ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 2, стр. 295–307

САМОСОГЛАСОВАННЫЙ УЧЕТ ФЛУКТУАЦИЙ В СИНГЛЕТНЫХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ ФАЗАХ С s- И d-СИММЕТРИЕЙ

А. Г. Грошев[*], *А. К. Аржников*[**]

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук 426067, Ижевск, Россия

Поступила в редакцию 13 июля 2019 г.,
после переработки 19 июля 2019 г.
Принята к публикации 20 июля 2019 г.

Исследуется поведение термических флуктуаций сверхпроводящего параметра порядка с расширенной s- и $d_{x^2-y^2}$-симметрией. Для этого в рамках теории функционального интегрирования разработан метод самосогласованного учета флуктуаций параметра порядка и рассеяния носителей заряда на флуктуациях связанных электронных пар. Исследование проводится на основе квазидвумерной однозонной модели с притяжением между электронами, находящимися на соседних узлах. Получены функции распределения вероятностей фазовых флуктуаций в зависимости от температуры, концентрации носителей заряда и параметров модели. Показано, что в сверхпроводящей области фаза параметра порядка когерентна, а в плотности состояний на уровне Ферми наблюдается провал. При приближении к некогерентной области фазовой диаграммы провал в плотности состояний исчезает одновременно с потерей фазовой когерентности. В то же время усредненная по флуктуациям амплитуда параметра порядка остается конечной при любых температурах и концентрациях носителей заряда. Полученные результаты показывают, что объяснение псевдощелевого состояния в рамках данного сценария невозможно.

DOI: 10.31857/S0044451020020091

1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на усилия, предпринятые как экспериментаторами, так и теоретиками, природа высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП) до сих пор остается до конца не выясненной. Возможно, что ключом для понимания ее механизма является еще открытый вопрос о природе и свойствах псевдощелевого состояния, которое, как известно, отсутствует в традиционных сверхпроводниках [1]. Решение этого вопроса остается одной из проблем при описании ВТСП-соединений.

В настоящее время рассматриваются два основных сценария при теоретическом объяснении псевдощелевого состояния в ВТСП-соединениях. В первом сценарии наблюдаемые псевдощелевые аномалии возникают в результате образования некогерентных связанных электронных пар выше температуры T_c сверхпроводящего перехода [2]. Фазовая когерентность возникает только в сверхпроводящей области $T < T_c$. Во втором сценарии псевдощелевое состояние определяется зарядовыми или спиновыми флуктуациями (антиферромагнитными флуктуациями или флуктуациями типа волн зарядовой плотности), которые по существу не связаны с явлением сверхпроводимости [3].

Отметим, что рассматриваемые соединения представляют собой сильно анизотропные системы с эффективно пониженной (квазидвумерной) размерностью. Хорошо известно, что в таких системах возрастает роль флуктуаций параметра порядка (ПП) [4]. Учет этих флуктуаций существенно снижает температуру сверхпроводящего перехода и в некоторых случаях может приводить даже к изменению типа фазового перехода [5, 6]. Однако при рассмотрении флуктуаций сверхпроводящего ПП $\Delta = |\Delta| \exp(i\phi)$ обычно либо амплитудными, либо фазовыми флуктуациями пренебрегают (не говоря уже о подходах, в которых эти флуктуации вообще не учитываются). В ряде случаев это оказывается вполне приемлемым приближением.

[*] E-mail: groshev_a.g@mail.ru
[**] E-mail: arzhnikof@bk.ru

Например, в работе [2] было показано, что вблизи сверхпроводящего перехода амплитуда не имеет критического поведения и ее флуктуации не влияют на фазовый переход. Тем не менее, в системах с пониженной размерностью при некоторых условиях амплитудные флуктуации все же могут оказывать существенное влияние на сверхпроводящие свойства [6] и поэтому должны учитываться. Это обусловлено тем, что наиболее вероятные амплитудные и фазовые флуктуации оказываются эффективно связанными. Такая взаимосвязь рассматривалась в работах [5,7] в рамках вариационного приближения. Важным результатом исследований [5, 7] является наличие двух областей псевдощелевого состояния выше температуры сверхпроводящего перехода с частично коррелированной фазой, где основную роль играют фазовые флуктуации, и с полностью разупорядоченной фазой, где основную роль играют амплитудные флуктуации. Используемые в этих работах приближения не лишены недостатков. В частности, в этих работах не учитывалось затухание одночастичных состояний, возникающее в результате учета рассеяния носителей заряда на флуктуациях связанных электронных пар. Перенормировка спектра одночастичных состояний в результате такого рассеяния описывается собственно-энергетической частью одночастичной функции Грина, которая определяет спектральную плотность, и ее самосогласованное вычисление представляется необходимым при объяснении псевдощелевого состояния. Одновременный учет затухания одночастичных состояний и эффективной взаимосвязи между амплитудными и фазовыми флуктуациями в рамках какого-либо самосогласованного подхода, по нашим сведениям, до сих пор не проводился.

В настоящей работе рассматриваются синглетные сверхпроводящие состояния с расширенной s-симметрией, в которых сверхпроводящая щель зависит от волнового вектора по закону $\Delta(k) \propto \cos k_x + \cos k_y$ [8, 9], и $d_{x^2-y^2}$-симметрией с зависимостью $\Delta(k) \propto \cos k_x - \cos k_y$ [10, 11]. Исследуются особенности сверхпроводящих переходов, возникающие за счет термических флуктуаций ПП с одновременным и самосогласованным учетом как затухания одночастичных состояний, так и эффективной взаимосвязи между амплитудными и фазовыми флуктуациями. Исследуется возможность возникновения псевдощелевого состояния в результате флуктуаций сверхпроводящего ПП. Исследование проводится на основе однозонной модели на квадратной решетке с эффективным притяжением между электронами, находящимися на соседних узлах. Предполагается, что это притяжение не зависит от температуры. Выбор такого взаимодействия обусловлен следующими обстоятельствами. Во-первых, принято считать, что основным механизмом спаривания электронов в ВТСП-соединениях является спин-флуктуационный механизм [12–15], который в простейшем приближении обеспечивает эффективное притяжение между электронами, находящимися на соседних узлах. Во-вторых, поскольку природа ВТСП до конца не ясна, предполагается, что вклад в эффективное притяжение между электронами могут давать и другие механизмы (например, поляронный). В-третьих, поскольку характерные значения энергии взаимодействия, обеспечивающего эффективное притяжение между электронами, много больше температуры перехода в сверхпроводящее состояние (например, величина обменного взаимодействия в спиновых флуктуациях, см. [12]), предполагается, что эффективное притяжение между электронами не меняется в рассматриваемой области температур. Наконец, поскольку ВТСП являются слоистыми соединениями, рассматривается двумерный закон дисперсии с параметрами, соответствующими реальным системам на основе купратов [16]. При этом не учитываются флуктуации, разрушающие сверхпроводимость в системах с размерностью $D \leq 2$, обеспечивая тем самым квазидвумерность рассматриваемой модели. Согласно теореме Мермина – Вагнера – Хоэнберга [17–19] в строго двумерной вырожденной системе дальний порядок отсутствует при любой отличной от нуля температуре и сверхпроводящие состояния могут проявляться лишь в фазовых переходах типа Березинского – Костерлица – Таулесса [20]. Предлагаемый метод решения задачи основан на самосогласованных уравнениях теории континуального интегрирования в приближении когерентного потенциала, который в данном случае имеет недиагональный беспорядок и требует особого подхода. В предположении, что квантовые флуктуации сверхпроводящего ПП важны только при достаточно низких температурах, внимание сосредоточено на учете термических (классических) флуктуаций, играющих, по нашему мнению, главную роль в подавляющей области фазовой диаграммы, и в том числе в области псевдощели. Оценка вклада квантовых флуктуаций в подавление температуры сверхпроводящего перехода, выполненная в работе [21], дает значение порядка 6 %. Сравнение фазовых диаграмм, вычисленных с учетом термических и квантовых фазовых флуктуаций, также говорит о важности последних только при достаточно низких температурах [22].

2. МОДЕЛЬНЫЙ ГАМИЛЬТОНИАН И МЕТОД ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Рассматривается однозонный гамильтониан t–t'–V модели с притяжением между электронами, находящимися на ближайших узлах квадратной решетки:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i,j,s} t_{ij}\hat{c}^\dagger_{is}\hat{c}_{js} - \sum_j \mu\hat{n}_j - V\sum_{j,\delta}\hat{n}_{j\uparrow}\hat{n}_{j+\delta\downarrow}, \quad (1)$$

где $t_{ij} = -t$ — матричные элементы электронных перескоков на ближайшие узлы, $t_{ij} = t'$ — следующие за ближайшими; $\hat{c}^\dagger_{js}(\hat{c}_{js})$ — операторы рождения (уничтожения) электрона на узле j с проекцией спина s; $n_{js} = \hat{c}^\dagger_{js}\hat{c}_{js}$, n_j — оператор электронной плотности; V — параметр межузельного притяжения между электронами, μ — химический потенциал. С помощью коммутационных преобразований этот гамильтониан может быть приведен к гамильтониану взаимодействующих электронных пар в следующем виде:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i,j,s} t_{ij}\hat{c}^\dagger_{is}\hat{c}_{js} - \sum_j \mu\hat{n}_j - \\ - \frac{V}{2}\sum_{j,\delta}\left[\hat{n}_{j\uparrow} + \hat{n}_{j+\delta\downarrow} - 1\right] - \\ - \frac{V}{4}\sum_{j,\delta}\left[(\hat{O}^\dagger_{j,\delta} + \hat{O}_{j,\delta})^2 - (\hat{O}^\dagger_{j,\delta} - \hat{O}_{j,\delta})^2\right]. \quad (2)\end{aligned}$$

Здесь введены операторы рождения $\hat{O}^\dagger_{j,\delta} = \hat{c}^\dagger_{j\uparrow}\hat{c}^\dagger_{j+\delta\downarrow}$ и уничтожения $\hat{O}_{j,\delta} = \hat{c}_{j+\delta\downarrow}\hat{c}_{j\uparrow}$ электронной пары на узле j и его ближайшем соседе $j+\delta$.

Задача решается в рамках метода функционального интегрирования с использованием преобразования Хаббарда – Стратоновича в двухполевом представлении (см., например, [23]). В этом методе проблема вычисления статистической суммы взаимодействующих электронных пар сводится к проблеме вычисления статистической суммы независимых электронных пар, находящихся в расширенном пространстве не зависящих от времени (в статическом приближении) вспомогательных флуктуирующих полей, $V^+_{j,\delta}$ и $V^-_{j,\delta}$,

$$\begin{aligned}
&Z = \prod_{j,\delta}\int dV^+_{j,\delta}dV^-_{j,\delta}\exp\left[-\beta\Omega(V^+,V^-)\right],\\
&\Omega(V^+,V^-) = \Omega^0(V^+,V^-) + \\
&\qquad + \Omega^*(V^+,V^-) + \ldots,\\
&\Omega^0(V^+,V^-) = V\sum_{j,\delta}\left[(V^+_{j,\delta})^2 + (V^-_{j,\delta})^2\right],\\
&\Omega^*(V^+,V^-) = -\frac{1}{\beta}\ln Z^*(V^+,V^-),\\
&Z^*(V^+,V^-) = \\
&\quad = \operatorname{Sp} T_\tau \exp\left[-\int_0^\beta d\tau\,\hat{\mathcal{H}}(V^+,V^-,\tau)\right],\\
&\hat{\mathcal{H}}(V^+,V^-,\tau) = \sum_{i,j,s} t_{ij}\hat{c}^\dagger_{is}(\tau)\hat{c}_{js}(\tau) - \\
&\quad - \sum_j \mu\hat{n}_j(\tau) - \frac{V}{2}\sum_{j,\delta}\left[\hat{n}_{j\uparrow}(\tau) + \hat{n}_{j+\delta\downarrow}(\tau) - 1\right] - \\
&\quad - V\sum_{j,\delta}\Big[(V^+_{j,\delta} + iV^-_{j,\delta})\hat{O}^\dagger_{j,\delta}(\tau) + \\
&\qquad + (V^+_{j,\delta} - iV^-_{j,\delta})\hat{O}_{j,\delta}(\tau)\Big],
\end{aligned} \quad (3)$$

где Sp — полный квантовомеханический след; T_τ — оператор упорядочения по мнимому времени $\tau \in [0,\beta]$, $\beta = 1/k_BT$; $\ldots$ — члены, не зависящие от вспомогательных полей. Все зависящие от времени операторы являются операторами в представлении взаимодействия. Поскольку при $T \to 0$ метод функционального интегрирования в статическом приближении воспроизводит результаты приближения Хартри – Фока (ХФ), в качестве невозмущенного гамильтониана удобно выбрать гамильтониан рассматриваемой модели (1) в приближении ХФ. В этом случае возмущение будет определяться только термическими флуктуациями сверхпроводящего ПП. Как отмечалось выше, мы пренебрегли квантовыми флуктуациями, для учета которых необходим выход за рамки статического приближения. При вычислении статистической суммы в рассматриваемом случае удобно перейти от переменных $V^+_{j,\delta}$ и $V^-_{j,\delta}$ к полярным переменным: модуль $\Delta_{j,\delta}$ и фаза $\phi_{j,\delta}$, вводя таким образом флуктуирующий комплексный ПП $\Delta_{j,\delta}\exp(i\phi_{j,\delta})$:

$$
\begin{aligned}
&Z = \prod_{j,\delta} \int_0^\infty \Delta_{j,\delta} d\Delta_{j,\delta} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_{j,\delta} \exp\left[-\beta\Omega(\Delta,\phi)\right],\\
&\Omega(\Delta,\phi) = \Omega^0(\Delta,\phi) + \Omega^*(\Delta,\phi) + \ldots,\\
&\Omega^0(\Delta,\phi) = V\sum_{j,\delta} \Delta^2_{j,\delta},\\
&\Omega^*(\Delta,\phi) = -\frac{1}{\beta}\ln Z^*(\Delta,\phi),\\
&Z^*(\Delta,\phi) = \mathrm{Sp}\, T_\tau \exp\left[-\int_0^\beta d\tau \hat{\mathcal{H}}(\Delta,\phi,\tau)\right],\\
&\hat{\mathcal{H}}(\Delta,\phi,\tau) = \hat{\mathcal{H}}_{HF}(\Delta,\alpha) + \Delta\hat{\mathcal{U}}(\Delta,\phi,\tau),\\
&\hat{\mathcal{H}}_{HF}(\Delta,\alpha) = \sum_{i,j,s} t_{ij}\hat{c}^+_{is}\hat{c}_{js} - \sum_j \mu\hat{n}_j - \\
&\qquad - \frac{V}{2}\sum_{j,\delta}[\hat{n}_{j\uparrow} + \hat{n}_{j+\delta\downarrow} - 1] - \\
&- V\sum_{j,\delta}\overline{\Delta}_{j,\delta}[\exp(i\alpha_{j,\delta})\hat{O}^\dagger_{j,\delta} + \exp(-i\alpha_{j,\delta})\hat{O}_{j,\delta}],\\
&\Delta\hat{\mathcal{U}}(\Delta,\phi,\tau) = -V\sum_{j,\delta}\left[\Delta_{j,\delta}\exp(i\phi_{j,\delta}) - \right.\\
&\qquad \left. - \overline{\Delta}_{j,\delta}\exp(i\alpha_{j,\delta})\right]\hat{O}^\dagger_{j,\delta}(\tau) - \\
&\qquad - V\sum_{j,\delta}\left[\Delta_{j,\delta}\exp(-i\phi_{j,\delta}) - \right.\\
&\qquad \left. - \overline{\Delta}_{j,\delta}\exp(-i\alpha_{j,\delta})\right]\hat{O}_{j,\delta}(\tau),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $\hat{\mathcal{H}}_{HF}$ — гамильтониан рассматриваемой модели (1) в приближении ХФ; $\Delta\hat{\mathcal{U}}$ — потенциал флуктуирующих полей; $\overline{\Delta}_{j,\delta}$ — значение амплитуды усредненного по флуктуациям сверхпроводящего ПП; $\alpha_{j,\delta}$ — фаза ПП, определяющая его симметрию. В данной работе мы ограничимся изучением сверхпроводящих фаз с s- и d-симметрией. Для этого необходимо выбрать амплитуду в виде функции, не зависящей от узлов j и их ближайших соседей δ, при этом фаза должна зависеть только от ближайших соседей $\overline{\Delta}_{j,\delta}\exp(i\alpha_{j,\delta}) = \overline{\Delta}\exp(i\alpha_\delta)$:

$$
\alpha_\delta = \begin{cases} \alpha, & \delta = \pm\delta_x,\\ -\alpha, & \delta = \pm\delta_y, \end{cases} \tag{5}
$$

где δ_x и δ_y — проекции δ на координатные оси. Тогда значениям фазы $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ соответствует s-симметрия, а $\alpha = \pm\pi/2$ — d-симметрия.

В основном состоянии термические флуктуации сверхпроводящего ПП отсутствуют и, следовательно, потенциал флуктуирующих полей $\Delta\hat{\mathcal{U}}$ исчезает, а функция распределения амплитудных и фазовых флуктуаций сводится к дельта-функциям Дирака

$$
P(\Delta_{j,\delta},\phi_{j,\delta}) = \delta(\Delta_{j,\delta} - \overline{\Delta}_{j,\delta})\delta(\phi_{j,\delta} - \alpha_{j,\delta}).
$$

В этом случае $\overline{\Delta}_{j,\delta}$ является амплитудой ПП, вычисленной в приближении ХФ. Вычисление интеграла по амплитудному полю $\Delta_{j,\delta}$ в (4) проводится в приближении «седловой точки», в котором переменное поле $\Delta_{j,\delta}$ заменяется его значением в «седловой точке» $\Delta_{j,\delta}(\phi)$. При этом учитываются наиболее вероятные амплитудные флуктуации. Это приближение предполагает, что амплитудные флуктуации гораздо быстрее, чем флуктуации фазы, и амплитудное поле успевает подстроиться под распределение фазы равновесным образом. Аналогичное приближение использовалось в упомянутом выше вариационном подходе [5, 7]. При вычислении «седловой точки» важно учесть, что подынтегральная функция в этой точке не должна обращаться в нуль. Для удовлетворения этого требования необходимо включить в термодинамический потенциал множитель $\Delta_{j,\delta}$ из якобиана (4), как это было сделано в работах [5, 7]. В результате уравнение для нахождения «седловой точки», получаемое из условия минимума термодинамического потенциала $\partial\Omega/\partial\Delta_{j,\delta} = 0$, не имеет решения $\Delta_{j,\delta} = 0$ ни при какой температуре, кроме $T = 0$. Заметим, что не все авторы учитывают эту особенность [24–27], получая в результате нулевое значение амплитуды сверхпроводящего ПП при конечных температурах. После некоторых преобразований уравнения для минимума термодинамического потенциала нетрудно получить самосогласованное уравнение для определения амплитуды сверхпроводящего ПП $\Delta(\phi)$:

$$
\begin{aligned}
&\Delta^2(\phi) - \frac{\Delta(\phi)K(\phi)}{2} - \frac{1}{2\beta V} = 0,\\
&K(\phi) = \frac{1}{\beta}\sum_n \exp(i\phi_\delta) G^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(i\omega_n) + \\
&\qquad + \frac{1}{\beta}\sum_n \exp(-i\phi_\delta) G^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(i\omega_n),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где $G^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(i\omega_n)$ и $G^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(i\omega_n)$ представляют собой фурье-образы аномальных температурных гриновских функций, определяемых стандартными соотношениями:

$$
\begin{aligned}
&G^{\downarrow\uparrow}_{j,j'}(\tau - \tau') = -\left\langle T_\tau \hat{c}^\dagger_{j\downarrow}(\tau)\hat{c}^\dagger_{j'\uparrow}(\tau')\right\rangle,\\
&G^{\uparrow\downarrow}_{j,j'}(\tau - \tau') = -\left\langle T_\tau \hat{c}_{j\uparrow}(\tau)\hat{c}_{j'\downarrow}(\tau')\right\rangle,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$\omega_n = (2n+1)\pi/\beta$ — мацубаровские частоты для ферми-частиц. Из явных выражений для $G^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(i\omega_n)$ и $G^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(i\omega_n)$ (см. Приложение) следует свойство $G^{\downarrow\uparrow}_{j\pm\delta_x,j}(i\omega_n) = G^{\uparrow\downarrow}_{j,j\pm\delta_y}(i\omega_n)$, которое приводит к независимости $K(\phi)$ от узлов и их ближайших соседей. Выбирая решение уравнения

(6) с $\Delta(\phi) > 0$, можно представить его в следующем виде:

$$\Delta(\phi) = \frac{K(\phi)}{4} + \sqrt{\frac{K^2(\phi)}{16} + \frac{1}{2V\beta}}. \qquad (8)$$

Известно, что термодинамический потенциал (4) может быть выражен через температурные гриновские функции [28, 29]. Это преобразование удобнее проводить в представлении матриц Намбу

$$\hat{c}_{j\delta}(\tau) = \left[\begin{array}{c} \hat{c}_{j\uparrow}(\tau) \\ \hat{c}^{\dagger}_{j+\delta\downarrow}(\tau) \end{array}\right], \quad \hat{c}^{\dagger}_{j\delta}(\tau) = \left[\begin{array}{cc} \hat{c}^{\dagger}_{j\uparrow}(\tau) & \hat{c}_{j+\delta\downarrow}(\tau) \end{array}\right], \qquad (9)$$

через которые выражается температурная функция Грина и флуктуирующий потенциал (4):

$$\begin{gathered} G_{j\delta}(\tau-\tau') = -\left\langle T_\tau \hat{c}_{j\delta}(\tau)\hat{c}^{\dagger}_{j\delta}(\tau')\right\rangle = \\ = \left[\begin{array}{cc} G^{\uparrow\uparrow}_{j,j}(\tau-\tau') & G^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(\tau-\tau') \\ G^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(\tau-\tau') & G^{\downarrow\downarrow}_{j+\delta,j+\delta}(\tau-\tau') \end{array}\right], \\ \Delta\hat{\mathcal{U}}(\Delta,\phi,\tau) = \sum_{j,\delta} \hat{c}^{\dagger}_{j\delta}(\tau)\Delta\mathcal{U}_{j\delta}\hat{c}_{j\delta}(\tau), \\ \Delta\mathcal{U}_{j\delta} = \left[\begin{array}{cc} 0 & \Delta\hat{\mathcal{U}}^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta} \\ \Delta\hat{\mathcal{U}}^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j} & 0 \end{array}\right], \\ \Delta\hat{\mathcal{U}}^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta} = V\left[\overline{\Delta}\exp(i\alpha_\delta) - \Delta(\phi)\exp(i\phi_\delta)\right], \\ \Delta\hat{\mathcal{U}}^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j} = \\ = V\left[\overline{\Delta}\exp(-i\alpha_\delta) - \Delta(\phi)\exp(-i\phi_\delta)\right]. \end{gathered} \qquad (10)$$

Здесь $G^{\uparrow\uparrow}_{j,j}(\tau-\tau')$ и $G^{\downarrow\downarrow}_{j+\delta,j+\delta}(\tau-\tau')$ — нормальные температурные гриновские функции, определяемые стандартными соотношениями:

$$\begin{gathered} G^{\uparrow\uparrow}_{j,j'}(\tau-\tau') = -\left\langle T_\tau \hat{c}_{j\uparrow}(\tau)\hat{c}^{\dagger}_{j'\uparrow}(\tau')\right\rangle, \\ G^{\downarrow\downarrow}_{j,j'}(\tau-\tau') = -\left\langle T_\tau \hat{c}^{+}_{j\downarrow}(\tau)\hat{c}_{j'\downarrow}(\tau')\right\rangle. \end{gathered} \qquad (11)$$

Отметим, что в представлении матриц Намбу для температурной функции Грина (10) может использоваться обычная диаграммная техника без введения новых диаграмм для ее аномальных слагаемых. Умножая флуктуирующий потенциал $\Delta\hat{\mathcal{U}}$ в (4) на константу связи λ и дифференцируя термодинамический потенциал $\Omega^*(\lambda)$ по этой константе, можно получить выражение для этой производной через температурную функцию Грина (10):

$$\frac{\partial\Omega^*(\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{1}{\beta}\sum_{n,j,\delta} \mathrm{Tr}\left[\Delta\mathcal{U}_{j\delta}G_{j,\delta}(i\omega_n,\lambda)\right], \qquad (12)$$

где Tr — сумма диагональных элементов. Свойство $G^{\downarrow\uparrow}_{j\pm\delta_x,j}(i\omega_n) = G^{\uparrow\downarrow}_{j,j\pm\delta_y}(i\omega_n)$, следующее из их явных выражений (см. Приложение), приводит к независимости от ближайших соседей выражения под знаком суммы в (12). Для простоты индексы узлов j и их ближайших соседей δ в дальнейшем не указываются. С помощью уравнения Дайсона в двухузельном приближении когерентного потенциала (two-site coherent-potential approximation, TCPA) (A.2) термодинамический потенциал Ω^* в расчете на одну электронную пару выражается через температурные гриновские функции после интегрирования уравнения (12) по константе связи λ от $\lambda = 0$ до $\lambda = 1$ с учетом того, что $\Omega^*(\lambda = 0) = \Omega_{HF}$:

$$\begin{gathered} \Omega^* = \Omega_{HF} + \frac{1}{\beta}\sum_n \ln\left(\det\left[1 + F(i\omega_n)\Sigma(i\omega_n)\right]\right) - \\ - \frac{1}{\beta}\sum_n \ln\left(\det\left[1 - F(i\omega_n)\left(\Delta\mathcal{U}(\phi) - \Sigma(i\omega_n)\right)\right]\right). \end{gathered} \qquad (13)$$

Здесь $\Omega_{HF} = -1/\beta\ln(\mathrm{Sp}\exp[-\beta\hat{H}_{HF}])$ — термодинамический потенциал в приближении ХФ, $F(i\omega_n)$ — фурье-образ эффективной температурной гриновской функции в представлении матриц Намбу (A.9), $\Delta\mathcal{U}(\phi)$ — флуктуирующий потенциал (10), $\Sigma(i\omega_n)$ — собственно-энергетическая часть в представлении матриц Намбу (A.1). Суммирование по мацубаровским частотам проводится стандартным образом, с использованием выражения

$$\frac{1}{\beta}\sum_n f(i\omega_n) = \pm\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dE\ \mathrm{th}\left(\frac{\beta E}{2}\right)\mathrm{Im}\left[f\left(E^{\pm}\right)\right], \qquad (14)$$

где $E^{\pm} = E \pm i0$. После несложных преобразований статистическая сумма в расчете на одну электронную пару представляется в виде интеграла только по фазовому полю ϕ:

$$\begin{gathered} Z = \exp\left[-\beta(\Omega_{HF} + \Omega[\Sigma] + \Delta\Omega)\right], \\ \Omega[\Sigma] = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dE\,\mathrm{th}\left(\frac{\beta E}{2}\right) \times \\ \times \arg\left(\det\left[1 + F(E^-)\Sigma(E^-)\right]\right), \\ \Delta\Omega = -\frac{1}{\beta}\ln\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\phi\,\Delta(\phi)\exp\left[-\beta\Delta\Omega(\phi)\right]\right), \\ \Delta\Omega(\phi) = V\Delta^2(\phi) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dE\ \mathrm{th}\left(\beta E/2\right) \times \\ \times \arg\left(\det\left[1 - F(E^-)\left[\Delta\mathcal{U}(\phi) - \Sigma(E^-)\right]\right]\right), \end{gathered} \qquad (15)$$

где $\Omega[\Sigma]$ — термодинамический потенциал эффективной среды, определяемый собственно-энергетической частью $\Sigma(E)$ (A.1); $\Delta\Omega$ — флуктуационная часть термодинамического потенциала. К этим уравнениям необходимо добавить уравнение для определения химического потенциала:

$$n(\mu) = 1 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dE \,\mathrm{th}\left(\frac{\beta E}{2}\right) \times \\ \times \,\mathrm{Im}\left[F^{\downarrow}(E^-) - F^{\uparrow}(E^-)\right], \quad (16)$$

где $F^{\uparrow}(E^-)$ и $F^{\downarrow}(E^-)$ представляют собой диагональные элементы эффективной температурной гриновской функции (A.2) (см. Приложение). Средние значения термодинамических величин и средняя матрица рассеяния в самосогласованных уравнениях TCPA для собственно-энергетической части $\Sigma(E)$ вычисляются следующим образом:

$$\langle A\rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} d\phi\, A(\phi)P(\phi), \\ P(\phi) = \exp\left[-\beta\Delta\Omega(\phi) + \beta\Delta\Omega\right]. \quad (17)$$

Здесь A — усредняемая величина. Численное решение этих самосогласованных уравнений позволяет определить сверхпроводящие свойства рассматриваемой системы при условии, что термодинамический потенциал для данного α является минимальным.

Из (17) следует, что вероятность флуктуации фазового поля $\Delta\phi = \phi - \alpha$ при температуре T определяется разностью термодинамических потенциалов $\Delta F(\phi) = \Delta\Omega(\phi) - \Delta\Omega(\alpha)$, где α — значение фазы, при которой достигается глобальный минимум термодинамического потенциала. Таким образом, $\Delta F(\phi)$ представляет собой энергию, необходимую для фазовой флуктуации $\Delta\phi$, или фазовую жесткость. Именно фазовые флуктуации определяют параметры эффективной среды (A.1) при конечной температуре. При $T \geq T_c$ глобальный минимум термодинамического потенциала исчезает и для реализации любой фазовой флуктуации не требуется энергии, $\Delta F(\phi) = 0$ (т. е. фазовая жесткость в системе отсутствует).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

При расчетах использовались характерные для купратов параметры $V = t$ и $t' = 0.2t$ [16], которые выбирались ранее при вычислении фазовых диаграмм сверхпроводящих состояний без учета флуктуаций ПП [30]. Как показано в работе [30], при этих параметрах в большей части фазовой диаграммы реализуются сверхпроводящие состояния с расширенной s- и $d_{x^2-y^2}$-симметрией.

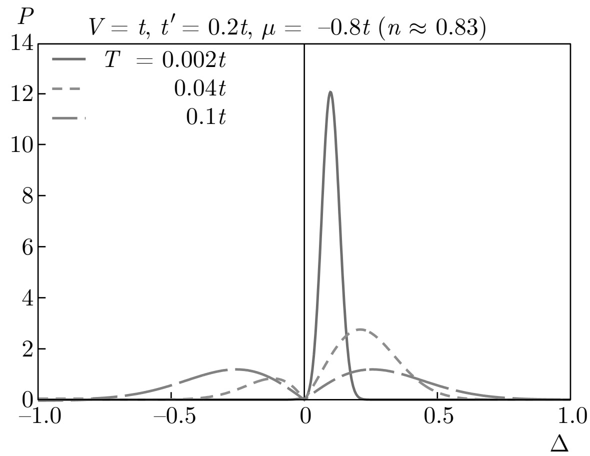

Рис. 1. Вероятности распределения амплитудных флуктуаций сверхпроводящего ПП, рассчитанные при значении химического потенциала $\mu = -0.8t$, соответствующем концентрации электронов $n \approx 0.83$

3.1. Учет ограниченных флуктуаций фазы ($\phi = \pm 0.5\pi$)

Для анализа приближения «седловой точки», наиболее часто используемого в методе континуального интегрирования, были проведены расчеты сверхпроводящего состояния с d-симметрией и ограниченными ($\phi = \pm 0.5\pi$) флуктуациями фазы. Такое ограничение позволяет при наименьших численных затратах сравнить решения, полученные двумя способами. В первом способе, без использования дополнительных приближений, область изменения амплитудного поля расширяется на отрицательные значения. В таком подходе положительные значения амплитудного поля связаны с фазой $\phi = 0.5\pi$, а отрицательные — с фазой $\phi = -0.5\pi$. Интегрирование проводится по всей области изменения амплитудного поля, включая его отрицательные значения. Во втором способе используется приближение «седловой точки» для амплитудного поля, в котором интегрирование по этому полю заменяется суммированием по седловым точкам $\Delta(\phi)$ с $\phi = \pm 0.5\pi$. На рис. 1 и 2 приведены примеры самосогласованного расчета вероятностей распределения амплитудных и фазовых флуктуаций $\phi = \pm 0.5\pi$ ПП соответственно для первого и второго способов. Из рисунков видно, что существует температура T_c, выше которой вероятности фазовых флуктуаций $\phi = \pm 0.5\pi$ сравниваются и

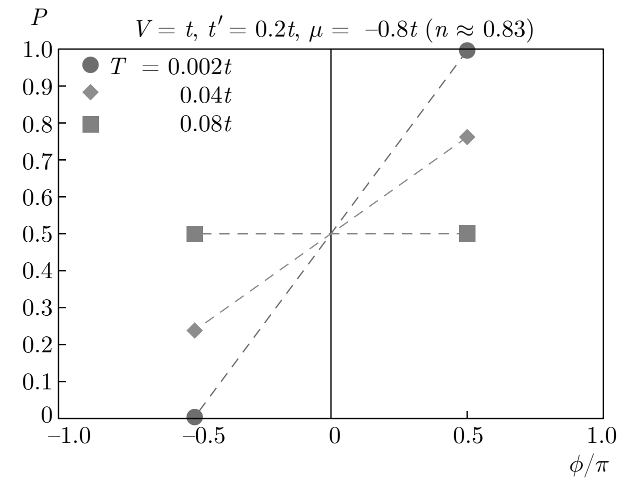

Рис. 2. Вероятности фазовых флуктуаций $\phi = \pm 0.5\pi$ сверхпроводящего ПП

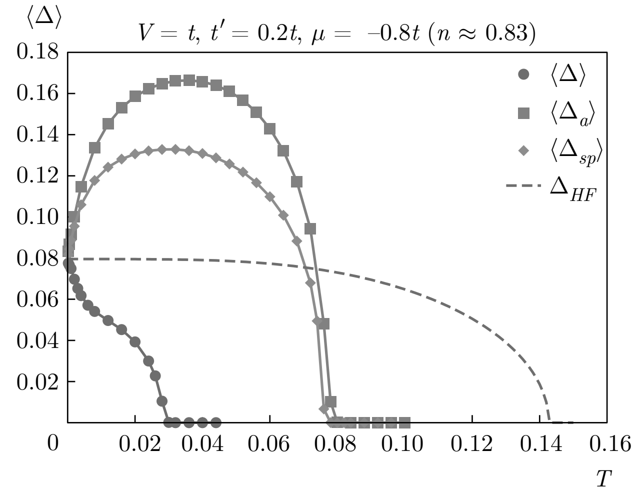

Рис. 3. Температурные зависимости амплитуды усредненного ПП с d-симметрией в различных приближениях

система переходит в нормальное состояние. Температурные зависимости амплитуд усредненного ПП и значения T_c, вычисленные в приближении «седловой точки» $\langle\Delta_{sp}\rangle$ и без использования дополнительных приближений $\langle\Delta_a\rangle$ представлены на рис. 3. Неплохое согласие между результатами двух способов во всем рассматриваемом диапазоне температур позволяет обосновать использование приближения «седловой точки» в дальнейших расчетах. Дополнительно на рис. 3 приведена температурная зависимость амплитуды ПП Δ_{HF}, полученная в методе ХФ [30] без учета флуктуаций. Из сравнения видно, что флуктуации существенно изменяют ее поведение и температуру фазового перехода.

3.2. Полный учет флуктуаций фазы $\phi \in [-\pi, \pi]$

В этом разделе рассматриваются решения задачи с учетом всех возможных фазовых флуктуаций из интервала $[-\pi, \pi]$. Результаты расчетов амплитуды $\langle\Delta\rangle$ усредненного ПП представлены на рис. 3. Зависимость амплитуды усредненного ПП от концентрации носителей заряда при температуре $T = 0.002t$ приведена на рис. 4. Видно, что при увеличении числа электронов происходит переход из сверхпроводящего состояния с s-симметрией в сверхпроводящее состояние с d-симметрией. Такая же последовательность фазовых переходов получена в приближении ХФ [30], однако даже при такой относительно низкой температуре $T = 0.002t$ сверхпроводящие области существенно сужаются. На рис. 3 и рис. 5 представлены температурные за-

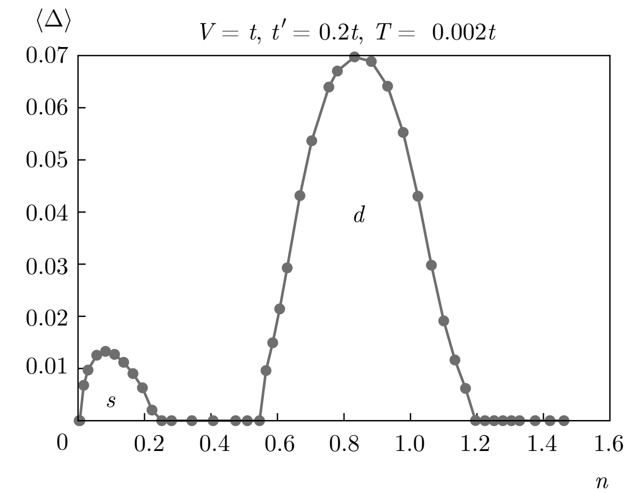

Рис. 4. Зависимость амплитуды усредненного ПП от концентрации носителя заряда при температуре $T = 0.002t$

висимости амплитуд усредненного ПП в сверхпроводящих областях с d- ($n \approx 0.83$) и s-симметрией ($n \approx 0.108$) соответственно. Отметим, что при учете фазовых флуктуаций из интервала $[-\pi, \pi]$ происходит существенное изменение их температурного поведения по сравнению с результатами, в которых учитывались только ограниченные значения фазы $\phi = \pm 0.5\pi$, при этом существенно, приблизительно в 4 раза для состояния с d-симметрией и приблизительно в 7 раз для состояния с s-симметрией, снижается температура перехода в сверхпроводящее состояние. Согласно БКШ-теории отношение энергетической щели Δ_0 к температуре сверхпроводящего перехода T_c имеет универсальное значение

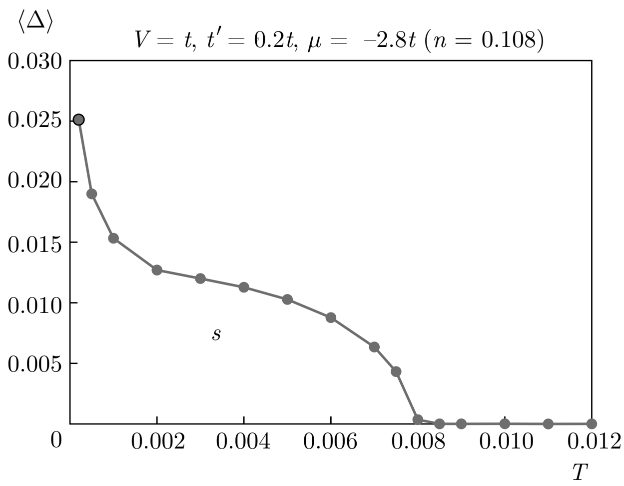

Рис. 5. Температурная зависимость амплитуды усредненного ПП с расширенной s-симметрией

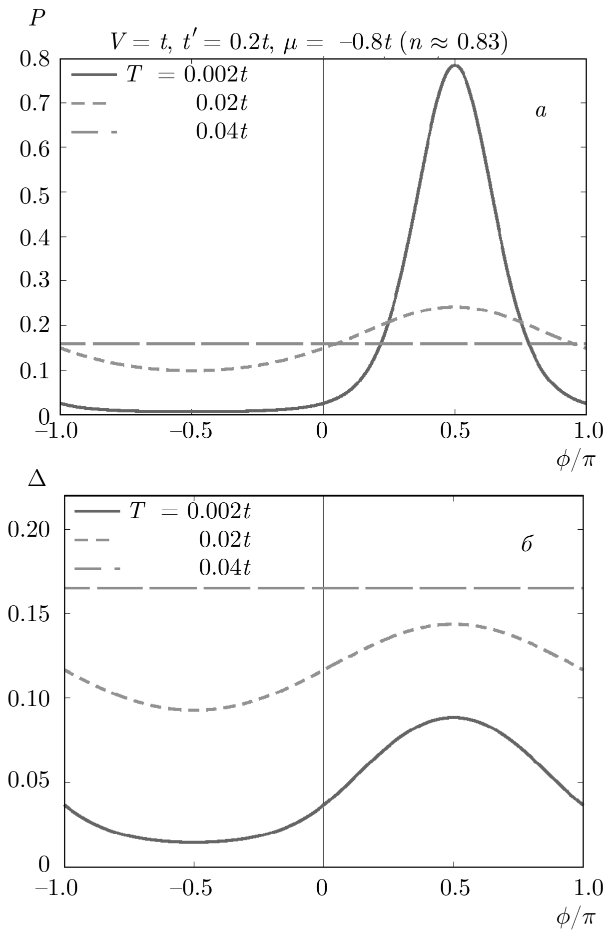

Рис. 6. Вероятности распределения фазовых флуктуаций ϕ сверхпроводящего ПП с d-симметрией (a) и зависимости амплитуд ПП с d-симметрией от ϕ ($б$)

$\Delta_0/T_c = 1.76$. Результаты, полученные в приближении ХФ [30] для рассматриваемой модели, дают значения $1 \lesssim \Delta_0/T_c \lesssim 1.4$, которые незначительно отличаются от результата БКШ. Такие пределы изменения Δ_0/T_c получены в [30] для $t'/t = 0.2$ и $t'/t = 0.7$ при достаточно широком изменении значений параметра межузельного притяжения V/t: 0.25, 0.5, 1. Предполагая, что и при учете флуктуаций сохранится такая относительно слабая зависимость пределов изменения Δ_0/T_c от V/t, можно говорить о том, что Δ_0/T_c в основном определяется параметрами t' и n. Заметим, что, поскольку в Δ_0/T_c входит значение энергетической щели Δ_0 при $T = 0$, изменение Δ_0/T_c при учете флуктуаций происходит в основном за счет понижения T_c. Исходя из полученных в настоящей работе значений T_c для d- и s-симметрии, можно оценить пределы изменения Δ_0/T_c с учетом фазовых флуктуаций $4 \lesssim \Delta_0/T_c \lesssim 9.8$. Кроме того, приведенное на рис. 4 в [30] распределение энергетической щели Δ_0 по фазовой диаграмме в переменных t'–n позволяет качественно понять зависимость Δ_0/T_c от t' и n. В частности, максимальные значения Δ_0/T_c можно ожидать при значениях t' и n, соответствующих особенностям Ван Хова, а уменьшение t' должно вести к понижению нижнего предела изменения Δ_0/T_c. Проведенные в настоящей работе расчеты показывают, что при учете фазовых флуктуаций это отношение действительно значительно увеличивается: $\Delta_0/T_c \approx 5.3$ для d-симметрии и $\Delta_0/T_c \approx 6.2$ для расширенной s-симметрии (в принятых выше обозначениях $\Delta_0 = 2V\langle\Delta\rangle$). Предварительные расчеты при $t'/t = 0.7$ дают для d-симметрии значение $\Delta_0/T_c \approx 5$. В экспериментах на ВТСП-соединениях $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ было получено значение $\Delta_0/T_c \approx 3.95$ [31].

Результаты самосогласованного расчета вероятностей распределения фазовых флуктуаций и наиболее вероятных флуктуаций амплитуды, вычисленные в приближении «седловой точки» для трех различных температур, приведены на рис. 6. Видно, что наиболее вероятное значение фазы соответствует d-симметрии, а форма кривых далека от гауссовой даже при относительно низких температурах $T = 0.002t$. Следует отметить не менее важный результат, связанный с существенной зависимостью наиболее вероятных значений амплитуды ПП от фазы флуктуаций. Это означает, что приближения, в которых амплитудные флуктуации не учитываются, а именно: амплитуда является константой и не зависит от фазовых флуктуаций, не оправданы. Важной величиной, на которую влияют флуктуации

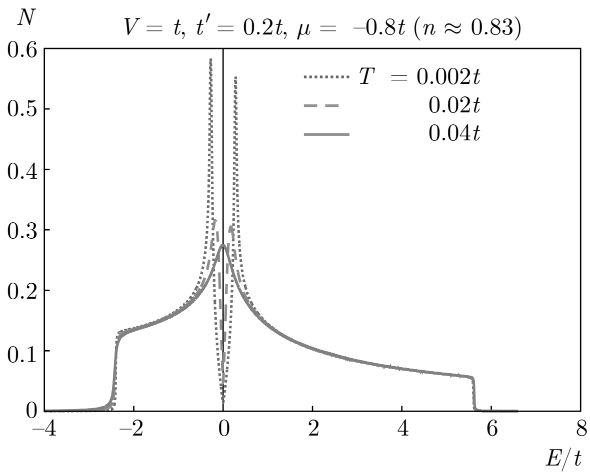

Рис. 7. Плотность электронных состояний, вычисленная для сверхпроводящего состояния с d-симметрией

сверхпроводящего ПП при самосогласованном подходе является собственно-энергетическая часть одночастичной функции Грина, определяющая плотность состояний. Плотность состояний, мнимая и действительная части собственной энергии для трех различных температур, представлены на рис. 7, 8. Из приведенных графиков видно, что провал в плотности электронных состояний с повышением температуры уменьшается и полностью исчезает в точке фазового перехода одновременно с потерей фазовой когерентности ПП. Мнимая и действительная части собственной энергии, напротив, с ростом температуры увеличиваются в результате усиления рассеяния на флуктуациях связанных электронных пар и становятся значимыми вблизи фазового перехода (рис. 8*а*,*б*).

Следует также отметить определенную структуру в энергетической зависимости аномальной части собственной энергии (рис. 8*в*). Относительный вклад этой структуры составляет порядка 10 % и, вполне возможно, может влиять на возбуждение электронов. С ростом температуры величина аномальной части собственной энергии уменьшается и обращается в нуль в точке фазового перехода.

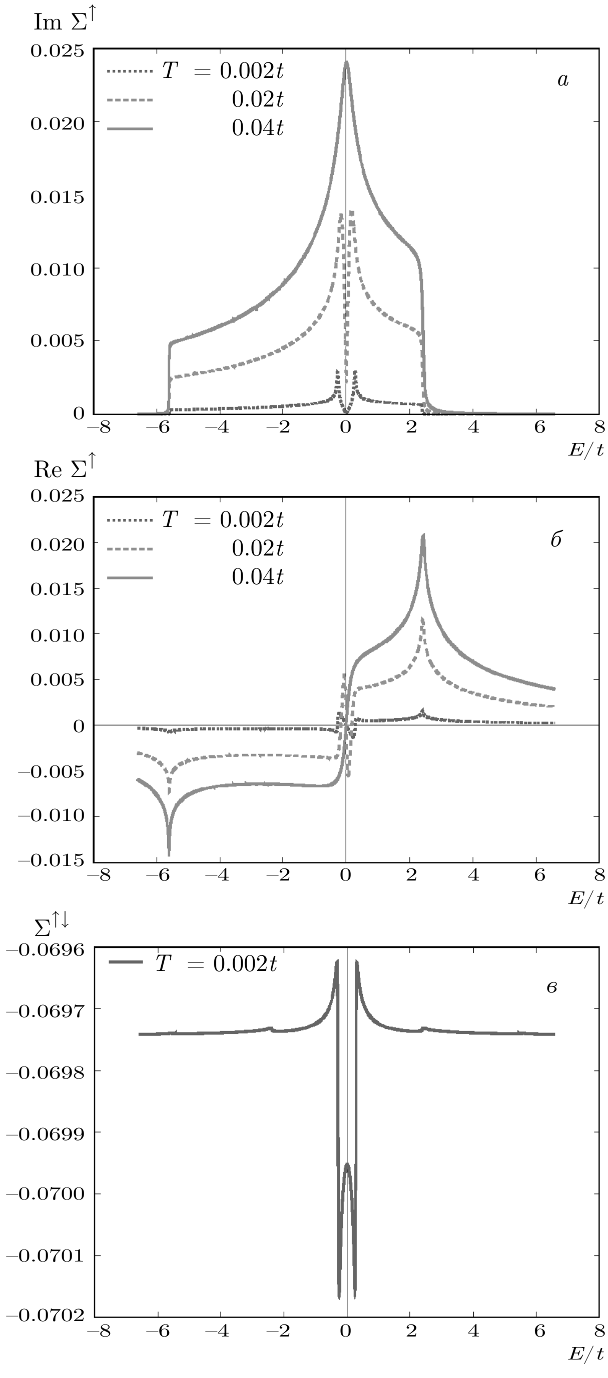

Рис. 8. Мнимая (*а*), действительная (*б*) и недиагональная (*в*) части собственной энергии одноэлектронной функции Грина, вычисленные для сверхпроводящего состояния с d-симметрией

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование влияния (фазовых) флуктуаций сверхпроводящего ПП на поведение сверхпроводящей щели, одноэлектронной плотности состояний и температуры фазового перехода в синглетных сверхпроводящих фазах с расширенной s- и $d_{x^2-y^2}$-симметрией. Показано, что при выбранных параметрах учет этих флуктуаций не приводит к изменению рассматриваемых типов симметрии, но существенно, примерно в 4 раза в случае d-симметрии и примерно в 7 раз в случае s-симметрии, снижает температуры перехода в сверхпроводящее состояние. В результате этого отношение энергетической щели к температуре сверхпроводящего перехода значительно превышает универсальное БКШ-значение, что действительно наблюдается в экспериментах на ВТСП-соединениях. Усредненная амплитуда ПП остается конечной при любых температурах и концентрациях носителей заряда. Поэтому переход в нормальное состояние происходит в результате потери фазовой когерентности ПП. Показано, что в рассматриваемом самосогласованном подходе провал в электронной плотности состояний на уровне Ферми отсутствует выше температуры фазового перехода, несмотря на отличное от нуля среднее значение амплитуды ПП. Таким образом, объяснение псевдощелевого состояния в некогерентной области фазовой диаграммы в рамках рассматриваемого подхода невозможно. Предложенный метод может быть использован для исследования влияния фазовых флуктуаций на сверхпроводящие фазы с различными (не только с s- и d-) типами симметрии, в том числе в триплетном состоянии и при наличии примесей.

Финансирование. Работа частично поддержана грантом Уральского отделения Российской академии наук № 18-2-2-12 и программой финансирования АААА-А16-116021010082-8.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Гриновские функции в TCPA

Как было замечено выше, гамильтониан рассматриваемой модели в приближении ХФ $\mathcal{H}_{HF}$ (4) описывает свойства системы без учета флуктуаций сверхпроводящего ПП. Учет флуктуаций требует введения флуктуирующего потенциала $\Delta\mathcal{U}$ (4) и приводит к проблеме недиагонального беспорядка в неупорядоченных системах. Эта проблема в данном случае может быть решена в рамках двухузельного приближения когерентного потенциала (TCPA) [32–34]. Суть этого приближения в рассматриваемом случае заключается в том, что рассеивающая пара электронов с флуктуирующим потенциалом $\Delta\mathcal{U}$ (4) встраивается в эффективную среду, состоящую из электронных пар с эффективными параметрами, определяемыми собственно-энергетической частью $\hat{\Sigma}(i\omega_n)$:

$$\begin{gathered}
\hat{\Sigma}(i\omega_n) = \sum_{j,\delta} \hat{c}^\dagger_{j\delta}\Sigma_{j\delta}(i\omega_n)\hat{c}_{j\delta}, \\
\Sigma_{j\delta}(i\omega_n) = \\
= \left[\begin{array}{cc} \Sigma^\uparrow_{j,j}(i\omega_n) & \Sigma^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(i\omega_n) \\ \Sigma^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(i\omega_n) & \Sigma^{\downarrow}_{j+\delta,j+\delta}(i\omega_n) \end{array} \right], \\
\Sigma^\uparrow_{j,j}(i\omega_n) = \Sigma^\uparrow(i\omega_n)/4, \\
\Sigma^\downarrow_{j+\delta,j+\delta}(i\omega_n) = \Sigma^\downarrow(i\omega_n)/4, \\
\Sigma^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(i\omega_n) = \Sigma^{\uparrow\downarrow}(i\omega_n)\exp{(i\alpha_\delta)}, \\
\Sigma^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(i\omega_n) = \Sigma^{\uparrow\downarrow}(i\omega_n)\exp{(-i\alpha_\delta)},
\end{gathered} \tag{A.1}$$

которая имеет такую же функциональную форму, как и $\hat{\mathcal{H}}_{HF}$ (4), и сохраняет полную симметрию рассматриваемой системы. Таким образом, температурная функция Грина $G_{j\delta}(i\omega_n,\lambda)$ (10) в этом приближении описывается уравнением Дайсона с флуктуирующим потенциалом $\Delta\mathcal{U}$ (4):

$$\begin{gathered}
G_{j\delta}(i\omega_n,\lambda) = F_{j\delta}(i\omega_n) + \\
+ F_{j\delta}(i\omega_n)\left[\lambda\Delta\mathcal{U}_{j\delta} - \Sigma_{j\delta}(i\omega_n)\right]G_{j\delta}(i\omega_n,\lambda) = \\
= F_{j\delta}(i\omega_n) + F_{j\delta}(i\omega_n)T_{j\delta}(i\omega_n)F_{j\delta}(i\omega_n),
\end{gathered} \tag{A.2}$$

где $F_{j\delta}(i\omega_n)$ — фурье-образ эффективной температурной гриновской функции, $T_{j\delta}(i\omega_n)$ — фурье-образ матрицы рассеяния электронной пары с флуктуирующим потенциалом (4). Тогда собственно-энергетическая часть $\Sigma_{j\delta}(i\omega_n)$ определяется самосогласованным образом из требования отсутствия рассеяния этой электронной парой в среднем, $\langle T_{j\delta}(i\omega_n,\lambda)\rangle = 0$ или $\langle G_{j\delta}(i\omega_n,\lambda)\rangle = F_{j\delta}(i\omega_n)$.

Явные выражения для матричных элементов гриновских функций в представлении матриц Намбу могут быть получены с помощью преобразования Фурье операторов рождения (уничтожения) $\hat{c}^\dagger_{js}(\hat{c}_{js})$

$$\hat{c}^\dagger_{js}(\hat{c}_{js}) = \frac{1}{N}\sum_k \exp{[\mp ikR_j]}\hat{c}^\dagger_{ks}(\hat{c}_{ks}), \tag{A.3}$$

где N — число узлов в системе, R_j — векторы квадратной решетки, $\hat{c}^\dagger_{ks}(\hat{c}_{ks})$ — операторы рождения (уничтожения) электрона с импульсом k и спиновой проекцией s. В результате этого преобразования гамильтониан рассматриваемой системы в приближении ХФ $\hat{\mathcal{H}}_{HF}$ (4) записывается в представлении матриц Намбу

$$\hat{c}_k = \left[\begin{array}{c} \hat{c}_{k\uparrow} \\ \hat{c}^\dagger_{-k\downarrow} \end{array}\right], \quad \hat{c}^\dagger_k = \left[\begin{array}{cc} \hat{c}^\dagger_{k\uparrow} & \hat{c}_{-k\downarrow} \end{array}\right] \tag{A.4}$$

следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\hat{\mathcal{H}}_{HF}(\overline{\Delta},\alpha)=\frac{1}{N}\sum_k \hat{c}_k^\dagger \mathcal{H}_{HF}(k)\hat{c}_k,\\
\mathcal{H}_{HF}(k)=\left[\begin{array}{cc}\mathcal{H}_{HF}^{\uparrow\uparrow}(k) & \mathcal{H}_{HF}^{\uparrow\downarrow}(k)\\ \mathcal{H}_{HF}^{\downarrow\uparrow}(k) & \mathcal{H}_{HF}^{\downarrow\downarrow}(k)\end{array}\right],\\
\mathcal{H}_{HF}^{\uparrow\uparrow}(k)=\varepsilon_k-\mu,\quad \mathcal{H}_{HF}^{\downarrow\downarrow}(k)=-\varepsilon_k+\mu,\\
\mathcal{H}_{HF}^{\uparrow\downarrow}(k)=-2V\overline{\Delta}V_k(\alpha),\\
\mathcal{H}_{HF}^{\downarrow\uparrow}(k)=\left(\mathcal{H}_{HF}^{\uparrow\downarrow}(k)\right)^*,\\
\varepsilon_k=-2t\left(\cos k_x+\cos k_y\right)+4t'\cos k_x\cos k_y,\\
V_k(\alpha)=\cos\alpha\left(\cos k_x+\cos k_y\right)+\\
+i\sin\alpha\left(\cos k_x-\cos k_y\right),
\end{gathered}
\tag{A.5}
$$

где ε_k — закон дисперсии энергии электронов на квадратной решетке с перескоками на ближайшие и следующие за ними узлы, $V_k(\alpha)$ — закон дисперсии сверхпроводящего ПП с симметрией, задаваемой значением фазы α. Флуктуирующий потенциал (4) в этом представлении записывается в следующем виде:

$$
\begin{gathered}
\Delta\hat{\mathcal{U}}(\Delta,\phi,\tau)=\frac{1}{N}\sum_k \hat{c}_k^\dagger(\tau)\Delta\mathcal{U}(k)\hat{c}_k(\tau),\\
\Delta\mathcal{U}(k)=\left[\begin{array}{cc}0 & \Delta\mathcal{U}^{\uparrow\downarrow}(k)\\ \left(\Delta\mathcal{U}^{\uparrow\downarrow}(k)\right)^* & 0\end{array}\right],\\
\Delta\mathcal{U}^{\uparrow\downarrow}(k)=2V\left[\overline{\Delta}V_k(\alpha)-\Delta(\phi)V_k(\phi)\right].
\end{gathered}
\tag{A.6}
$$

Эффективная среда описывается гамильтонианом

$$
\begin{gathered}
\hat{\mathcal{H}}_{eff}(E)=\hat{\mathcal{H}}_{HF}+\hat{\Sigma}(E),\\
\hat{\Sigma}(E)=\frac{1}{N}\sum_k \hat{c}_k^\dagger \Sigma_k(E)\hat{c}_k,\\
\Sigma_k(E)=\left[\begin{array}{cc}\Sigma^{\uparrow}(E) & \Sigma_k^{\uparrow\downarrow}(E)\\ \Sigma_k^{\downarrow\uparrow}(E) & \Sigma^{\downarrow}(E)\end{array}\right],\\
\Sigma_k^{\uparrow\downarrow}(E)=2\Sigma^{\uparrow\downarrow}(E)V_k(\alpha),\\
\Sigma_k^{\downarrow\uparrow}(E)=2\Sigma^{\uparrow\downarrow}(E)V_k^*(\alpha),
\end{gathered}
\tag{A.7}
$$

где $\Sigma_k(E)$ — собственно-энергетическая часть (A.1) в представлении матриц Намбу (A.4). Для учета ПП с рассматриваемыми типами симметрии необходимо, чтобы коэффициент $\Sigma^{\uparrow\downarrow}(E)$ в недиагональных матричных элементах собственно-энергетической части (A.7) был действительной функцией энергии, в то время как диагональные элементы $\Sigma^{\uparrow}(E)$ и $\Sigma^{\downarrow}(E)$ в общем случае являются комплексными функциями. Эффективная гриновская функция (A.2) в представлении матриц Намбу (A.4) выражается через гамильтониан эффективной среды $\hat{\mathcal{H}}_{eff}(E)$ (A.7):

$$
\begin{gathered}
F_k(E)=\left[E-\mathcal{H}_{eff}(k)\right]^{-1}=\\
=\left[\begin{array}{cc}F_k^{\uparrow}(E) & F_k^{\uparrow\downarrow}(E)\\ F_k^{\downarrow\uparrow}(E) & F_k^{\downarrow}(E)\end{array}\right],\\
F_k^{\uparrow(\downarrow)}(E)=\frac{E\pm\varepsilon_k\mp\mu-\Sigma^{\downarrow(\uparrow)}(E)}{\left(E-E_k^+\right)\left(E-E_k^-\right)},\\
F_k^{\uparrow\downarrow(\downarrow\uparrow)}(E)=\frac{\Sigma_k^{\uparrow\downarrow(\downarrow\uparrow)}(E)+\mathcal{H}_{HF}^{\uparrow\downarrow(\downarrow\uparrow)}(k)}{\left(E-E_k^+\right)\left(E-E_k^-\right)},\\
E_k^{\pm}=\frac{\Sigma^{\uparrow}(E)+\Sigma^{\downarrow}(E)}{2}\pm\\
\pm\left[\left(\varepsilon_k-\mu+\frac{\Sigma^{\uparrow}(E)+\Sigma^{\downarrow}(E)}{2}\right)^2+\right.\\
\left.+\Sigma^{\uparrow}(E)\Sigma^{\downarrow}(E)+\left|\Sigma_k^{\uparrow\downarrow}(E)+\mathcal{H}_{HF}^{\uparrow\downarrow}(k)\right|^2\right]^{1/2}.
\end{gathered}
\tag{A.8}
$$

Явные выражения для матричных элементов эффективной функции Грина в представлении матриц Намбу получаются в результате преобразования Фурье (A.3):

$$
\begin{gathered}
F_{j,j}^{\uparrow\uparrow}(E)=\frac{1}{N}\sum_k F_k^{\uparrow}(E),\\
F_{j+\delta,j+\delta}^{\downarrow\downarrow}(E)=\frac{1}{N}\sum_k F_k^{\downarrow}(E),\\
F_{j,j+\delta}^{\uparrow\downarrow}(E)=\frac{1}{N}\sum_k \exp\left[ikR_\delta\right]F_k^{\uparrow\downarrow}(E)=\\
=\frac{1}{N}\sum_k \cos\left(kR_\delta\right)F_k^{\uparrow\downarrow}(E),\\
F_{j+\delta,j}^{\downarrow\uparrow}(E)=\frac{1}{N}\sum_k \exp\left[-ikR_\delta\right]F_k^{\downarrow\uparrow}(E)=\\
=\frac{1}{N}\sum_k \cos\left(kR_\delta\right)F_k^{\downarrow\uparrow}(E).
\end{gathered}
\tag{A.9}
$$

При получении этих выражений использовалось свойство $F_{-k}(E)=F_k(E)$, которое следует из инверсионной симметрии законов дисперсии электронной энергии и сверхпроводящего ПП (A.5). Недиагональные матричные элементы эффективной гриновской функции (A.8) в представлении матриц Намбу (A.4) обладают свойством $F_{k_y,k_x}^{\uparrow\downarrow(\downarrow\uparrow)}(E)=F_{k_x,k_y}^{\downarrow\uparrow(\uparrow\downarrow)}(E)$, которое связано с симметрией сверхпроводящего ПП (A.5). Это приводит к тому, что для недиагональных матричных элементов эффективной гриновской функции в представлении матриц Намбу справедливо свойство $F_{j,j\pm\delta_y}^{\uparrow\downarrow}(E)=F_{j\pm\delta_x,j}^{\downarrow\uparrow}(E)$. Явные выражения для матричных элементов гриновской функции с флуктуирующим потенциалом $G_{j,\delta}(E)$ могут быть получены из уравнения Дайсона (A.2) следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&G^{\uparrow\uparrow}_{j,j}(E) = \\
&= \frac{F^{\uparrow\uparrow}_{j,j}(E) + \Sigma^{\downarrow}(E)\det\left[F_{j\delta}(E)\right]}{\det\left[1 - F_{j\delta}(E)(\Delta\hat{\mathcal{U}}_{j\delta} - \Sigma_{j\delta}(E))\right]}, \\
&G^{\downarrow\downarrow}_{j+\delta,j+\delta}(E) = \\
&= \frac{F^{\downarrow\downarrow}_{j+\delta,j+\delta}(E) + \Sigma^{\uparrow}(E)\det\left[F_{j\delta}(E)\right]}{\det\left[1 - F_{j\delta}(E)(\Delta\hat{\mathcal{U}}_{j\delta} - \Sigma_{j\delta}(E))\right]}, \\
&G^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(E) = \\
&= \frac{F^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(E) + \Delta\Sigma^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(E)\det\left[F_{j\delta}(E)\right]}{\det\left[1 - F_{j\delta}(E)(\Delta\mathcal{U}_{j\delta} - \Sigma_{j\delta}(E))\right]}, \\
&G^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(E) = \\
&= \frac{F^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(E) + \Delta\Sigma^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(E)\det\left[F_{j\delta}(E)\right]}{\det\left[1 - F_{j\delta}(E)(\Delta\mathcal{U}_{j\delta} - \Sigma_{j\delta}(E))\right]},
\end{aligned}
\tag{A.10}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Delta\Sigma^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(E) = \Delta\mathcal{U}^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta} - \Sigma^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(E), \\
&\Delta\Sigma^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(E) = \Delta\mathcal{U}^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j} - \Sigma^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(E), \\
&\det\left[F_{j\delta}(E)\right] = F^{\uparrow\uparrow}_{j,j}(E)F^{\downarrow\downarrow}_{j+\delta,j+\delta}(E) - \\
&\qquad - F^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(E)F^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(E);
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\det\left[1 - F_{j\delta}(E)(\Delta\mathcal{U}_{j\delta} - \Sigma_{j\delta}(E))\right] = \\
&\quad = 1 + F^{\uparrow}_{j,j}(E)\Sigma^{\uparrow}_{j,j}(E) + \\
&\quad + F^{\downarrow}_{j+\delta,j+\delta}(E)\Sigma^{\downarrow}_{j+\delta,j+\delta}(E) - \\
&\quad - F^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(E)\Delta\Sigma^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(E) - \\
&\quad - F^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(E)\Delta\Sigma^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(E) + \\
&\quad + \det\left[F_{j\delta}(E)\right]\det\left[\Delta\mathcal{U}_{j\delta} - \Sigma_{j\delta}(E)\right], \\
&\det\left[\Delta\mathcal{U}_{j\delta} - \Sigma_{j\delta}(E)\right] = \\
&\quad = \Sigma^{\uparrow}_{j,j}(E)\Sigma^{\downarrow}_{j+\delta,j+\delta}(E) - \\
&\quad - \Delta\Sigma^{\uparrow\downarrow}_{j,j+\delta}(E)\Delta\Sigma^{\downarrow\uparrow}_{j+\delta,j}(E).
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

Легко убедиться, что $\Delta\mathcal{U}^{\uparrow\downarrow}_{j,j\pm\delta_y} = \Delta\mathcal{U}^{\downarrow\uparrow}_{j\pm\delta_x,j}$ и $\Sigma^{\uparrow\downarrow}_{j,j\pm\delta_y}(E) = \Sigma^{\downarrow\uparrow}_{j\pm\delta_x,j}(E)$. Как отмечалось выше, недиагональные матричные элементы эффективной гриновской функции обладают таким же свойством. Поэтому из (A.10) видно, что и недиагональные матричные элементы гриновской функции с флуктуирующим потенциалом обладают этим же свойством, а детерминанты матриц (A.12) не зависят ни от индексов j, ни от их ближайших соседей δ.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Timusk and B. Statt, Rep. Progr. Phys. **62**, 61 (1999).
2. V. M. Loktev, R. M. Quick, and S. G. Sharapov, Phys. Rep. **349**, 1 (2001).
3. М. В. Садовский, УФН **171**, 539 (2001).
4. V. J. Emery and S. A. Kivelson, Nature **374**, 434 (1995).
5. P. Curty and H. Beck, Phys. Rev. Lett. **85**, 796 (2000).
6. D. Bormannt and H. Beck, J. Stat. Phys. **76**, 361 (1994).
7. P. Curty and H. Beck, Phys. Rev. Lett. **91**, 257002 (2003).
8. I. I. Mazin, D. J. Singh, M. D. Johannes, and M. H. Du, Phys. Rev. Lett. **101**, 057003 (2008).
9. F. Wang, H. Zhai, Y. Ran, A. Vishwanath, and D. H. Lee, Phys. Rev. Lett. **102**, 047005 (2009).
10. D. A. Wollman, D. J. Van Harlingen, W. C. Lee, D. M. Ginsberg, and A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **71**, 2134 (1993).
11. C. C. Tsuei and J. R. Irtley, Rev. Mod. Phys. **72**, 969 (2000).
12. D. J. Scalapino, E. Loh, and J. E. Hirsch, Phys. Rev. B **34**, 8190(R) (1986).
13. J. R. Schrieffer, X. G. Wen, and S. C. Zhang, Phys. Rev. B **39**, 11663 (1989).
14. Ю. А. Изюмов, УФН **169**, 225 (1999).
15. D. J. Scalapino, Rev. Mod. Phys. **84**, 1383 (2012).
16. A. M. Hybertsen, E. Stechel, W. Foulkes, and M. Schlüter, Phys. Rev. B **45**, 10032 (1992).
17. N. D. Mermin and H. Wagner, Phys. Rev. Lett. **17**, 1136 (1966); P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **158**, 383 (1967); S. Coleman, Commun. Math. Phys. **31**, 264 (1973).
18. G. Su, A. Schadschneider, and J. Zittartz, Phys. Lett. A **230**, 99 (1997).
19. G. Su and M. Suzuki, Phys. Rev. B **58**, 117 (1998).
20. V. L. Berezinskii, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **59**, 907 (1970); J. Kosterlitz and D. Thouless, J. Phys. C **6**, 1181 (1973).
21. V. J. Emery and S. A. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **74**, 3253 (1995).
22. D. Ariosa, H. Beck, and M. Capezzali, J. Phys. Chem. Sol. **59**, 1783 (1998).
23. Yu. A. Izyumov and Yu. N. Skryabin, *Statistical Mechanics of Magnetically Ordered Systems*, Springer-Verlag, New York (1988).
24. B. L. Gyorffy, J. B. Staunton, and G. M. Stocks, Phys. Rev. B **44**, 5190 (1990).

25. Y. Dubi, Y. Meir, and Y. Avishai, Nature **449**, 876 (2007).

26. M. Mayr, G. Alvarez, C. Sen, and E. Dagotto, Phys. Rev. Lett. **94**, 217001 (2005).

27. В. П. Гусынин, В. М. Локтев, С. Г. Шарапов, ЖЭТФ **65**, 170 (1997).

28. D. Gerald and Mahan, *Many-Particle Physics*, Kluwer Acad. (2000).

29. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).

30. M. A. Timirgazin, V. F. Gilmutdinov, and A. K. Arzhnikov, Physica C **557**, 7 (2019).

31. K. K. Gomes, A. N. Pasupathy, A. Pushp, S. Ono, Y. Ando, and A. Yazdani, Nature **447**, 569 (2007).

32. E. Ni. Foo, H. Amar, and M. Ausloos, Phys. Rev. B **4**, 3350 (1971).

33. H. Shiba, Progr. Theor. Phys. Rev. B **46**, 77 (1971).

34. F. Brouers and J. Van Der Rest, J. Phys. F: Met. Phys. **26**, 1070 (1972).