ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 1, стр. 74–81

НЕРЕЗОНАНСНЫЕ ПРОЦЕССЫ КАК ОСНОВА ФОРМИРОВАНИЯ НОВЫХ КАНАЛОВ РЕЛАКСАЦИИ В ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. И. Трубилко [a*], ***А. М. Башаров*** [b,c**]

[a] *Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России*
196105, Санкт-Петербург, Россия

[b] *Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»*
123182, Москва, Россия

[c] *Московский физико-технический институт (технический университет)*
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 17 июля 2019 г.,
после переработки 5 августа 2019 г.
Принята к публикации 8 августа 2019 г.

Представлены механизмы накачки и распада «изолированного» осциллятора, который может только нерезонансным образом взаимодействовать с соседним осциллятором другой частоты. Показано, что если указанный соседний осциллятор связан с широкополосным термостатным полем, то изолированный осциллятор начинает взаимодействовать с этим термостатным полем. В результате возникает новый канал релаксации, обусловленный квантовой интерференцией взаимодействующих систем, которую затруднительно или невозможно обосновать в рамках традиционных подходов.

DOI: 10.31857/S0044451020010083

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовые осцилляторы моделируют фотонные системы в микрорезонаторах, которые на зеркалах могут быть связаны друг с другом или с полями накачки и вакуумного (термостатного) окружения. Взаимодействие с термостатными полями окружения приводит к затуханию квантовых осцилляторов. Эффективные исследования затухающих квантовых систем стали возможны во многом благодаря введению в математический аппарат нелинейной и квантовой оптики понятия кинетического уравнения (master equation) [1–3]. В работах [4, 5] установлен общий вид кинетического уравнения, который сейчас принято называть формой Линдблада кинетического уравнения. Многие работы последних лет по анализу динамики открытых квантовых систем начинаются с формулировки (в качестве исходных) именно кинетических уравнений в форме Линдблада с уже заданными операторами Линдблада. На их основе рассматривают как атомные системы, взаимодействующие с электромагнитными полями различной природы [6–9], так и фотонные системы, состоящие из фотонов резонаторных мод, взаимодействующих с другими резонаторными системами, с внутрирезонаторными и граничными атомами [10–13]. Часто в исходных уравнениях, в которых каналы релаксации уже зафиксированы соответствующими слагаемыми и операторами Линдблада, делают те или иные приближения, включая дисперсионные пределы, когда результаты получаются путем предельного перехода по отстройке от резонанса из рассматриваемого резонансного взаимодействия [14–17]. Работы [6–17] приведены лишь в качестве примеров недавних исследований — реальный масштаб исследований, стартующих с заданных кинетических уравнений в форме Линдблада, значительно больше.

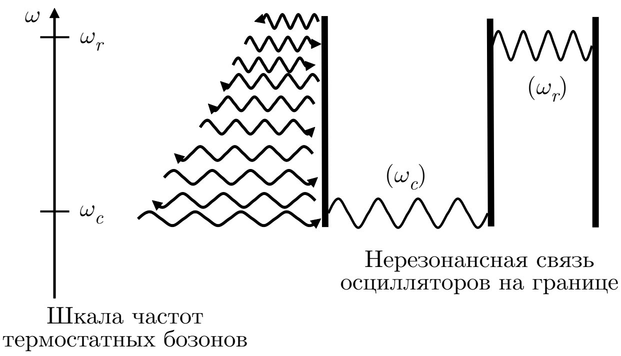
Обоснованный подход к формулировке основных уравнений для исследования динамики открытых квантовых систем состоит в выводе кинетического уравнения из общего исходного гамильтониана открытой системы и ее окружения. В оптике такой

* E-mail: trubilko.andrey@gmail.com
** E-mail: basharov@gmail.com

гамильтониан содержит как быстро меняющиеся во времени слагаемые, так и медленно меняющиеся. И поэтому, прежде чем как-то оперировать с таким гамильтонианом, необходимо избавиться от быстро меняющихся во времени слагаемых. Быстрая и медленная зависимость слагаемых исходного гамильтониана отчетливо видны при записи гамильтонианов основных моделей квантовой оптики в представлении взаимодействия [18–20]. Слагаемые, быстро меняющиеся во времени в представлении взаимодействия, принято называть антивращающими слагаемыми. Было подмечено, что успех подхода на основе кинетических уравнений в форме Линдблада в оптических задачах основан на пренебрежении антивращающими слагаемыми [21]. Но такое пренебрежение возможно лишь в резонансных процессах, и то не всегда [22, 23]. Так что учет антивращающих слагаемых при выводе кинетического уравнения для резонансных, квазирезонансных и нерезонансных процессов до сих пор является актуальной задачей.

Метод учета антивращающих слагаемых при выводе кинетических уравнений открытых оптических квантовых систем разработан в работах [22, 23] на основе квантовых стохастических уравнений в представлении алгебраической теории возмущений. В работе [24] этот метод применен к системе резонансно взаимодействующих осцилляторов.

В данной работе метод [22–24] применен к другой простейшей задаче о двух нерезонансно связанных квантовых осцилляторах. Часто такой связью пренебрегают, полагая, что осцилляторы можно считать изолированными друг от друга. В настоящей работе показано, что нерезонансная связь обеспечивает как накачку осциллятора, так и его распад за счет каналов накачки и релаксации осциллятора, нерезонансной связью с которым обычно пренебрегают. Показано, что у осциллятора, напрямую невзаимодействующего с термостатом, в отсутствие каких-либо резонансных взаимодействий с окружением формируется свой канал релаксации. При этом отчетливо видна некорректность описания такого канала релаксации методами рассмотрения дисперсионных пределов [14–17]. Например, если имеется два квантовых осциллятора существенно разных частот $\omega_c \neq \omega_r$, причем осциллятор ω_r является «практически изолированным» и лишь нерезонансно взаимодействует с осциллятором ω_c, то это нерезонансное взаимодействие формирует прямой канал релаксации осциллятора ω_r, если осциллятор ω_c взаимодействует с термостатным полем. При этом осциллятор ω_c взаимодействует со своей областью спектра термостатного поля, центральная частота которой равна частоте ω_c, т. е. резонансна частоте осциллятора ω_c. Осциллятор ω_r, не связанный с термостатом, начинает взаимодействовать с тем же термостатом, что и осциллятор ω_c, только с термостатными бозонами, чьи частоты лежат в другой области спектра, а именно ω_r. Это наглядно иллюстрирует рисунок.



Осцилляторы ω_c и ω_r представлены как моды двух нерезонансно связанных резонаторов. В результате преобразования исходного гамильтониана системы методами алгебраической теории возмущений полученный эффективный гамильтониан отвечает взаимодействию резонаторных мод с различными областями спектра термостатных бозонов, центральные частоты которых совпадают с частотами ω_c и ω_r

Важно подчеркнуть, что из кинетического уравнения с уже заданными релаксационными операторами в форме Линдблада в силу пренебрежения антивращающими слагаемыми следует, что все осцилляторы должны взаимодействовать лишь с областью спектра термостатных бозонов с центральной частотой ω_c. Но в реальности термостатные поля можно моделировать высокоинтенсивными шумовыми источниками, частоты которых разбросаны вблизи определенных центральных частот, и поэтому могут совсем не перекрываться. Такие шумовые источники могут характеризоваться разными параметрами, например, плотностью числа фотонов на единицу длины частотного спектра. Это означает, что дисперсионный предел в принципе не способен такие процессы описывать.

Случай «чисто» фотонных (бозонных) систем с точки зрения кинетических уравнений особый. С одной стороны, развиты методы для точного решения многочастичных и многомодовых бозонных задач [25–28], которые тем не менее нуждаются в численном моделировании. Это так называемый глобальный подход в термодинамических задачах [25–28]. С другой стороны, резонансное приближение для взаимодействующих мод в интерпретации работы

[25] приводит к результатам, противоречащим принципам термодинамики: «возможна» передача энергии от холодного окружения к горячему [25] и неверное стационарное состояние сильно связанных квантовых систем [29]). Последнее впервые было отмечено еще в работе [30] на основе введения феноменологического релаксационного оператора для резонансно взаимодействующих фотонных систем. Именно поэтому в условиях нерезонансного (дисперсионного) взаимодействия фотонных мод, несомненно, важным является вывод кинетического управляющего уравнения открытой системы из общих принципов и общего начального гамильтониана.

В данной статье на примере двух нерезонансно взаимодействующих осцилляторов учтены антивращающие слагаемые их оператора взаимодействия и показан механизм формирования так называемых интерференционных [23] взаимодействий при включении взаимодействия одного из осцилляторов с термостатным полем. Описан канал релаксации с термостатом осциллятора, напрямую с ним не связанным. Наконец, получено кинетическое уравнение, которое учитывает все антивращающие слагаемые и не противоречит принципам термодинамики, о чем свидетельствует его стандартная форма Линдблада, в терминах которой представлены два релаксационных оператора для изначально заданного и нового каналов релаксации. В отличие от работы [24] имеет место нерезонансный характер взаимодействия рассматриваемой пары осцилляторов, поэтому соответствующий эффективный гамильтониан выведен. Однако дальнейшее использование аппарата квантовых стохастических дифференциальных уравнений аналогично работам [22–24] и мы приводим лишь окончательные кинетические уравнения, описывающие рассматриваемую в статье ситуацию.

2. НЕРЕЗОНАНСНО СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Квантовый осциллятор с гамильтонианом $H_c = \hbar\omega_c c^\dagger c$ является простейшей квантовой моделью. Она успешно описывает фотоны в высокодобротных одномодовых резонаторах, колебания плазмонов и другие нанообъекты, а его взаимодействия с различными объектами: электромагнитными полями, атомами, другими резонаторами и пр., давно являются предметом пристальных исследований. Такой осциллятор будем называть по его частоте — осциллятор ω_c. Простейший случай взаимодействующих между собой осцилляторов, например двух осцилляторов ω_c и ω_r, описывается гамильтонианом [30] $H_c + H_r + V_{c\text{–}r}$, где общий вид оператора взаимодействия $V_{c\text{–}r}$ определяется параметром взаимодействия (константой связи) g:

$$V_{c\text{–}r} = g(c + c^\dagger)(r + r^\dagger),$$

где пары операторов уничтожения и рождения r, $r^\dagger$ и c, $c^\dagger$ фотонов ω_r и ω_c удовлетворяют обычным бозевским коммутационным соотношениям, и при этом операторы каждой пары коммутируют с операторами другой пары.

Задача о динамике двух взаимодействующих осцилляторов решена в общем виде еще в работе [31]. Там же проанализированы нестыковки с приближенным методом, когда пренебрегаются антивращающими слагаемыми. Отсюда следует вывод: пренебрежение антивращающими слагаемыми возможно только в случае резонансного взаимодействия. При этом точные результаты выглядели уже достаточно громоздко и при дополнительном учете взаимодействия одного из осцилляторов с бозонами термостатного поля они становятся непрозрачными, допускающими дальнейшее применение только при использовании численного счета [26–28].

Между тем рассмотрение многомодового поля в качестве термостата предполагает применение марковского приближения [21], так что точные результаты здесь, вообще говоря, и не нужны. Необходима наглядность вычислений для анализа возможных физических следствий взаимодействия одного из осцилляторов с термостатными бозонами, которые в точном подходе можно и не увидеть, и на данный момент такие результаты для рассматриваемой ниже задачи авторам неизвестны.

В случае произвольных частот $\omega_c \neq \omega_r$, включающем также предельные случаи $\omega_c \gg \omega_r$ или обратный $\omega_c \ll \omega_r$, а также случай близких частот $\omega_c \approx \approx \omega_r$, видна главная особенность оптических систем. Если записать уравнение Шредингера в представлении взаимодействия

$$\begin{gathered} i\hbar\frac{d}{dt}|\Psi(t)\rangle = V_{c\text{–}r}(t)|\Psi(t)\rangle, \\ V_{c\text{–}r}(t) = g(ce^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t})(re^{-i\omega_r t} + r^\dagger e^{i\omega_r t}), \end{gathered} \tag{1}$$

то видно, что слагаемые содержат быстро меняющиеся во времени множители $\exp(\pm i(\omega_c \pm \omega_r)t)$. В случае близких частот наряду с быстро меняющимися во времени появляются медленно меняющиеся слагаемые, содержащие множители $\exp(\pm i(\omega_c - \omega_r)t)$.

Стандартный подход для упрощения уравнения (1) состоит в применении метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского [32–34]. Продемонстрируем его применение к интересуемому нас случаю нерезонансно взаимодействующих осцилляторов. Тогда при усреднении сразу получаем, что $\langle V_{c-r}(t)\rangle = 0$, так что нерезонансные осцилляторы в первом приближении можно считать невзаимодействующими.

Чтобы учесть второй порядок метода усреднения в приложении к подобным оптическим задачам, удобно использовать его алгебраический вариант [22–24, 35]. Пользуясь унитарной симметрией квантовой теории, перейдем к новому представлению при помощи унитарного преобразования $|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \exp(-iS)|\Psi(t)\rangle$. В новом представлении все соотношения, в том числе и уравнение Шредингера, имеют прежний вид, но помечены знаком «тильда». Раскладывая (согласно общей теории [23]) преобразованный гамильтониан и генератор преобразования в ряд по константе связи g, получаем

$$S(t) = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t) + \ldots,$$
$$\tilde{V}_{c-r}(t) = \tilde{V}^{(1)}_{c-r}(t) + \tilde{V}^{(2)}_{c-r}(t) + \ldots,$$

где с учетом формулы Бейкера – Хаусдорфа

$$\tilde{V}^{(1)}_{c-r}(t) = \hbar\frac{dS^{(1)}(t)}{dt} + V_{c-r}(t), \tag{2}$$

$$\tilde{V}^{(2)}_{c-r}(t) = \hbar\frac{dS^{(2)}(t)}{dt} - \frac{i}{2}\left[S^{(1)}(t), \tilde{V}^{(1)}_{c-r}(t)\right] - \frac{i}{2}\left[S^{(1)}(t), V_{c-r}(t)\right]. \tag{3}$$

Основное требование, отвечающее подходу Крылова – Боголюбова – Митропольского, — отсутствие в выражении для преобразованного гамильтониана быстро меняющихся во времени слагаемых. Тогда $\tilde{V}^{(1)}_{c-r}(t) = 0$ (как и при усреднении), но дополнительно в алгебраической теории возмущений получаем значение генератора преобразования в предположении адиабатического включения взаимодействия:

$$S^{(1)}(t) = cr\frac{ge^{-i(\omega_c+\omega_r)t}}{i\hbar(\omega_c+\omega_r)} - c^\dagger r^\dagger \frac{ge^{i(\omega_c+\omega_r)t}}{i\hbar(\omega_c+\omega_r)} + cr^\dagger\frac{ge^{-i(\omega_c-\omega_r)t}}{i\hbar(\omega_c-\omega_r)} - c^\dagger r\frac{ge^{i(\omega_c-\omega_r)t}}{i\hbar(\omega_c-\omega_r)}.$$

По формуле (3) этот генератор определяет поправку второго порядка по константе связи, обусловленную учетом антивращающих слагаемых. Подходу Крылова – Боголюбова – Митропольского отвечает отсутствие в (3) быстро меняющихся во времени слагаемых:

$$\tilde{V}^{(2)}_{c-r}(t) = -c^\dagger c\Pi_c(\omega_r) - r^\dagger r\Pi_r(\omega_c) - \frac{g^2}{\hbar(\omega_c+\omega_r)}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Pi_c(\omega_r) &= \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{1}{\omega_c+\omega_r} + \frac{1}{\omega_c-\omega_r}\right),\\ \Pi_r(\omega_c) &= \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{1}{\omega_r+\omega_c} + \frac{1}{\omega_r-\omega_c}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Видим, что и во втором порядке осцилляторы остаются невзаимодействующими между собой, однако влияние другого осциллятора проявляется в значении параметров $\Pi_c(\omega_r)$ и $\Pi_r(\omega_c)$, определяющих сдвиги частот.

Аналогично описывается случай резонансного взаимодействия, когда $\omega_c \approx \omega_r$. Этот случай подробно рассмотрен в работе [24]. Подчеркнем, что в отличие от [24] здесь мы изучаем нерезонансно взаимодействующие осцилляторы ω_c и ω_r, когда их частоты существенно отличаются друг от друга. Но для того чтобы было понятно, как осциллятор взаимодействует с термостатом, ниже приводим выражение для эффективного гамильтониана резонансно взаимодействующих осцилляторов [24]. Для резонансно взаимодействующих осцилляторов в выражениях для $\Pi_c(\omega_r)$ и $\Pi_r(\omega_c)$ появляются расходящиеся резонансные знаменатели. Расходящиеся знаменатели должны быть исключены, но тогда согласно формуле (1) становится отличным от нуля оператор взаимодействия $\tilde{V}^{(1)}_{c-r}(t)$. В результате для резонансного взаимодействия получаются следующие эффективные операторы взаимодействия и генератор преобразования [24]:

$$\tilde{V}^{(1)}_{c-r}(t) = g\left(cr^\dagger e^{-i(\omega_c-\omega_r)t} + c^\dagger r e^{i(\omega_c-\omega_r)t}\right), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}^{(2)}_{c-r}(t) &= -c^\dagger c\Pi(\omega_c) - r^\dagger r\Pi(\omega_c) - \frac{g^2}{2\hbar\omega_c},\\ \Pi(\omega_c) &= \frac{g^2}{2\hbar\omega_c}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$S^{(1)}(t) = cr\frac{ge^{-i(\omega_c+\omega_r)t}}{i2\hbar\omega_c} - c^\dagger r^\dagger\frac{ge^{i(\omega_c+\omega_r)t}}{i2\hbar\omega_c}.$$

На основе этих результатов нетрудно ввести взаимодействие осциллятора ω_c с фотонами бозонного термостата.

Выписанные генераторы преобразования $S^{(1)}(t)$ определяют не только второй порядок гамильтонианов рассматриваемых нерезонансно взаимодействующих осцилляторов ω_c и ω_r, но и так называемые интерференционные каналы при учете каких-либо других взаимодействий [23]. Применительно к учету дополнительного взаимодействия осциллятора ω_c с термостатом эти интерференционные слагаемые проявятся в выражении, обобщающем формулу (3) (см. ниже выражение (9)). Вообще, каждому дополнительному взаимодействию — и резонансному, и нерезонансному — в алгебраической теории возмущений [22–24] ставятся в соответствие слагаемые, имеющие свой порядок по константе этого взаимодействия. Пример рассмотрен в следующем разделе.

3. КАНАЛ РАСПАДА В ТЕРМОСТАТ ОДНОГО ИЗ НЕРЕЗОНАНСНО СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПРИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДРУГОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ТЕРМОСТАТОМ

Пусть теперь один из нерезонансно взаимодействующих осцилляторов, например ω_c, связан с термостатом. Это описывается гамильтонианом термостата $\sum_\omega \hbar\omega a_\omega^\dagger a_\omega$ и оператором взаимодействия V_c осциллятора ω_c с этим термостатом, который запишем в представлении взаимодействия с учетом всех антивращающих слагаемых:

$$V_c(t) = \gamma_c \sum_\omega \left(c e^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t}\right) \times \\ \times \left(a_\omega e^{-i\omega t} + a_\omega^\dagger e^{i\omega t}\right). \quad (8)$$

Здесь γ_c — константа связи с термостатом, чьи операторы рождения $a_\omega^\dagger$ и уничтожения a_ω удовлетворяют обычным бозевским коммутационным соотношениям. Учет такого взаимодействия в задаче о двух нерезонансно взаимодействующих осцилляторах ω_c и ω_r состоит в изменении разложений генератора S преобразования волнового вектора системы и преобразованного суммарного оператора взаимодействия $V(t) = V_c(t) + V_{c\text{–}r}(t)$:

$$S(t) = S^{(1,0)}(t) + S^{(0,1)}(t) + \ldots,$$

$$\tilde{V}(t) = \tilde{V}^{(1,0)}(t) + \tilde{V}^{(0,1)}(t) + \tilde{V}^{(1,1)}(t) + \ldots$$

Теперь нерезонансному взаимодействию между осцилляторами отвечает левый верхний индекс, описывающий, как и раньше, порядок по константе g. Правый индекс отвечает взаимодействию осциллятора ω_c с термостатом и отмечает порядок слагаемого по константе γ_c. Интерференционные слагаемые определяются следующим выражением алгебраической теории возмущений:

$$\tilde{V}^{(1,1)}(t) = \hbar\frac{dS^{(1,1)}(t)}{dt} - \frac{i}{2}\left[S^{(1,0)}(t), V_c(t)\right] - \\ - \frac{i}{2}\left[S^{(1,0)}(t), \tilde{V}^{(0,1)}(t)\right] - \frac{i}{2}\left[S^{(0,1)}(t), V_{c\text{–}r}(t)\right] - \\ - \frac{i}{2}\left[S^{(0,1)}(t), \tilde{V}^{(1,0)}(t)\right]. \quad (9)$$

В результате вычислений, которые описаны в предыдущем разделе, получаем эффективный гамильтониан $V^{Eff}(t)$ рассматриваемой задачи о двух нерезонансно взаимодействующих между собой осцилляторах в условиях, когда осциллятор ω_c дополнительно связан с термостатом:

$$V^{Eff}(t) = \tilde{V}_c^{(1)}(t) + \tilde{V}_r^{(2)}(t) + \tilde{V}_{c\text{–}r}^{(2)}(t), \quad (10)$$

$$\tilde{V}_c^{(1)}(t) = \gamma_c \sum_{\omega\in(\omega_c)} \left(c a_\omega^\dagger e^{-i(\omega_c-\omega)t} + c^\dagger a_\omega e^{i(\omega_c-\omega)t}\right),$$

$$\tilde{V}_r^{(2)}(t) = -\frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_r)} r^\dagger a_\omega e^{-i(\omega-\omega_r)t} - \\ - \frac{g\gamma_c}{2\hbar\omega_c} \sum_{\omega\in(\omega_r)} r a_\omega^\dagger e^{i(\omega-\omega_r)t}.$$

Выражение для $\tilde{V}_{c\text{–}r}^{(2)}(t)$ дается формулами (4) и (5). Оператор $\tilde{V}_c^{(1)}(t)$ эффективно описывает введенное в задачу взаимодействие осциллятора ω_c с термостатом после усреднения по быстро меняющимся слагаемым исходного гамильтониана (8). Взаимодействие эффективно происходит с бозонами, чьи частоты лежат вблизи центральной резонансной частоты ω_c (см. рисунок). Эта область спектра термостатных бозонов обозначена как (ω_c). Оператор $\tilde{V}_r^{(2)}(t)$ описывает резонансное взаимодействие осциллятора ω_r с тем же термостатом. Это взаимодействие возникло благодаря интерференции нерезонансного процесса взаимодействия между осцилляторами ω_c и ω_r (их исходный оператор взаимодействия целиком определяется антивращающими слагаемыми) и нерезонансных антивращающих слагаемых в операторе (8) взаимодействия осциллятора ω_c с термостатом. Взаимодействие эффективно происходит с бозонами, чьи частоты лежат вблизи центральной резонансной частоты ω_r (см. рисунок). Эта область спектра термостатных бозонов обозначена как (ω_r).

Операторы $\tilde{V}_c^{(1)}(t)$ и $\tilde{V}_r^{(2)}(t)$ имеют стандартный вид, позволяющий представить их в марковском приближении квантовыми винеровскими процессами (см., например, [21–24, 36–38]) и записать уравнение для оператора эволюции как стохастическое дифференциальное уравнение. Далее стандартным образом получается кинетическое уравнение для матрицы плотности $\rho^S(t)$ нерезонансно взаимодействующих осцилляторов ω_c и ω_r (верхний индекс S говорит о рассматриваемой системе двух нерезонансно связанных осцилляторов). Поскольку оказалось, что эффективно нерезонансно связанные осцилляторы между собой не взаимодействуют, а постоянные сдвиги частот (7) второго порядка можно включить в перенормированные частоты осцилляторов $\tilde{\omega}_c$ и $\tilde{\omega}_r$, $\tilde{\omega}_c = \omega_c - \Pi_c(\omega_r)$, $\tilde{\omega}_r = \omega_r - \Pi_r(\omega_c)$, кинетическое уравнение в представлении взаимодействия имеет самый стандартный вид Линдблада:

$$\frac{d\rho^S(\bar{t})}{d\bar{t}} = -\hat{\Gamma}_c\rho^S(\bar{t}) - \hat{\Gamma}_r\rho^S(\bar{t}), \qquad (11)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}_i\rho^S(\bar{t}) = -\overline{\gamma}_i\overline{n}_iY_i^\dagger\rho^S(\bar{t})Y_i - \overline{\gamma}_iY_i\rho^S(\bar{t})(\overline{n}_i+1)Y_i^\dagger + \\ + \left(\overline{\gamma}_i\left(\frac{\overline{n}_i+1}{2}\,Y_i^\dagger Y_i + \frac{\overline{n}_i}{2}\,Y_iY_i^\dagger\right)\rho^S(\bar{t}) + \right. \\ \left. + \rho^S(\bar{t})\overline{\gamma}_i\left(\frac{\overline{n}_i+1}{2}\,Y_i^\dagger Y_i + \frac{\overline{n}_i}{2}\,Y_iY_i^\dagger\right)\right).\end{aligned}$$

Здесь индекс i нумерует нерезонансно связанные осцилляторы открытой системы ω_c и ω_r, пробегая значения c и r, чертой над символом обозначен безразмерный аналог введенной ранее величины:

$$\bar{t} = \omega_c t, \quad \overline{\gamma}_c = \frac{2\pi\gamma_c^2}{\hbar\omega_c^2}, \quad \overline{\gamma}_r = \frac{\pi g^2\gamma_c^2}{2\hbar^2\omega_c^4}.$$

В константах связи с термостатами учтено их преобразование при получении кинетического уравнения [21–24, 36–38]. Операторы уничтожения с учетом перенормировки констант связи с термостатом оказываются равными линдбладовским операторам: $Y_c = c$, $Y_r = r$. Наконец, термодинамические параметры — плотности числа фотонов $\overline{n}_c$ и $\overline{n}_r$ на единицу безразмерной частоты — определены соответственно на частотах ω_c и ω_r, т. е. если среднее от операторов рождении и уничтожения бозонов термостата дельта-коррелировано, $\langle a_\omega^\dagger a_{\omega'}\rangle = n(\omega)\delta(\omega-\omega')$, то $\overline{n}_c = n(\omega_c)\omega_c^{-1}$, $\overline{n}_r = n(\omega_r)\omega_r^{-1}$. Подчеркнем, что эти плотности фотонов отвечают плотностям фотонов интенсивных хаотических бозонных полей, которые могут моделировать различные части спектра бозонного дельта-коррелированного поля, взаимодействующего с осциллятором ω_c.

Если начальные состояния нерезонансно связанных осцилляторов никак не сцеплены между собой, то уравнение (11) распадается на два уравнения, каждое из которых описывает один осциллятор, резонансно связанный с термостатным полем. Тогда среднее число фотонов осциллятора в стационарном состоянии $\langle Y_i^\dagger Y_i\rangle = n_i$, так что никаких противоречий с законами термодинамики в рассмотренном подходе не возникает.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод алгебраической теории возмущений, примененный к данной задаче, неоднократно применялся авторами к решению других оптических задач, некоторые из которых собраны в монографии [22]. Наш подход не привлекает к описанию оптических эффектов какое-либо феноменологическое моделирование процессов и явлений, а исходит исключительно из первых принципов и естественного предположения о марковости взаимодействия открытой квантовой системы с термостатом. Однако важным его условием является вывод кинетического уравнения исходя из эффективного гамильтониана, который, в отличие от исходного гамильтониана, не содержит в представлении взаимодействия каких-либо быстро меняющихся во времени слагаемых. Для получения кинетического уравнения (11) не требуется привлекать громоздкий глобальный подход и диагонализацию гамильтониана — гамильтониан нерезонансно связанных систем распался на диагональные гамильтонианы невзаимодействующих осцилляторов при естественном применении метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского. В применении к оптическим задачам этот метод представлен в его алгебраическом варианте, разработанном в работах [22, 23, 35], в который естественно интегрируется метод квантовых стохастических дифференциальных уравнений для получения основного кинетического уравнения в марковском приближении [23]. Алгебраический вариант метода усреднения Крылова – Боголюбова – Митропольского иначе называют алгебраической теорией возмущений [35]. До сих пор примеры интеграции метода квантовых стохастических дифференциальных уравнений в алгебраическую теорию возмущений были рассмотрены лишь для открытых квантовых систем с атомной подсистемой [36–38]. В работе [24] мы обсуждали резонансные взаимодействия бозонов на основе алгебраической теории возмущений. Рассмотренный подход дополняет рассмотрение [24] учетом нерезонансно взаимодействующих осцилляторов и позволяет наглядно учесть все антивращающие слагаемые исходного бозонного гамильтониана, интерференция которых описана посредством генераторов унитарного преобразования исходного вектора состояния всей системы, состоящей из нерезонансно связанных осцилляторов и термостатного (дельта-коррелированного) поля, взаимодействующего с одним из осцилляторов. В результате у «невзаимодействующего» осциллятора, лишь нерезонансно связанного с другим, образовался канал релаксации и/или накачки, осуществляющий энергообмен с термостатным полем и другими внешними полями, с ним напрямую несвязанными. Очевидно, что примеры подобных каналов, которые часто упускаются из рассмотрения, можно найти и в других квантовых системах, и не только оптических.

Еще раз подчеркнем, что наш метод применяется к исходному гамильтониану $V_{ini}(t)$, в котором в представлении взаимодействия представлены все слагаемые — как медленно меняющиеся во времени слагаемые $V'_{ini}(t)$, так и быстро меняющиеся во времени (антивращающие) слагаемые $V''_{ini}(t)$, $V_{ini}(t) = V'_{ini}(t) + V''_{ini}(t)$ (один и два штриха отмечают слагаемые, медленно и быстро меняющиеся во времени). Это касается как взаимодействия между выделенной парой осцилляторов, так и взаимодействия одного из осцилляторов с термостатом. Между тем, при рассмотрении каких-либо других и сложных видов взаимодействия между выделенной парой осцилляторов, например нелинейного взаимодействия между осцилляторами, в прикладных целях сразу используют эффективный гамильтониан $V_{NL} = V'(t)$, который не содержит антивращающих слагаемых $V''(t)$. Это оправдано во многих задачах (см., например, [39]), однако в задачах теории открытых систем при использовании в качестве исходного гамильтониана только медленно меняющихся во времени слагаемых $V'(t)$ канал релаксации, которому посвящена данная статья, будет упущен из виду. Это связано с пропорциональностью слагаемых эффективного оператора взаимодействия $V_{NEW}(t)$ обсуждаемого нового канала релаксации выражениям вида $V_{NEW}(t) \propto [S''_{Thermo}(t), V''(t)]'$, которые определяются интерференцией только быстропеременных слагаемых. Поэтому появление нового канала релаксации невозможно, когда в качестве исходного гамильтониана некорректно берут тот или иной эффективный гамильтониан, полученный без учета взаимодействий изучаемой системы с термостатами. Предложенный метод корректен и в этом случае нелинейного взаимодействия осцилляторов, только тогда надо получать эффективный гамильтониан нелинейного взаимодействия осцилляторов совместно с эффективным гамильтонианом взаимодействия осциллятора (одного или каждого) с термостатом. В результате будут учтены все антивращающие слагаемые и предлагаемый подход алгебраической теории возмущений, наряду с эффективным гамильтонианом нелинейного взаимодействия между осцилляторами, определит эффективную связь «изолированного» от термостата осциллятора с ним же. Здесь собственно нелинейность взаимодействия между выделенной парой осцилляторов не влияет на появление нового канала релаксации.

Практическое значение описанный канал релаксации приобретает в задачах квантовой информации, поскольку служит не только каналом диссипации энергии «изолированного» осциллятора (в рассмотренном в статье смысле), но и каналом накачки осциллятора и записи информационного сигнала. Если такую запись осуществлять посредством нерезонансного соседнего осциллятора, не связанного с термостатным полем, то возможно увеличение времени хранения информации.

Финансирование. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-02-00234а).

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley, New York (1974).
2. F. Haake, Springer Tracts Mod. Phys. **66**, Springer, Berlin (1973).
3. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic, New York (1972).
4. G. Lindblad, Comm. Math. Phys. **40**, 147 (1975).
5. V. Gorini, A. Kossakowski, and E. C. G. Sundarsham, J. Math. Phys. **17**, 821 (1976).
6. T. Werlang, A. V. Dodonov, E. I. Duzzioni, and C. J. Villas-Bôas, Phys. Rev. A **78**, 053805 (2008).
7. C. L. Cortes, M. Otten, and S. K. Gray, Phys. Rev. B **99**, 014107 (2019).
8. C. J. Villas-Boas and D. Z. Rossatto, Phys. Rev. Lett. **122**, 123604 (2019).
9. Ze-an Peng, Guo-qing Yang, Qing-lin Wu, and Gao-xiang Li, Phys. Rev. A **99**, 033819 (2019).
10. A. Tugen and S. Kocaman, Opt. Comm. **436**, 146 (2019).
11. Th. K. Mavrogordatos, F. Barratt, U. Asari, P. Szafulski, E. Ginossar, and M. H. Szymańska, Phys. Rev. A **97**, 033828 (2018).
12. M. Malekakhlagh and A. W. Rodriguez, Phys. Rev. Lett. **122**, 043601 (2019).

13. O. Scarlatella, A. Clerk, and M. Schiro, New J. Phys. **21**, 043040 (2019).

14. A. B. Klimov, J. L. Romero, J. Delgado, and L. L. Sanchez-Soto, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **5**, 34 (2003).

15. K. Lalumiere, J. M. Gambetta, and A. Blais, Phys. Rev. A **81**, 040301(R) (2010).

16. M. Boissonneault, J. M. Gambetta, and A. Blais, Phys. Rev. A **79**, 013819 (2009).

17. C. D. Ogden, E. K. Irish, and M. S. Kim, Phys. Rev. A **78**, 063805 (2008).

18. Л. Мандель, Э. Вольф, *Оптическая когерентность и квантовая оптика*, Физматлит, Москва (2000).

19. В. П. Шляйх, *Квантовая оптика в фазовом пространстве*, Физматлит, Москва (2005).

20. Д. С. Могилевцев, С. Я. Килин, *Методы квантовой оптики*, Беларусская наука, Минск (2007).

21. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin (2004).

22. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Acad., Dordrecht (1999).

23. А. М. Башаров, ЖЭТФ **142**, 419 (2012).

24. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, ЖЭТФ **156**, 407 (2019).

25. A. Levy and R. Kozloff, Europhys. Lett. **107**, 20004 (2014).

26. A. S. Trushechkin and I. V. Volovich, Europhys. Lett. **113**, 30005 (2016).

27. А. Е. Теретёнков, Матем. заметки **100**, 636 (2016).

28. А. Е. Теретёнков, Дисс. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ (2018).

29. C. Joshi, P. Ohberg, J. D. Cresser, and E. Andersson, Phys. Rev. A **90**, 063815 (2014).

30. D. F. Walls, Z. Phys. **234**, 231 (1970).

31. L. E. Estes, T. H. Keil, and L. M. Narducci, Phys. Rev. **175**, 286 (1968).

32. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, РХД, Москва (2004) (переиздание книги 1937 г.).

33. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматлит, Москва (1958).

34. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронопуло, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).

35. V. N. Bogaevski and A. Povzner, *Algebraic Methods in Nonlinear Perturbation Theory*, Springer (1991).

36. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **94**, 28 (2011).

37. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **107**, 151 (2018).

38. А. И. Трубилко, А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **109**, 75 (2019).

39. P. D. Drummond, K. J. McNeil, and D. F. Walls, Optica Acta **28**, 211 (1981).