрофизических тел и зеркальной асимметрии конвективных или турбулентных течений (см., например, [1, 2]). Величину зеркальной асимметрии принято измерять с помощью гидродинамической спиральности, которая по историческим причинам носит название  $\alpha$ -параметра. Величина  $\alpha$  имеет размерность м/с и составляет примерно 10 % от характерной скорости задачи (практическая оценка, предложенная Юджином Паркером). Пользуясь малостью  $\alpha$ , удастся построить простую, но очень эффективную теорию

\* E-mail: yushkov.msu@mail.ru

нелинейного насыщения динамо среднего поля, основанную на представлении о том, что по мере приближения энергии поля к равномерному распределению с кинетической энергией происходит нелинейное подавление  $\alpha$ -коэффициента. При этом важно, что механизм подавления является критическим явлением, так что рост магнитного поля прекращается, как только  $\alpha$  становится достаточно малым. Поскольку оно и так невелико, происходит это достаточно быстро, а детали оказываются несущественными. Хотя эта модель, быть может, не вскрывает физических деталей нелинейной стадии процесса динамо, но в прагматическом плане она является вполне достаточной для построения, скажем, моделей динамо в конкретных спиральных галактиках (см. обзоры [3, 4] и приведенную там библиографию).

Кроме хорошо изученного механизма динамо средних полей, в астрофизике востребован и другой вид МГД-генерации, известный как мелкомасштабное динамо. В отличие от первого механизма это динамо может работать как в зеркально-асимметричных, так и в зеркально-симметричных ( $\alpha = 0$ ) средах, при этом производить не крупномасштабное магнитное поле, характерный размер которого сопоставим с размером самого небесного тела, а мелкомасштабное поле, характерный размер которого определяется размером турбулентных (или конвективных) вихрей. Исторически этот механизм был впервые исследован А. П. Казанцевым в 1967 г. [5], примерно в то же время, когда впервые была последовательно описана работа динамо среднего поля. Предложенное Казанцевым описание мелкомасштабного механизма основано на модели конвекции (или турбулентности) как случайного поля с короткими временными корреляциями (подобное течение можно рассматривать как некоторую реализацию белого шума). Это, конечно, не позволяет воспроизвести все детали реальной конвекции, но имеющийся к настоящему времени опыт численного моделирования мелкомасштабного динамо (см., например, [6]) убеждает нас в том, что модель Казанцева служит столь же удачным и не очень сложным описанием этого вида процесса, как и модель  $\alpha$ -эффекта для описания динамо среднего поля (более подробно см. в [1]).

Примером небесных тел, для которых мелкомасштабный механизм генерации кажется наиболее востребованным, являются скопления галактик, хотя бы потому что они не вращаются (см., например, [7]). В то же время, этот вид динамо, по-видимому, работает, наряду с динамо среднего поля, и во вращающихся небесных телах, например на Солнце

[8, 9]. Не вызывает сомнений, что динамо во всех этих случаях уже находится в режиме нелинейного насыщения, так как плотность магнитной энергии сопоставима с плотностью энергии конвективных движений и не видно следов ее экспоненциального роста. Согласно модели Казанцева мелкомасштабный механизм является критическим явлением, так же как и механизм динамо среднего поля, поэтому его работа прекращается, если интенсивность источников генерации становится достаточно малой. В качестве меры этой интенсивности служит магнитное число Рейнольдса  $Rm$ , показывающее, насколько эффекты электромагнитной индукции превосходят эффекты диффузии. По порядку величины критическое значение  $Rm_{cr}$  не превосходит  $10^2$  (см., например, [10]). С другой стороны, значения магнитных чисел Рейнольдса для реальных небесных тел за небольшими исключениями всегда превышают  $Rm_{cr}$ . Например, в конвективной зоне Солнца  $Rm \approx 10^6$ , для скопления галактик оценки получаются на порядки больше. Очевидно, что представление о том, что нелинейное насыщение мелкомасштабного динамо сводится к постепенному уменьшению  $Rm$  до  $Rm_{cr}$ , неправильно (см., например, [11]). Отсутствие простой модели, которая описывает, пусть и не во всех деталях, процесс мелкомасштабной стабилизации, существенно затрудняет понимание физики этого явления.

Цель настоящей работы как раз и состоит в том, чтобы предложить адекватную модель нелинейного подавления для мелкомасштабного динамо. В общем виде идея строится следующим образом: растущее мелкомасштабное магнитное поле изменяет корреляционные свойства поля скорости так, чтобы сделать более эффективной работу турбулентной (или конвективной) диффузии и, таким образом, эффективно уменьшить до критического значения магнитное число Рейнольдса, не меняя существенно его номинального значения. В этом смысле наша модель находится в русле представлений, высказанных в работе [11]. По существу, эта конструкция кажется единственной возможностью, не использующей каких-то частных дополнительных свойств системы.

В рамках модели Казанцева мелкомасштабное магнитное поле описывается с помощью корреляционной функции поля (в более сложных ситуациях — корреляционного тензора). Для демонстрации того, что наша модель действительно описывает нелинейное насыщение мелкомасштабного динамо, мы, конечно, должны решить соответствующие нелинейные уравнения для корреляционной функ-

ции. Это приходится делать численно, однако объем и сложность этих вычислений совершенно сопоставимы с теми, которые приходится делать в методах прямого численного моделирования. Предлагаемая схема нелинейного подавления предъявляет значительные требования к используемому численному подходу, в частности, требуется смоделировать процессы на очень малых масштабах, следя при этом за граничными условиями на бесконечности, оказывающими существенное влияние на процесс [12, 13]. Поэтому при ее реализации мы широко пользуемся имеющимися асимптотическими и численными результатами, полученными при изучении модели Казанцева на линейной стадии неустойчивости, в качестве начального приближения (см. детали в [14, 15]) и ограничиваемся на первом этапе зеркально-симметричным случайным течением, хотя, конечно, понимаем необходимость ее развития и на зеркально-асимметричный случай.

## 2. МОДЕЛЬ КАЗАНЦЕВА И ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Модель Казанцева получается после усреднения уравнения магнитной индукции для несжимаемого дельта-коррелированного во времени поля скорости в зеркально-симметричном потоке  $\mathbf{v}(r, t)$ :

$$\langle \mathbf{v}_i(r, t) \cdot \mathbf{v}_j(0, 0) \rangle = \left( \left( F + \frac{r}{2} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) + F \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \delta(t). \quad (1)$$

Она определяет эволюцию корреляционного тензора магнитного поля

$$\langle \mathbf{H}_i(r, t) \cdot \mathbf{H}_j(0, 0) \rangle = \left( M + \frac{r}{2} \frac{\partial M}{\partial r} \right) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) + M \frac{r_i r_j}{r^2}, \quad (2)$$

задаваемого в общем случае функцией  $M(r, t)$  (подробнее см., например, [12]). Корреляционная функция  $M(r, t)$  при фиксированной магнитной вязкости  $\eta(r) = 1/\text{Rm} + F(0)/3 - F(r)/3$  удовлетворяет уравнению параболического типа, полученному впервые в работе [5], а в несколько ином виде — в работе [16]:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{2}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \eta \frac{\partial M}{\partial r} \right) + \frac{2M}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 \frac{\partial \eta}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Определив кинетические свойства случайного потока  $F(r)$ , а следовательно, и эффективную магнитную вязкость  $\eta(r)$ , можно вычислить с помощью

уравнения (3) корреляционную функцию магнитного поля  $\langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rangle(r)$  и ее фурье-образ — спектральную плотность энергии  $\langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rangle(k)$ :

$$\langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rangle(r) = 3M + r \frac{\partial M}{\partial r}, \quad (4)$$

$$\langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rangle(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}} \langle \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \rangle d^3r.$$

Заметим, что за единицу длины в (3) традиционно принимается характерный размер конвективного (турбулентного) вихря, который в рамках модели Казанцева является корреляционной длиной задачи. Случайный поток предполагается пространственно-неограниченным. Конечно, реальные потоки сосредоточены в конечной области пространства характерного размера  $L$  и учет конечности  $L$  представляет очевидный интерес, однако это выходит за рамки данной работы. Несмотря на то что пренебрежение конечностью  $L$  может приводить к явлениям, впервые отмеченным в работе [17], в астрофизической постановке этими проблемами в первом приближении можно пренебречь.

Численная реализация данной задачи осуществляется с помощью чисто неявной схемы с нулевыми граничными условиями. В качестве начального распределения задается малое возмущение  $M_0(r) = 10^{-6} \exp(-r^2)$ . Сетка из 5000 узлов выбирается неравномерной и таким образом, чтобы половина узлов попала в интервал  $r \in [0, 1]$ . Плюсом такого выбора является то, что качественно удастся реализовать задачу на полупрямой  $r \in [0, \infty)$  и одновременно восстановить мелкомасштабное поле в областях  $r \ll 1$ . Недостатком является сложность восстановления фурье-спектров (из-за ячеек разного размера при больших  $k$  возникают ошибки, связанные с вычислением интегралов). Волновое число  $k = 1$  соответствует корреляционной длине поля скорости или максимуму кинетического энергетического спектра, а величина  $\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \rangle(0)$ , пропорциональная начальной кинетической энергии, принимается равной 1 (это служит нормировкой скорости). Так что в дальнейшем, хотя мы и предполагаем, что магнитная энергия приближается к равномерному распределению, однако она остается заметно меньше кинетической энергии, в единицах плотности которой мы и измеряем магнитную.

Наконец, заметим, что в методах получения уравнения Казанцева не используются представления об инерционном интервале и в качестве типичного вида корреляционной функции скорости выбирается гауссова форма  $F(r) \sim \exp(-r^2)$ . Кинетический спектр при таком выборе имеет вид  $\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \rangle(k) \sim$

$\sim k^2 \exp(-k^2/4)$  и локализован вблизи энергонесущего масштаба  $k = 2$ . Это приводит к экспоненциальному возрастанию энергии, если  $Rm$  превышает критическое значение  $Rm_{cr} = 65$ , поэтому при анализе мелкомасштабного механизма разумно выделить докритический, критический и сверхкритический режимы. Для сравнения оценки  $Rm$  в лабораторных экспериментах, доступных с недавнего времени (см., например, [18]), дают  $10$ – $10^2$ , в ядре Земли около  $10^3$ , на Солнце около  $10^6$ , а оценки  $Rm$  в галактиках и их скоплениях зависят от того, какие процессы, помимо кулоновских столкновений, описываются как диффузия, что, однако, всегда дает очень большие величины. Нас же в первую очередь интересуют критические условия, характеризующие начало генерации и возможную стабилизацию, поэтому в дальнейшем, если не оговорено отдельно, мы полагаем для конкретности  $Rm = 250$ .

### 3. ГАУССОВ СПЕКТР, КОЛМОГОРОВСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ

Исходной идеей нашей модели нелинейного насыщения мелкомасштабного динамо является то, что хотя исходная корреляционная функция поля скорости имеет характерную ширину  $r = 1$ , а максимум ее энергетического спектра находится вблизи  $k = 1$ , генерируемая корреляционная функция магнитного поля имеет максимум при  $k \gg 1$ , т.е. присутствует на масштабах много меньших характерного масштаба поля скорости. Поэтому, например, за счет вмерзновенности поля возможна перекачка магнитной энергии в кинетическую при больших волновых числах вблизи диссипативного масштаба. Такая перекачка энергии практически не меняет номинальное значение магнитного числа Рейнольдса, но может принципиально повлиять на возможности генерации.

Начнем с того, что рассмотрим ситуацию, когда корреляционный тензор для поля скорости  $\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \rangle(k)$  не имеет стандартную гауссову форму  $\sim k^2 \exp(-k^2/4)$  с максимумом вблизи  $k = 1$ , а является спектром, сдвинутым на большие  $k$ :  $\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \rangle(k) = k^2 \exp(-k^2/100)$ . Рисунок 1а демонстрирует энергетические нормированные спектры для трех режимов генерации  $Rm = 50, 250, 1000$ , рис. 1в отображает рост магнитной энергии со временем для сдвинутых и традиционных спектров. Хорошо видно, что со сдвигом энергетического спектра в сторону  $k \gg 1$  скорость генерации увеличивается. Это происходит потому, что скорость роста пропорциональна  $v/l$ ,

где  $v$  — масштаб скорости,  $l$  — пространственный масштаб. При нашем преобразовании  $v$  неизменно, а  $l$  уменьшается.

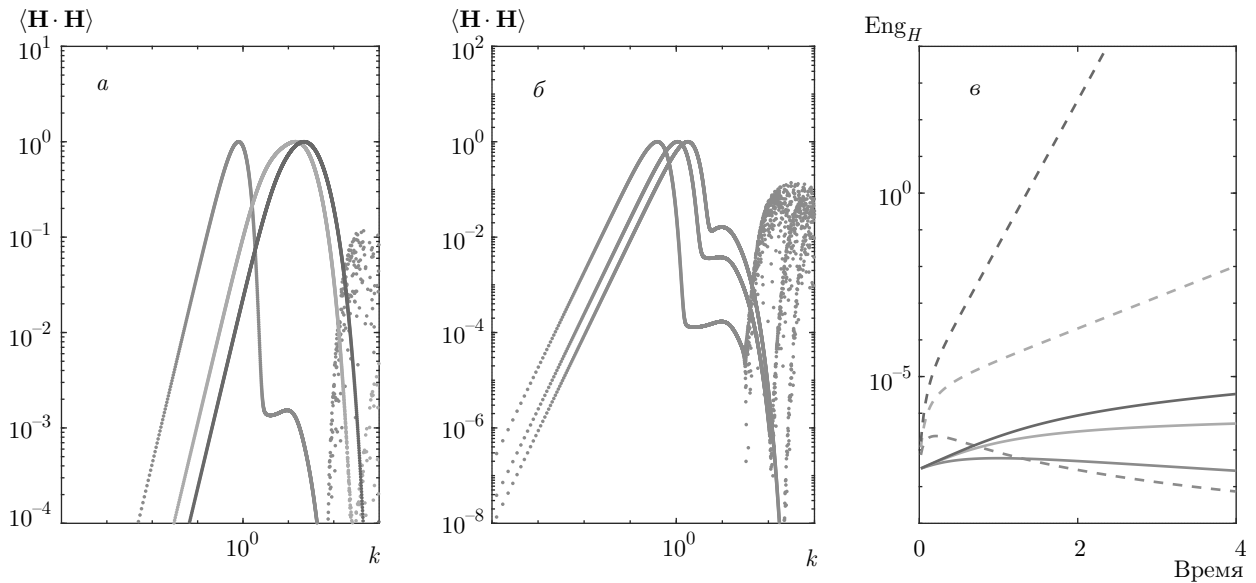
Заметим, что для докритического режима (красная кривая на рис. 1б), когда магнитная энергия уменьшается, спектры энергии не являются, вообще говоря, фурье-образами собственных функций задачи, поэтому на рис. 1а (и далее на рис. 2а и 3а) мы рисуем спектральную форму магнитной энергии, взятую в конечный момент времени проведения эксперимента (этот момент соответствует максимальному времени на рис. 1в для временной зависимости), кроме того, спектр нормируется таким образом, чтобы его максимальное значение равнялось единице. В связи с этим важно, что на энергетическом спектре докритического режима возникает пик в области  $k < 1$  и ступенька при  $k > 1$ . Этот пик соответствует тому факту, что на больших масштабах (при малых  $k$ ) энергия убывает степенным образом, как  $\propto t^{-5/2} \exp(-r^2/8\eta t)$  (это видно непосредственно из уравнения (3) при больших  $t$  и  $r$ ), т.е. гораздо медленнее, чем на малых масштабах (при больших  $k$ ), где энергия убывает экспоненциальным образом. Наконец, отметим, что в критическом режиме форма спектральной кривой (зеленая линия) менее выпукла, чем в сверхкритическом режиме (синяя линия), в дальнейшем аналогичная картина будет наблюдаться и обсуждаться отдельно для насыщенных спектров.

Выясним теперь, насколько модифицируется эта картина в случае более реалистической модели конвекции, которая содержит инерционный интервал. Напомним, что выбор традиционной корреляционной функции продиктован техническими методами вывода уравнения Казанцева, тогда как нет сомнения, что реалистический кинетический спектр, вообще говоря, характеризуется не «гауссовым убыванием», а степенным, колмогоровским. Однако если мы, не обращая внимания на ограничения, накладываемые выводом уравнения Казанцева, будем использовать колмогоровскую форму корреляционной функции, то и тогда получим значительное присутствие энергии на малых масштабах при  $k \gg 1$  (рис. 2а, зеленая кривая, ниже приведено более подробное описание).

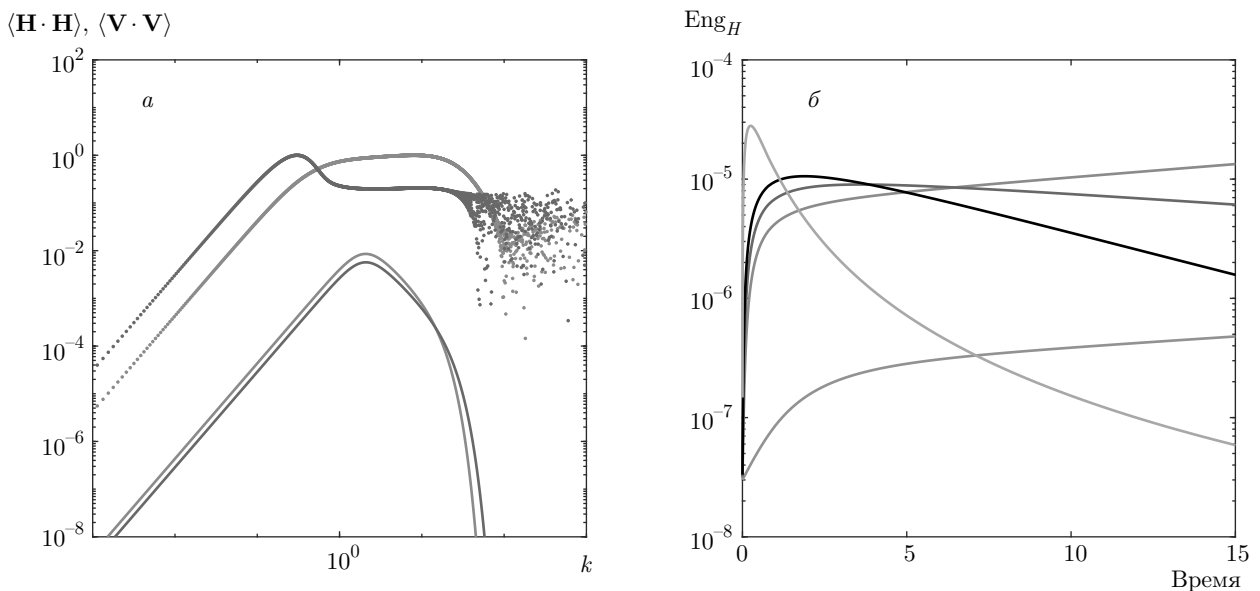
Выберем корреляционную функцию скорости со следующей спектральной формой:

$$\langle \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \rangle(k) \sim \frac{k^2}{1 + (k/k_{min})^{2+5/3}} \exp\left(-\frac{k^2}{k_{max}^2}\right),$$

где два параметра  $k_{min}$  и  $k_{max}$  определяют инерционный интервал, в котором энергия убывает по



**Рис. 1.** (В цвете онлайн) Гауссов спектр. *а)* Энергетические спектры магнитной энергии. *б)* Спектры энергии в докритическом режиме для трех моментов времени  $t = 0.25, 2.5, 25$  (сверху вниз соответственно). *в)* Изменение суммарной магнитной энергии со временем для трех режимов: докритического  $Rm = 50$  (красный), критического  $Rm = 250$  (зеленый), сверхкритического  $Rm = 1000$  (синий). Сплошные линии на рис. *в)* соответствуют стандартному гауссову спектру, штриховые — спектру, сдвинутому на малые масштабы. Точки на рис. *а)*, выпадающие из спектральных кривых, — артефакт численного преобразования Фурье на неравномерной сетке, они могут быть немного отодвинуты путем измельчения сеточного шага, но избавиться от них совсем невозможно, поэтому мы их оставили здесь и на других рисунках, чтобы не вносить внешние исправления в полученные результаты и показать ограничения выбранной численной реализации и разрешения



**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Колмогоровский спектр. *а)* Энергетические спектры магнитной (точки) и кинетической (сплошные линии) энергий. *б)* Изменение суммарной магнитной энергии со временем для инерционных интервалов различной ширины  $k_{min} = 2, k_{max} = 2, 15, 20, 25, 100$ , которые соответствуют зеленому, красному, синему, черному, голубому цветам. Для первых двух значений параметров наблюдается рост магнитной энергии, для оставшихся — затухание

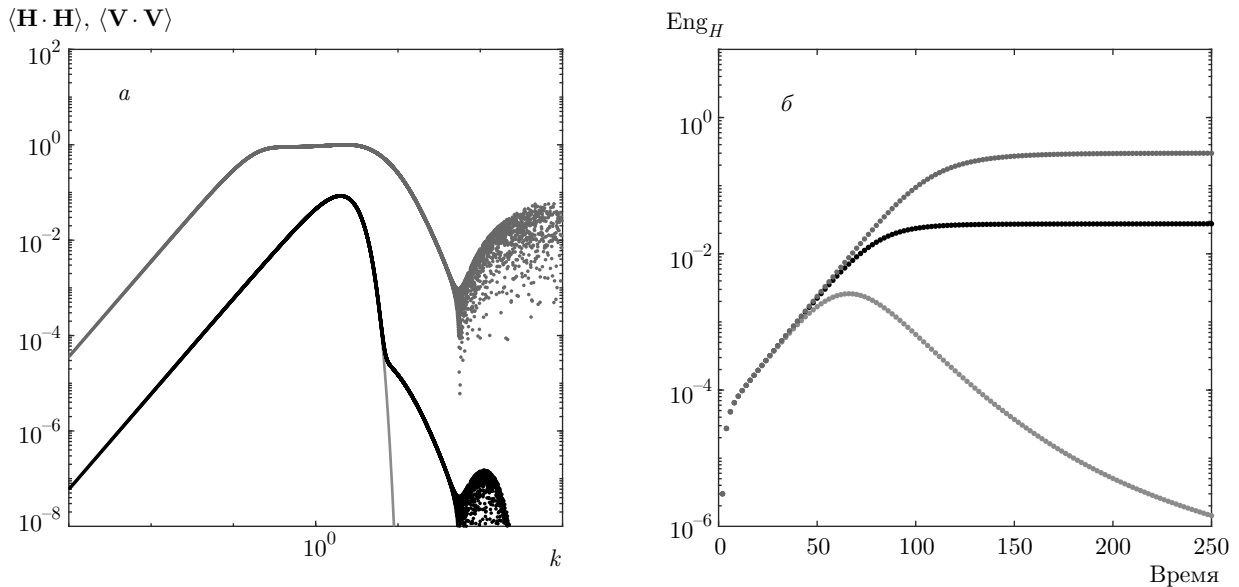


Рис. 3. (В цвете онлайн) Динамический спектр. а) Энергетические спектры магнитной (синие точки) и кинетической (черные точки) энергий, красная линия соответствует начальному гауссову кинетическому спектру. б) Зависимости полной магнитной энергии от времени (синяя линия — сохранение суммарной энергии и формы спектра, черная — добавка магнитного поля к гауссову спектру, красная — постоянная подкачка магнитной энергии с сохранением суммарной энергии равной 1

колмогоровскому закону  $\propto k^{-5/3}$ . Зафиксируем  $k_{min} = 2$ , что соответствует в гауссовом случае положению максимума спектра вблизи  $k = 1$ . На рис. 2 показаны спектры и поведение магнитной энергии для различных  $k_{max} = 2, 15, 20, 25, 100$ , характеризующих ширину инерционного интервала (степенного убывания). Хорошо видно, что при появлении энергии на малых масштабах (при больших  $k_{max}$ ) магнитная энергия сначала растет быстрее, чем при малых  $k_{max}$  (это явление в виде транзитного роста наблюдалось и в докритических режимах генерации [12]). Однако на более поздних этапах эволюции динамика меняется: видно, что с увеличением инерционного колмогоровского интервала экспоненциальный рост энергии может смениться ее затуханием.

Наша идея состоит в том, чтобы использовать отмеченный факт как основу для модели нелинейного подавления мелкомасштабного динамо. Если трансформация гауссова спектра в колмогоровский может привести к затуханию магнитной энергии, то выглядит естественным, что переход от линейного режима эволюции к режиму насыщенной турбулентности может не быть связан с переходом кинетической энергии в магнитную, а являться следствием деформации спектра.

Подчеркнем, что в рамках предлагаемой схемы нелинейное насыщение генерации происходит за

счет перераспределения энергии между магнитным полем и полем скорости — по смыслу задачи в нашем распоряжении нет других возможностей. Важно то, что это перераспределение можно осуществлять разными способами, которые, как оказывается, приводят к существенно разным результатам. Для того чтобы показать это различие и выбрать способ перераспределения, соответствующий нашим целям, рассмотрим три модельных варианта трансформации спектра, из которых третий и является тем способом, который дает желаемый результат, а два других приведены для сравнения.

1. Из кинетического спектра энергия переходит в энергию магнитного поля в каждом спектральном интервале, при этом транспортом энергии по спектру можно пренебречь. Такой механизм кажется маловероятным, так как магнитная энергия генерируется на масштабах  $k \gg 1$ , при которых запасы кинетической энергии практически отсутствуют.

2. Из кинетического спектра энергия уходит в энергию магнитного поля таким образом, что форма спектра сохраняется, т. е. транспорт энергии настолько быстрый, что энергия везде снижается равномерно, при этом суммарная полная энергия сохраняется. Этот вариант действительно приводит к подавлению генерации, как только магнитная энергия становится сравнимой с кинетической (или да-

же больше), но этот вариант нам не интересен, как противоречащий наблюдениям.

3. Растущая энергия магнитного поля на малых масштабах переносится обратно в кинетическую таким образом, что полная кинетическая энергия остается постоянной (или почти постоянной), а изменяется только форма спектра. Пренебрегая транспортом энергии по спектру, разумно описать это изменение формы как

$$\langle \mathbf{V}^2 \rangle_{new}(k) = \frac{\langle \mathbf{V}^2 \rangle_{old}(k) + \langle \mathbf{H}^2 \rangle(k)}{\int (\langle \mathbf{V}^2 \rangle_{old}(k) + \langle \mathbf{H}^2 \rangle(k)) dk}.$$

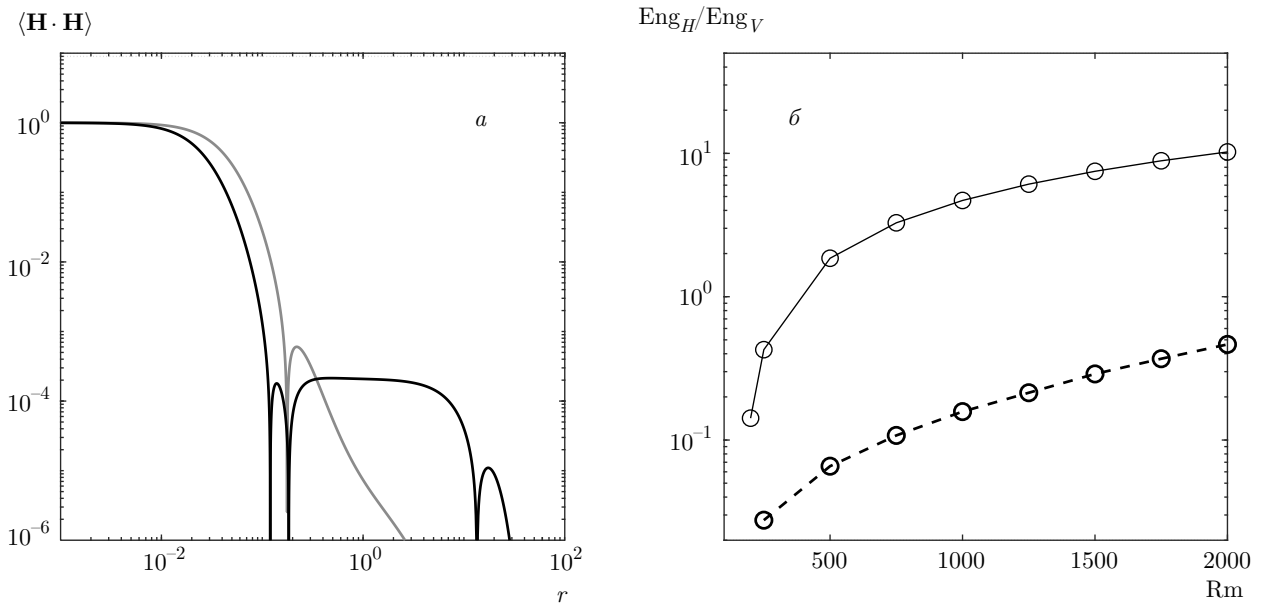
При этом старый спектр  $\langle \mathbf{V}^2 \rangle_{old}(k)$  может быть зафиксирован, а может выбираться равным  $\langle \mathbf{V}^2 \rangle_{new}$  на каждом новом шаге. На всем диапазоне магнитных чисел Рейнольдса как для первого, так и для второго случая наблюдается явное подавление магнитной генерации. Изменение магнитной энергии со временем показано на рис. 3б, при этом, когда добавка прибавляется к фиксированному гауссову полю, наблюдается стабилизация генерации (черная линия), а когда добавка магнитной энергии суммируется с текущим спектром, происходит смена роста магнитной энергии на затухание (красная линия). На рис. 3а для стабилизировавшегося спектра четко видно, как изменяется форма кинетического спектра потока (от красной линии в начальный момент времени до черной линии в конечный момент). Заметим, что уровень стабилизации магнитной энергии при этом на порядок ниже уровня стабилизации, на который процесс вышел бы при сохранении полной энергии (черная и синяя линии на рис. 3б соответственно). Таким образом, действительно можно утверждать, что трансформация формы спектра энергии потока (или, другими словами, учет медленного степенного убывания на малых масштабах) оказывается достаточной, чтобы остановить механизм мелкомасштабной генерации.

#### 4. СЦЕНАРИЙ НЕЛИНЕЙНОГО ПОДАВЛЕНИЯ ГЕНЕРАЦИИ

Проведенный анализ уравнения Казанцева показал, что форма спектра кинетической энергии может очень сильно влиять на возможность мелкомасштабной генерации. В частности, если гауссов спектр с постоянной полной энергией сдвигать на малые масштабы (в сторону больших  $k$ ), скорость генерации поля значительно увеличивается. В то же время, если гауссов спектр трансформировать в кол-

могоровский (сохраняя полную энергию и энергонесущий масштаб), то экспоненциальный рост может резко смениться степенным затуханием. Условием смены роста затуханием является достаточная ширина инерционного интервала. Конечно, такой механизм является чувствительным к выбору  $Rm$ : при больших сверхкритических значениях магнитного числа Рейнольдса для того, чтобы добиться затухания, трансформируя спектр в колмогоровский, приходится тщательно следить за перераспределением энергии, так как при появлении энергии на малых масштабах начальный подстроечный скачок бывает весьма значительным и быстрым, а затухание — степенным и медленным. Кроме того, граница, на которой рост сменяется затуханием, оказывается достаточно резкой. При плавном увеличении инерционного интервала с  $k_{max} = 15$  до  $k_{max} = 20$  для  $Rm = 250$  генерация пропадает, что, возможно, связано с принципиальным изменением корреляционной функции магнитного поля (см. рис. 4а). Действительно, стандартная корреляционная функция для генерируемой энергии на энергонесущем масштабе меняет знак, поскольку в генерируемых петлях магнитного поля это магнитное поле имеет разную направленность на разных сторонах энергонесущего вихря. При анализе генерации для колмогоровского спектра мы получили, что, несмотря на очень малое различие между кинетическими спектрами для роста поля и для затухания (рис. 3а), для корреляционной функции при затухании появляется дополнительный нуль (рис. 4а). Другими словами, на энергонесущем масштабе у магнитного поля оказывается тот же знак, что и в нуле — в таком случае петля выглядит, скорее, как восьмерка, а ее растяжение и наложение не может привести к эффективному росту поля, и это ведет к исчезновению генерации.

Обнаруженное влияние формы спектра на работу динамо наводит на мысль, что устойчивую стабилизацию получить можно, например, если не просто трансформировать спектр и добавлять энергию на малые масштабы, а осуществлять эту добавку динамически. В частности, если на каждом шаге магнитную энергию, пренебрегая транспортом по спектру, добавлять к энергии потока, то рост не просто сменяется затуханием, а при достижении значения насыщения стабилизируется. При этом уровень этой стабилизации зависит от магнитного числа Рейнольдса: так, для  $Rm = 250$  отношение стабилизировавшейся магнитной энергии к потоковой оказывается равным 0.02, а для  $Rm = 1000$  это отношение равно 0.15 (рис. 4б). Конечно, аналогич-



**Рис. 4.** (В цвете онлайн) *а*) Корреляционные функции магнитного поля для колмогоровских кинетических спектров с разными ширинами инерционного интервала:  $k_{max} = 20$ , генерация (красная линия) и  $k_{max} = 15$ , затухание (черная линия). *б*) Отношение стабилизировавшейся магнитной энергии к кинетической для разных магнитных чисел Рейнольдса: сплошная линия соответствует стабилизации из-за сохранения энергии, штриховая — стабилизации из-за изменения формы спектра

ное насыщение можно было бы получить и за счет сохранения энергии без изменения формы спектра, просто уменьшая кинетическую энергию, так чтобы ее сумма с магнитной была постоянной. Однако в этом случае, даже если предположить мгновенный транспорт энергии по спектру, уровень стабилизации магнитной энергии дает величины на порядок большие, чем в случае изменения формы спектра (сплошная и штриховая линии на рис. 4б). То есть трансформация спектра на малых масштабах — это более действенный механизм стабилизации, чем уменьшение кинетической энергии потока. Еще раз напомним, что представление о стабилизации мелкомасштабного динамо простым уменьшением кинетической энергии выглядит логичным, однако не соответствует астрономическим наблюдениям.

Полученная форма спектра магнитной энергии после насыщения примерно одинакова как для колмогоровской, так и для динамической стабилизации. При малых  $k$  спектр, как и в соответствующей линейной задаче (см. для сравнения [19]), растет как  $k^2$ . В области энергонесущего масштаба происходит излом спектра и выход его на плато. В инерционном интервале, где кинетическая энергия убывает по степенному закону, магнитная также убывает степенным образом. Эти свойства работы мелкомас-

штабного механизма — и плато, и подстройка магнитного спектра под кинетический в процессе насыщения — могут быть проверены как в рамках прямого численного моделирования, так и в каскадных моделях МГД-турбулентности [20].

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Механизм подавления турбулентного динамо — один из ключевых вопросов, связанных с ролью мелкомасштабной генерации в формировании наблюдаемых крупномасштабных магнитных полей планет, звезд и галактик. В данной работе мы предложили модель того, как эта стабилизация может происходить за счет трансформации формы кинетического спектра.

Как и феноменологические модели подавления динамо среднего поля, наша модель, конечно, не ориентирована на то, чтобы вскрывать тонкие явления, происходящие при таком подавлении. Это, вероятно, можно сделать только в рамках прямого численного моделирования. Однако наша модель достаточно проста для того, чтобы ее можно было использовать для прагматических моделей генерации мелкомасштабного магнитного поля, скажем, в скоплениях галактик. В то же время использовать



для сравнения с данными наблюдений магнитных полей, скажем, в скоплениях галактик, исключительно данные прямого численного моделирования кажется недостаточным просто в силу ограниченности наших знаний о гидродинамике этих объектов.

Отличие нашей модели от феноменологических моделей нелинейного насыщения динамо среднего поля состоит в том, что она не основана на аргументах, связанных с сохранением интегралов движения — полной энергии и спиральности. Для рассматриваемого вида динамо наивное представление о том, что нелинейная стабилизация магнитного поля происходит за счет общего уменьшения кинетической энергии, явно противоречит имеющимся наблюдениям. Что касается вопроса о балансе магнитной спиральности, на основе которого строятся современные модели подавления динамо среднего поля, то мелкомасштабное динамо может работать и в зеркально-симметричном течении. Конечно, вопрос о том, как трансформируется наша модель в зеркально-асимметричном (в среднем) потоке, заслуживает специального изучения, которое, однако, выходит за рамки данной статьи.

Подчеркнем, что предложенная модель нелинейного насыщения мелкомасштабного динамо основана на представлении о том, что форма уравнения Казанцева, полученная для линейной неустойчивости, сохраняется и на нелинейной стадии ее развития, а изменяются лишь коэффициенты этого уравнения. На том же предположении, но, естественно, для уравнения динамо среднего поля, основаны и феноменологические модели подавления динамо среднего поля. В работе [21] показано, что обоснование этого предположения требует определенных представлений о том, как именно происходит воздействие магнитного поля на течение (необходим некоторый временной лаг между магнитным полем и изменением распределения турбулентных или конвективных вихрей). Вероятно, с этим связаны также и ограничения того, как именно перераспределяется трансформированная энергия по спектру случайных движений. Конечно, нет оснований в принципе исключать возможность того, что в ходе нелинейной стабилизации динамо в соответствующих уравнениях могут появляться некие экстра-члены, но нам неизвестны какие-либо конкретные результаты в этом направлении.

Для моделей динамо среднего поля известны несколько феноменологических моделей нелинейного подавления генерации, ориентированных на моделирование различных конкретных астрономических ситуаций. В самом общем виде

они приводят к сходным результатам, хотя, конечно, различаются в деталях. У нас нет оснований настаивать на том, что приведенная модель нелинейного насыщения мелкомасштабного динамо является единственно возможной (отметим еще раз работу [11] как исходную для нашей модели), однако нам неизвестны другие модели, выдерживающие хотя бы предварительное сравнение с наблюдениями. Конечно, и в такой ситуации вопрос о сравнении нашей модели с данными прямого численного моделирования, каскадных моделей и астрономических наблюдений остается очень важным, хотя и выходит за рамки данной работы.

**Финансирование.** Работа Д. Д. С. и А. С. Л. по постановке задачи и поиску методов ее решения поддерживалась Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 18-02-0085). Численный эксперимент, проводимый Е. В. Ю., а также трактовка результатов, осуществляемая всеми авторами, обеспечивалась фондом БАЗИС (грант № 18-1-1-77-3).

## ЛИТЕРАТУРА

1. F. Krause and K.-H. Rädler, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Pergamon Press, Oxford (1980).
2. Ya. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields in Astrophysics*, G&B, New York (1983).
3. R. Beck, A. Brandenburg, D. Moss, A. Shukurov, and D. Sokoloff, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 155 (1996).
4. С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *УФН* **145**, 307 (1985).
5. А. П. Казанцев, *ЖЭТФ* **53**, 1806 (1967).
6. A. Brandenburg and K. Subramanian, *Phys. Rep.* **417**(1–4), 1 (2005).
7. A. Ruzmaikin, D. Sokoloff, and A. Shukurov, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **241**, 1 (1989).
8. D. Sokoloff, A. Khlystova, and V. Abramenko, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **451**, 6040 (2015).
9. D. D. Sokoloff, E. V. Yushkov, and A. S. Lukin, *Geomagnetism and Aeronomy* **57**, 844 (2017).
10. В. Г. Новиков, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов, *ЖЭТФ* **85**, 909 (1983).

11. K. Subramanian, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **294**, 718 (1998).
12. E. Yushkov, A. Lukin, and D. Sokoloff, *Phys. Rev. E* **97**, 063108 (2018).
13. Е. В. Юшков, А. С. Лукин, Д. Д. Соколов, *ЖЭТФ* **155**, 1123 (2019).
14. О. Артамонова, Д. Соколов, *Вестник МГУ* **27**, 8 (1986).
15. E. V. Yushkov, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **109**, 450 (2015).
16. R. Kraichnan and S. Nagarajan, *Phys. Fluids* **10**, 853 (1967).
17. И. В. Колоколов, В. В. Лебедев, Г. А. Сизов, *ЖЭТФ* **140**, 387 (2011).
18. Д. Д. Соколов, Р. А. Степанов, П. Г. Фрик, *УФН* **184**, 313 (2014).
19. E. Yushkov, A. Lukin, D. Sokoloff, and P. Frick, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **113**, 184 (2018).
20. F. Plunian, R. Stepanov, and P. Frick, *Phys. Rep.* **523**, 1 (2013).
21. D. Sokoloff and N. Yokoi, *J. Plasma Phys.* **84**, 735840307 (2018).