ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 2, стр. 327–341

ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ БОЗЕ-ВОЗБУЖДЕНИЙ В ПЛАЗМЕ С НЕАБЕЛЕВЫМ ТИПОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Ю. А. Марков [a,d*], *М. А. Маркова* [a**], *Н. Ю. Марков* [b], *Д. М. Гитман* [c,d,e***]

[a] *Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук 664033, Иркутск, Россия*

[b] *Иркутский государственный университет 664003, Иркутск, Россия*

[c] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 119991, Москва, Россия*

[d] *Томский государственный университет 634050, Томск, Россия*

[e] *Институт физики университета Сан-Паулу 05508-090, Сан-Паулу, Бразилия*

Поступила в редакцию 17 июня 2019 г.,
после переработки 19 августа 2019 г.
Принята к публикации 28 августа 2019 г.

Построена гамильтонова теория для коллективных продольно-поляризованных бесцветных возбуждений (плазмонов) в высокотемпературной глюонной плазме. Применяется общий формализм построения теории волн в нелинейных средах с дисперсией, развитый В. Е. Захаровым. В рамках данного подхода получено в явном виде специальное каноническое преобразование, позволяющее упростить гамильтониан взаимодействия мягких глюонных возбуждений и тем самым определить новый эффективный гамильтониан. Развитый подход использован для построения кинетического уравнения больцмановского типа, которое описывает процесс упругого рассеяния коллективных продольно-поляризованных возбуждений в глюонной плазме и эффект так называемого нелинейного затухания Ландау. Проведено детальное сравнение эффективной амплитуды плазмон-плазмонного взаимодействия, найденной в рамках классической гамильтоновой теории, и соответствующего матричного элемента, вычисленного в рамках высокотемпературной квантовой хромодинамики, что позволило определить границы справедливости чисто классического подхода, представленного в работе.

DOI: 10.31857/S004445102002011X

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории обычной электрон-ионной плазмы было показано, что слабая турбулентность плазмы может быть двух типов (см., например, [1]). Слабая турбулентность первого типа обусловлена процессами рассеяния волн на частицах плазмы. Слабая турбулентность второго типа обусловлена процессами распада, слияния и рассеяния волн друг на друге, происходящими без обмена энергией между частицами и волнами. В ряде работ [2–7] были построены и детально исследованы кинетические уравнения для наиболее простых коллективных возбуждений (ленгмюровских плазмонов) электрон-ионной плазмы, описывающие процессы упругого рассеяния плазмонов друг на друге.

В настоящее время проявляется определенный интерес к построению кинетического описания нового фундаментального состояния материи: кварк-глюонной плазмы — плазмы, состоящей из асимптотически свободных кварков, антикварков и глюонов (см., например, обзор [8]), которая, возможно, образуется при столкновении ультра-

* E-mail: markov@icc.ru
** E-mail: markova@icc.ru
*** E-mail: dmitrygitman@hotmail.com

релятивистских тяжелых ядер. Показано, что в пределе больших температур кварк-глюонная плазма хорошо описывается эффективной пертурбативной теорией [9], переформулированной на языке кинетических уравнений [10]. Глюонная плазма (для простоты в данной работе будем пренебрегать существованием кварков и антикварков) может быть представлена в виде двух подсистем: подсистемы жестких термальных глюонов и подсистемы мягких плазменных возбуждений, которые обмениваются энергией между собой. В высокотемпературной глюонной плазме, так же как и в обычной электрон-ионной, существует два типа коллективных плазменных возбуждений: поперечно-поляризованные и продольно-поляризованные (плазмоны). В отсутствие внешних хромомагнитного или хромоэлектрического полей цветовая матрица плотности числа коллективных глюонных возбуждений является диагональной, и поэтому данные возбуждения следует трактовать как бесцветные.

В работе [11] развито кинетическое описание процессов нелинейного взаимодействия бесцветных и цветных плазмонов в рамках приближения жестких температурных петель [9, 10]. Основой этого подхода является вычисление некоторых эффективных токов, порождающих эти процессы. С помощью данных токов далее определяются матричные элементы процессов нелинейного взаимодействия произвольного (четного) числа бесцветных плазмонов. В данной работе представлен альтернативный путь кинетического описания нелинейной динамики плазмонов, основанный на классическом гамильтоновом формализме для систем с распределенными параметрами, систематически развитый в работах Захарова [5–7], Гитмана и Тютина [12]. Основой этого подхода в нашем случае является то, что уравнения, описывающие бесстолкновительную высокотемпературную плазму в приближении жестких температурных петель, обладают гамильтоновой структурой, которая была найдена в работах [13–15]. Последнее обстоятельство позволяет нам развить (по крайней мере, для слабо-возбужденных состояний, см. Заключение) независимый подход к выводу кинетического уравнения для мягких продольно-поляризованных глюонных плазменных возбуждений. В рамках гамильтонова подхода матричные элементы плазмон-плазмонного взаимодействия получаются в результате специальных канонических преобразований, упрощающих гамильтониан взаимодействия плазмонов.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 приведен вывод оператора эффективного гамильтониана четвертого порядка $\widehat{\widetilde{H}}_4$, описывающего процесс упругого рассеяния двух бесцветных плазмонов друг на друге. В разд. 3 введена в рассмотрение функция распределения плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$ и дан анализ корреляционных функций четвертого и шестого порядков по операторам рождения и уничтожения плазмонов $\hat{c}^{\dagger\, b}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}^{\, a}_{\mathbf{k}}$. Раздел 4 посвящен выводу кинетического уравнения для мягких глюонных возбуждений больцмановского типа с учетом эффекта нелинейного затухания Ландау плазмонов. Разделы 5 и 6 связаны с определением явного вида трехплазмонных и четырехплазмонной вершинных функций в рамках приближения жестких температурных петель и аппроксимации эффективного глюонного пропагатора в плазмонном полюсе. В заключительном разд. 7 намечены возможные пути обобщения гамильтонова описания на случай сильновозбужденной глюонной плазмы.

В Приложении приведены все основные выражения для эффективных глюонных вершинных функций и глюонного пропагатора в высокотемпературном приближении жестких температурных петель.

2. ГАМИЛЬТОНИАН ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БЕСЦВЕТНЫХ ПЛАЗМОНОВ

Рассмотрим далее приложение общей теории В. Е. Захарова к конкретной системе — высокотемпературной глюонной плазме в квазиклассическом приближении. Потенциалы калибровочного поля, которые описывают глюонное поле в системе, являются $N_c \times N_c$-матрицами в цветовом пространстве и определены посредством $A_\mu(x) = A^a_\mu(x)\, t^a$ с $N_c^2 - 1$ эрмитовыми генераторами t^a цветовой группы $\mathrm{SU}(N_c)$ в фундаментальном представлении[1]. Тензор напряженности $F_{\mu\nu}(x) = F^a_{\mu\nu}(x)\, t^a$, где

$$F^a_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu,$$

подчиняется уравнению Янга – Миллса в A_0-калибровке:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) - ig[A_\mu(x), F^{\mu\nu}(x)] - \xi_0^{-1} n_\mu n^\nu A_\nu(x) = \\ = -j^\nu(x),$$

[1] Цветовой индекс a пробегает значения $1, 2, \ldots, N_c^2 - 1$, в то время как векторный индекс μ пробегает значения $0, 1, 2, 3$. Всюду в тексте статьи по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование и используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

где ξ_0 — калибровочный параметр в данной калибровке. 4-вектор n_μ будем далее отождествлять с глобальной 4-скоростью u_μ плазмы. Цветной ток j^ν определяется обычным образом:

$$j^\nu(x) = gt^a \int d^4p\, p^\nu \mathrm{Tr}\,(T^a f_g(x,p)).$$

Здесь $x = (t, \mathbf{x})$ — пространственно-временная переменная исходной динамической системы, $(T^a)^{bc} \equiv -if^{abc}$ — цветовая матрица в присоединенном представлении. Функция распределения глюонов $f_g = f_g(x,p)$ является $(N_c^2-1)\times(N_c^2-1)$-эрмитовой матрицей в цветовом пространстве.

Как известно, в равновесной горячей кварк-глюонной плазме существуют два типа физических бозонных мягких полей: поперечно-поляризованное и продольно-поляризованное [8]. Для простоты ограничим свое рассмотрение только процессами с участием продольно-поляризованных плазменных возбуждений, которые носят название плазмонов. Эти возбуждения являются истинно коллективным эффектом среды, не имеющим аналогов в обычной квантовой теории поля. Рассмотрим продольную часть потенциала калибровочного поля в виде разложения

$$\hat{A}^a_\mu(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(\frac{Z^l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \times \\ \times \left\{\epsilon^l_\mu\, \hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon^{*l}_\mu\, \hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right\}, \quad k_0 = \omega^l_{\mathbf{k}}, \tag{2.1}$$

где $\epsilon^l_\mu = \epsilon^l_\mu(\mathbf{k})$ — вектор поляризации продольного плазмона, явный вид которого зависит от выбора калибровки (в частности, при A_0-калибровке данный вектор определяется выражением (5.6)). Множитель $Z^l(\mathbf{k})$ есть вычет эффективного глюонного пропагатора в плазмонном полюсе. Коэффициенты $\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{a}^{\dagger\,a}_{\mathbf{k}}$ будем рассматривать как квазичастичные операторы уничтожения и рождения плазмонов, подчиняющиеся коммутационным соотношениям бозе-операторов

$$\left[\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}},\, \hat{a}^{\,b}_{\mathbf{k}'}\right] = \left[\hat{a}^{\dagger\,a}_{\mathbf{k}},\, \hat{a}^{\dagger\,b}_{\mathbf{k}'}\right] = 0, \\ \left[\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}},\, \hat{a}^{\dagger\,b}_{\mathbf{k}'}\right] = \delta^{\,ab}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'). \tag{2.2}$$

Многоплазмонные состояния получаются многократным действием оператора $\hat{a}^{\dagger\,a}_{\mathbf{k}}$ на вакуумное состояние $|0\rangle$, которое подчиняется следующему условию:

$$\hat{a}^a_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0.$$

Таким образом, под вакуумом понимается основное, невозбужденное состояние системы, т. е. состояние, не имеющее элементарных коллективных возбуждений. У операторов $\hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}$ отличны от нуля лишь матричные элементы, соответствующие изменению на единицу числа плазмонов.

Запишем квантовомеханический аналог уравнения Гамильтона, а именно, уравнение Гейзенберга для оператора $\hat{a}^a_{\mathbf{k}}$:

$$\frac{\partial \hat{a}^a_{\mathbf{k}}}{\partial t} = i\left[\widehat{H}, \hat{a}^a_{\mathbf{k}}\right]. \tag{2.3}$$

Здесь $\widehat{H}$ — гамильтониан системы плазмонов, равный сумме $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_{int}$, где

$$\widehat{H}_0 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \omega^l_{\mathbf{k}}\, \hat{a}^{\dagger\,a}_{\mathbf{k}}\, \hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}} \tag{2.4}$$

— гамильтониан невзаимодействующих плазмонов, $\widehat{H}_{int}$ — гамильтониан взаимодействия. Дисперсионное соотношение для плазмонов $\omega^l_{\mathbf{k}}$ удовлетворяет следующему дисперсионному уравнению [16]:

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon^l(\omega, \mathbf{k}) = 0, \tag{2.5}$$

где

$$\varepsilon^l(\omega,\mathbf{k}) = 1 + \frac{3\omega^2_{pl}}{\mathbf{k}^{\,2}}\left[1 - F\left(\frac{\omega}{|\mathbf{k}|^2}\right)\right],$$

$$F(x) = \frac{x}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| - i\pi\theta(1-|x|)\right]$$

— продольная диэлектрическая проницаемость и $\omega^2_{pl} = g^2N_cT^2/9$, T — температура системы, g — постоянная сильного взаимодействия. В приближении малых амплитуд гамильтониан взаимодействия можно представить в виде формального интегростепенного ряда по $\hat{a}^a_{\mathbf{k}}$ и $\hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}$:

$$\widehat{H}_{int} = \widehat{H}_3 + \widehat{H}_4 + \ldots,$$

где гамильтонианы взаимодействия третьего и четвертого порядков имеют следующую структуру:

$$\widehat{H}_3 = \int \frac{d\mathbf{k}\; d\mathbf{k}_1\; d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9}\left\{V^{\,a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}\, \hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\, \hat{a}^{\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{a}^{\,a_2}_{\mathbf{k}_2} + \right. \\ \left. + V^{*a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}\, \hat{a}^{\dagger a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{a}^{\dagger a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{a}^{\,a}_{\mathbf{k}}\right\}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2) + \\ + \frac{1}{3}\int \frac{d\mathbf{k}\; d\mathbf{k}_1\; d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^9}\left\{U^{\,a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}\, \hat{a}^{a}_{\mathbf{k}}\, \hat{a}^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{a}^{a_2}_{\mathbf{k}_2} + \right. \\ \left. + U^{*a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}\, \hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\, \hat{a}^{\dagger a_1}_{\mathbf{k}_1}\hat{a}^{\dagger\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\right\}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2), \tag{2.6}$$

$$\widehat{H}_4 = \frac{1}{2}\int \frac{d\mathbf{k}\; d\mathbf{k}_1\; d\mathbf{k}_2\; d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^{12}}\, T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\, \hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\, \hat{a}^{\dagger\,a_1}_{\mathbf{k}_1} \times \\ \times \hat{a}^{\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{a}^{\,a_3}_{\mathbf{k}_3}\,(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3) \tag{2.7}$$

и т. д. Под символом «*» понимается комплексное сопряжение. В выражении (2.7) мы оставили лишь «существенный» по терминологии В. Е. Захарова вклад, в силу того что резонансные условия

$$\begin{cases} \mathbf{k}+\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3=0, \\ \omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}+\omega^l_{\mathbf{k}_3}=0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3, \\ \omega^l_{\mathbf{k}}=\omega^l_{\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}+\omega^l_{\mathbf{k}_3} \end{cases}$$

не имеют решений для спектра плазмонов, определяемого дисперсионным уравнением (2.5).

Отметим, что подобного рода представление гамильтониана взаимодействия в виде формальных бесконечных рядов по степеням операторов рождения и уничтожения рассматривались в книге Шварца [17] в рамках квантовой теории поля для скалярных полей.

Коэффициенты $V^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$, $U^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ и $T^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}$ обладают определенной симметрией

$$\begin{gathered} V^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}=V^{\,a\;a_2\;a_1}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1}\;, \\ U^{\,a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}=U^{\,a\;a_2\;a_1}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1}=U^{\,a_1\;a_2\;a}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}}\;, \end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} T^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}=T^{\,a_1\;a\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}=T^{\,a\;a_1\;a_3\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2}= \\ =T^{*a_2\;a_3\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Эти коэффициентные функции определяют конкретные свойства среды, в данном случае высокотемпературной глюонной плазмы.

Рассмотрим преобразование от операторов $\hat{a}^a_{\mathbf{k}}$ к новым операторам $\hat{c}^a_{\mathbf{k}}$:

$$\begin{aligned} \hat{a}^a_{\mathbf{k}} = \hat{c}^a_{\mathbf{k}} + \int\frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2}{(2\pi)^6}\Big[V^{(1)\;a\;a_1\;a_2}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}\;\hat{c}^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\;\hat{c}^{a_2}_{\mathbf{k}_2} + \\ + V^{(2)\;a\;a_1\;a_2}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}\;\hat{c}^{\dagger\,a_2}_{\mathbf{k}_2}\;\hat{c}^{a_1}_{\mathbf{k}_1} + V^{(3)\;a\;a_1\;a_2}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}\;\hat{c}^{\dagger a_1}_{\mathbf{k}_1}\;\hat{c}^{\dagger a_2}_{\mathbf{k}_2}\Big] + \\ + \int\frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\Big[W^{(1)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;\hat{c}^{a_1}_{\mathbf{k}_1}\;\hat{c}^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\;\hat{c}^{a_3}_{\mathbf{k}_3} + \ldots \\ \ldots + W^{(4)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\;\hat{c}^{\dagger\,a_1}_{\mathbf{k}_1}\;\hat{c}^{\dagger a_2}_{\mathbf{k}_2}\;\hat{c}^{\dagger a_3}_{\mathbf{k}_3}\Big] + \ldots \end{aligned} \tag{2.10}$$

Условия каноничности данного преобразования[2)]

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\;a}}{\delta\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\;c}}\,\frac{\delta\hat{a}_{\mathbf{k}''}^{\;b}}{\delta\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger\;c}} - \frac{\delta\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\;a}}{\delta\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger\;c}}\,\frac{\delta\hat{a}_{\mathbf{k}''}^{\;b}}{\delta\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\;c}}\right\}=0,$$

$$\int d\mathbf{k}'\left\{\frac{\delta\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\;a}}{\delta\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\;c}}\,\frac{\delta\hat{a}_{\mathbf{k}''}^{\dagger\;b}}{\delta\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger\;c}} - \frac{\delta\hat{a}_{\mathbf{k}}^{\;a}}{\delta\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\dagger\;c}}\,\frac{\delta\hat{a}_{\mathbf{k}''}^{\dagger\;b}}{\delta\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{\;c}}\right\}=\delta^{ab}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')$$

налагают определенные ограничения на коэффициентные функции ряда (2.10). Функции $V^{(1)\;a\;a_1\;a_2}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$, $V^{(2)\;a\;a_1\;a_2}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ и $V^{(3)\;a\;a_1\;a_2}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}$ должны удовлетворять условиям

$$V^{(2)\;a\;a_1\;a_2}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2} = -2V^{*(1)\;a_1\;a\;a_2}_{\;\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2}\;,$$

$$V^{(3)\;a\;a_1\;a_2}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2} = V^{(3)\;a\;a_2\;a_1}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1} = V^{(3)\;a_1\;a_2\;a}_{\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}}\;,$$

а функции $W^{(i)}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}$, $i=1,\ldots,4$ — условиям

$$\begin{aligned} 3W^{(1)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} + 4\int\Big\{V^{*(1)\;a_2\;a\;a'}_{\;\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}'}\;V^{*(3)\;a_1\;a_3\;a'}_{\;\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}'} - \\ - V^{(1)\;a\;a_2\;a'}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}V^{(1)\;a'\;a_1\;a_3}_{\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3}\Big\}\,d\mathbf{k} = -W^{*(3)\;a_1\;a\;a_2\;a_3}_{\;\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^{(2)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} + 2\int\Big\{V^{(1)\;a\;a_1\;a'}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'}\;V^{*(1)\;a_3\;a_1\;a'}_{\;\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'} + \\ + V^{*(1)\;a'\;a\;a_1}_{\;\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}\;V^{(1)\;a'\;a_3\;a_2}_{\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2} - V^{*(1)\;a_1\;a\;a'}_{\;\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}'}\;V^{(1)\;a'\;a_3\;a_2}_{\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2} - \\ - V^{(3)\;a\;a_1\;a'}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'}\;V^{*(3)\;a_3\;a_2\;a'}_{\;\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}\Big\}\,d\mathbf{k}' = -W^{*(2)\;a_3\;a_1\;a_2\;a}_{\;\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^{(3)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} + 2\int\Big\{V^{(1)\;a_3\;a_1\;a'}_{\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'}\;V^{(3)\;a\;a_2\;a'}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'} + \\ + V^{*(1)\;a_1\;a\;a'}_{\;\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}'}\;V^{*(1)\;a'\;a_3\;a_2}_{\;\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2} - \\ - V^{*(1)\;a_1\;a_3\;a'}_{\;\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}'}\;V^{*(1)\;a'\;a\;a_2}_{\;\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2} - \\ - V^{(1)\;a\;a_1\;a'}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'}\;V^{(3)\;a_3\;a_2\;a'}_{\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}\Big\}\,d\mathbf{k}' = \\ = W^{(3)\;a_3\;a_1\;a_2\;a}_{\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3W^{(4)\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3} + 4\int\Big\{V^{*(1)\;a'\;a\;a_2}_{\;\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2}\;V^{(3)\;a_3\;a_1\;a'}_{\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}'} - \\ - V^{*(1)\;a'\;a_3\;a_1}_{\;\;\mathbf{k}',\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1}\;V^{(3)\;a\;a_2\;a'}_{\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}'}\Big\}\,d\mathbf{k}' = 3W^{(4)\;a_3\;a_1\;a_2\;a}_{\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}}. \end{aligned}$$

[2)] Вариационные производные по операторам $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\;a}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger\;a}$ следует понимать как пределы соответствующих функциональных производных по аддитивным классическим добавкам $\varphi^a_{\mathbf{k}}$ и $\varphi^{*\;a}_{\mathbf{k}}$ к квантовым $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\;a}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger\;a}$ [18]:

$$\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\;a}\to\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\;a}+\varphi_{\mathbf{k}}^{\;a},\quad \hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger\;a}\to\hat{c}_{\mathbf{k}}^{\dagger\;a}+\varphi_{\mathbf{k}}^{*\;a}.$$

В силу специфики дисперсионного уравнения (2.5) в горячей глюонной плазме резонансные условия

$$\begin{cases} \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \\ \omega^l_{\mathbf{k}} = \omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = 0, \\ \omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2} = 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

не имеют решений, т. е. спектр продольных плазмонов является нераспадным. Тогда каноническое преобразование (2.10) позволяет исключить «несущественный» гамильтониан $\widehat{H}_3$ (2.6), просто полагая

$$V^{(1)\, a\, a_1\, a_2}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2} = -\frac{V^{\, a\, a_1\, a_2}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2}}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2),$$

$$V^{(3)\, a\, a_1\, a_2}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2} = -\frac{U^{*\, a\, a_1\, a_2}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2}}{\omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_2}}\, (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

Данная процедура исключения приводит нас к следующей структуре эффективного гамильтониана четвертого порядка $\widetilde{\widetilde{H}}_4$:

$$\widetilde{\widetilde{H}}_4 = \frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^{12}}\, \widetilde{T}^{\, a\, a_1\, a_2\, a_3}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_3}\, \hat{c}^{\dagger\, a}_{\mathbf{k}} \times \\ \times \hat{c}^{\dagger\, a_1}_{\mathbf{k}_1}\, \hat{c}^{a_2}_{\mathbf{k}_2}\, \hat{c}^{a_3}_{\mathbf{k}_3} (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\ , \tag{2.12}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{T}^{\, a\, a_1\, a_2\, a_3}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_3} &= T^{\, a\, a_1\, a_2\, a_3}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_3} - \\ &- 2\, \frac{U^{\, b\, a_2\, a_3}_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_3}\, U^{*\, b\, a\, a_1}_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\, \mathbf{k},\, \mathbf{k}_1}}{\omega^l_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)} + \omega^l_{\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}_1}} - \\ &- 2\, \frac{V^{\, b\, a_2\, a_3}_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_3}\, V^{*\, b\, a\, a_1}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\, \mathbf{k},\, \mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_1}} - \\ &- 2\, \frac{V^{\, a_1\, a_2\, b}_{\mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\, V^{*\, a_3\, a\, b}_{\mathbf{k}_3,\, \mathbf{k},\, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_3}} - \\ &- 2 \frac{V^{\, a\, a_2\, b}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}-\mathbf{k}_2}\, V^{*\, a_3\, a_1\, b}_{\mathbf{k}_3,\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_3}} - \\ &- 2 \frac{V^{\, a\, a_3\, b}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_3,\, \mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\, V^{*\, a_2\, a_1\, b}_{\mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1} + \omega^l_{\mathbf{k}_1} - \omega^l_{\mathbf{k}_2}} - \\ &- 2 \frac{V^{\, a_1\, a_3\, b}_{\mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_3,\, \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3}\, V^{*\, a_2\, a\, b}_{\mathbf{k}_2,\, \mathbf{k},\, \mathbf{k}_2-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}} + \omega^l_{\mathbf{k}} - \omega^l_{\mathbf{k}_2}}\ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Найденная эффективная амплитуда имеет простую диаграммную интерпретацию, которая представлена на рис. 1. Черный квадрат обозначает эффективную амплитуду $\widetilde{T}^{\, a\, a_1\, a_2\, a_3}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_3}$. Первый член справа на рис. 1 определяет прямое взаимодействие четырех плазмонов, порождаемое обычной четырехплазмонной амплитудой $T^{\, a\, a_1\, a_2\, a_3}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_3}$. Остальные члены связаны с взаимодействием трех плазмонов, порождаемым амплитудами $U^{a\ a_1\ a_1}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_3}$ и $V^{a\ a_1\ a_1}_{\mathbf{k},\, \mathbf{k}_2,\, \mathbf{k}_3}$ с промежуточными «виртуальными» колебаниями. Условие малости амплитуд в нашем случае означает

$$|\widetilde{T}^{(4)}||c|^{\,2} \ll \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \omega^l_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}}. \tag{2.14}$$

Таким образом, существуют два эквивалентных описания гамильтоновой системы бесцветных плазмонов для одних и тех же физических процессов. В первом мы можем использовать исходный оператор Гамильтона

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_3 + \widehat{H}_4 + \ldots, \tag{2.15}$$

где $\widehat{H}_0, \widehat{H}_3$ и $\widehat{H}_4$ задаются выражениями (2.4), (2.6) и (2.7) соответственно, а во втором — оператор Гамильтона $\widetilde{\widetilde{H}}$, полученный в результате нелинейного преобразования бозонных операторов рождения и уничтожения, $\hat{a}^{\dagger\ a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}}{}^{a}$:

$$\widetilde{\widetilde{H}} = \widetilde{\widetilde{H}}_0 + \widetilde{\widetilde{H}}_4 + \ldots, \tag{2.16}$$

где, в свою очередь,

$$\widetilde{\widetilde{H}}_0 = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ \omega^l_{\mathbf{k}} \hat{c}^{\dagger\ a}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}{}^{a},$$

а оператор $\widetilde{\widetilde{H}}_4$ определен выражением (2.12). Уравнения Гейзенберга для операторов $\hat{a}^a_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}^a_{\mathbf{k}}$ имеют полностью идентичную форму (2.3) с соответствующими операторами Гамильтона (2.15) и (2.16).

В связи с данным построением необходимо упомянуть близкую к теме нашего исследования работу Манько и др. [19], в которой было введено новое важное понятие нелинейных f-осцилляторов. Авторы рассматривали задачу о квантовании гармонического осциллятора, где бозонные операторы рождения и уничтожения преобразовывались нелинейным образом в новые операторы рождения и уничтожения, определяющие квантовые f-осцилляторы. Тем самым был получен новый оператор Гамильтона с весьма нетривиальной структурой, описывающий ту же самую динамику, что и исходный, как это имеет место и в нашем случае.

Однако несмотря на близкое сходство подходов, представленных в нашей работе и в статье [19], следует отметить их принципиальное различие. В представленном в данном разделе подходе операторы рождения и уничтожения $(\hat{a}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}{}^{a})$ и $(\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}}{}^{a})$ и соответствующие гамильтонианы (2.15) и (2.16) связаны между собой каноническим преобразованием с сохранением стандартного вида коммутационных соотношений (2.2). В подходе работы [19] нелинейные преобразования являются неканоническими,

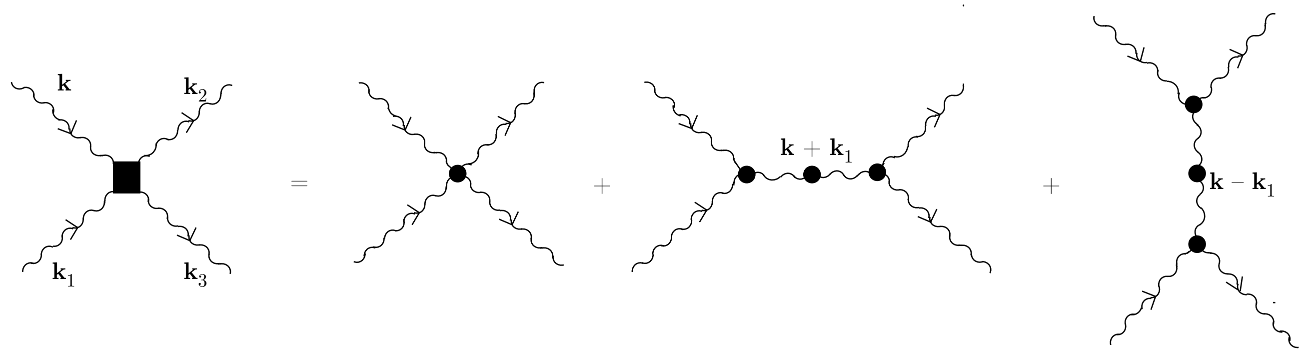

Рис. 1. Матричный элемент для четырехплазмонного распада. Волновые линии обозначают плазмоны

и поэтому для сохранения идентичности описываемой динамики авторы соответствующим образом модифицировали коммутационные соотношения типа (2.2). По этой причине в нашем случае нелинейные колебания, связанные с бозонными операторами, невозможно просто интерпретировать как колебания со специфической зависимостью частоты колебаний от энергии, как это имеет место для нелинейных f-осцилляторов, хотя отчасти данный факт может иметь место.

3. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Гамильтониан (2.12) описывает процесс упругого рассеяния цветных плазмонов друг на друге, т. е. процесс $2 \to 2$. Уравнения движения для $\hat c_{\mathbf k}^{\ a}$ и $\hat c^{\dagger b}_{\mathbf k}$ здесь определяются соответствующими уравнениями Гейзенберга:

$$\frac{\partial \hat c^a_{\mathbf k}}{\partial t} = i\Big[\widetilde{\widehat H}_0 + \widetilde{\widehat H}_4,\, \hat c^a_{\mathbf k}\Big] = -i\omega^l_{\mathbf k}\hat c^a_{\mathbf k} - i\int \frac{d\mathbf k_1\ d\mathbf k_2\ d\mathbf k_3}{(2\pi)^9}\, \widetilde T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf k,\ \mathbf k_1,\ \mathbf k_2,\ \mathbf k_3}\ \hat c^{\dagger\ a_1}_{\mathbf k_1}\,\hat c^{\ a_2}_{\mathbf k_2}\hat c^{\ a_3}_{\mathbf k_3} \times (2\pi)^3\delta(\mathbf k+\mathbf k_1-\mathbf k_2-\mathbf k_3), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \hat c^{\dagger a}_{\mathbf k}}{\partial t} = i\Big[\widetilde{\widehat H}_0 + \widetilde{\widehat H}_4,\, \hat c^{\dagger a}_{\mathbf k}\Big] = i\omega^l_{\mathbf k}\ \hat c^{\dagger a}_{\mathbf k} + i\int \frac{d\mathbf k_1\ d\mathbf k_2\ d\mathbf k_3}{(2\pi)^9}\, \widetilde T^{*\ a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf k,\ \mathbf k_1,\ \mathbf k_2,\ \mathbf k_3}\ \hat c^{\ a_1}_{\mathbf k_1}\,\hat c^{\dagger\ a_2}_{\mathbf k_2}\hat c^{\dagger\ a_3}_{\mathbf k_3} \times (2\pi)^3\delta(\mathbf k+\mathbf k_1-\mathbf k_2-\mathbf k_3). \quad (3.2)$$

Данные точные уравнения, в отсутствие внешнего цветного поля в системе, позволят определить кинетическое уравнение для плотности числа бесцветных плазмонов $N^{abl}_{\mathbf k} \equiv \delta^{ab} N^l_{\mathbf k}$.

Если совокупность волн при малом уровне нелинейности (2.14) имеет случайные фазы, то эту совокупность можно описывать статистически, вводя корреляционную функцию:

$$\langle\, \hat c^{\dagger a}_{\mathbf k}\hat c_{\mathbf k'}^{\ b}\rangle = \delta^{ab}(2\pi)^3\,\delta(\mathbf k - \mathbf k')N^l_{\mathbf k}. \qquad (3.3)$$

Подчеркнем, что введение функции распределения $N^l_{\mathbf k} \equiv N^l(\mathbf k, \mathbf x, t)$ квазичастиц (плазмонов), зависящей как от импульса $\hbar\mathbf k$ плазмона, так и от координат $\mathbf x$ и времени t, имеет смысл только в том случае, когда число плазмонов медленно меняется в пространстве и времени. Это значит, что изменение функции на расстояниях порядка длины волны $\lambda = 2\pi/k$ и в течение промежутков времени порядка длины волны $T = 2\pi/\omega^l_{\mathbf k}$ должно быть значительно меньше самой функции $N^l_{\mathbf k}$.

Исходя из уравнений Гейзенберга (3.1) и (3.2), определим кинетическое уравнение для плотности числа плазмонов $N^l_{\mathbf k}$. Для этой цели умножим уравнения (3.1) и (3.2) соответственно на $\hat c^{\dagger b}_{\mathbf k'}$ и $\hat c_{\mathbf k}^{\ a}$:

$$\frac{\partial \hat c^a_{\mathbf k}}{\partial t}\ \hat c^{\dagger b}_{\mathbf k'} = -i\omega^l_{\mathbf k}\hat c_{\mathbf k}^{\ a}\hat c^{\dagger b}_{\mathbf k'} - i\int \frac{d\mathbf k_1\ d\mathbf k_2\ d\mathbf k_3}{(2\pi)^9} \times \widetilde T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf k,\ \mathbf k_1,\ \mathbf k_2,\ \mathbf k_3}\ \hat c^{\dagger b}_{\mathbf k'}\ \hat c^{\dagger a_1}_{\mathbf k_1}\hat c_{\mathbf k_2}^{\ a_2}\hat c_{\mathbf k_3}^{\ a_3}\ (2\pi)^3\delta(\mathbf k + \mathbf k_1 - \mathbf k_2 - \mathbf k_3),$$

$$\hat c_{\mathbf k}^{\ a}\ \frac{\partial \hat c^{\dagger b}_{\mathbf k'}}{\partial t} = i\omega^l_{\mathbf k}\hat c_{\mathbf k}^{\ a}\hat c^{\dagger b}_{\mathbf k'} + i\int \frac{d\mathbf k_1\ d\mathbf k_2\ d\mathbf k_3}{(2\pi)^9} \times \widetilde T^{*\ b\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf k',\ \mathbf k_1,\ \mathbf k_2,\ \mathbf k_3}\ \hat c_{\mathbf k}^{\ a}\hat c^{a_1}_{\mathbf k_1}\hat c^{\dagger a_2}_{\mathbf k_2}\hat c^{\dagger a_3}_{\mathbf k_3}\ (2\pi)^3\delta(\mathbf k' + \mathbf k_1 - \mathbf k_2 - \mathbf k_3).$$

Складывая последние два уравнения и усредняя их, получаем

$$
\begin{aligned}
\delta^{ab}(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}\,')\frac{\partial N^l_{\mathbf{k}}}{\partial t} \;=& -i\int\frac{d\mathbf{k}_1\;d\mathbf{k}_2\;d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\;\times\\
&\times\Big\{\widetilde{T}^{\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\;I^{\;b\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)-\\
&-\;\widetilde{T}^{*\;b\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\;I^{a_2\;a_3\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}\times\\
&\times(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\Big\},
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где

$$
I^{\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}=\langle\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger a_1}_{\mathbf{k}_1}\hat{c}^{\;a_2}_{\mathbf{k}_2}\hat{c}^{\;a_3}_{\mathbf{k}_3}\rangle
$$

— четырехточечная корреляционная функция. Дифференцируя далее корреляционную функцию $I^{\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}$ по t, с учетом (3.1) и (3.2) мы получаем уравнение, правая часть которого будет содержать корреляционные функции шестого порядка по операторам $\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}^{\;a}_{\mathbf{k}}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I^{\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}}{\partial t}=&\;i\big[\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}\big]I^{\;a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}+\\
&+i\int\frac{d\mathbf{k}'_1\;d\mathbf{k}'_2\;d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9}\;\widetilde{T}^{*a\;a'_1\;a'_2\;a'_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}'_1,\,\mathbf{k}'_2,\,\mathbf{k}'_3}\times\\
&\times\langle\hat{c}^{a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\hat{c}^{\dagger a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\hat{c}^{\dagger a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\hat{c}^{\dagger\;a_1}_{\mathbf{k}_1}\hat{c}^{\;a_2}_{\mathbf{k}_2}\hat{c}^{\;a_3}_{\mathbf{k}_3}\rangle(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}'_1-\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}'_3)+\\
&+i\int\frac{d\mathbf{k}'_1\;d\mathbf{k}'_2\;d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9}\;\widetilde{T}^{*a_1\;a'_1\;a'_2\;a'_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}'_1,\,\mathbf{k}'_2,\,\mathbf{k}'_3}\times\\
&\times\langle\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\hat{c}^{a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\hat{c}^{\dagger a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\hat{c}^{\dagger a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\hat{c}^{\;a_2}_{\mathbf{k}_2}\hat{c}^{\;a_3}_{\mathbf{k}_3}\rangle(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}'_1-\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}'_3)-\\
&-i\int\frac{d\mathbf{k}'_1\;d\mathbf{k}'_2\;d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9}\;\widetilde{T}^{a_2\;a'_1\;a'_2\;a'_3}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}'_1,\,\mathbf{k}'_2,\,\mathbf{k}'_3}\times\\
&\times\langle\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger a_1}_{\mathbf{k}_1}\hat{c}^{\dagger a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\hat{c}^{a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\hat{c}^{a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\hat{c}^{\;a_3}_{\mathbf{k}_3}\rangle(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}'_1-\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}'_3)-\\
&-i\int\frac{d\mathbf{k}'_1\;d\mathbf{k}'_2\;d\mathbf{k}'_3}{(2\pi)^9}\;\widetilde{T}^{a_3\;a'_1\;a'_2\;a'_3}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}'_1,\,\mathbf{k}'_2,\,\mathbf{k}'_3}\times\\
&\times\langle\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\hat{c}^{\dagger a_1}_{\mathbf{k}_1}\hat{c}^{\dagger a_2}_{\mathbf{k}_2}\hat{c}^{\dagger a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\hat{c}^{a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\hat{c}^{a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\rangle\times\\
&\times(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}_3+\mathbf{k}'_1-\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}'_3).
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Замкнем цепочку уравнений для корреляционных функций тем, что выражения для корреляционных функций шестого порядка выразим в терминах парных корреляционных функций. Так, например, первая корреляционная функция в правой части (3.5) имеет следующую структуру:

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{c}^{a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\hat{c}^{\dagger a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\hat{c}^{\dagger a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\hat{c}^{\dagger a_1}_{\mathbf{k}_1}\hat{c}^{\;a_2}_{\mathbf{k}_2}\hat{c}^{\;a_3}_{\mathbf{k}_3}\rangle=&\;3(2\pi)^9\Big\{\delta^{a_3a'_3}\delta^{a_2a'_2}\delta^{a_1a'_1}\times\\
&\times\delta(\mathbf{k}'_3-\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}'_1-\mathbf{k}_1)N^l_{\mathbf{k}_3}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_1}+\\
&+\;\delta^{a_3a'_3}\delta^{a_1a_2}\delta^{a'_2a'_1}\times\\
&\times\delta(\mathbf{k}'_3-\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}'_1)N^l_{\mathbf{k}_3}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}'_1}+\\
&+\;\delta^{a'_3a'_1}\delta^{a_1a_3}\delta^{a'_2a_2}\times\\
&\times\delta(\mathbf{k}'_3-\mathbf{k}'_1)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}_2)N^l_{\mathbf{k}'_1}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}+\\
&+\;\delta^{a'_3a'_1}\delta^{a_1a_2}\delta^{a'_2a_3}\times\\
&\times\delta(\mathbf{k}'_3-\mathbf{k}'_1)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}_3)N^l_{\mathbf{k}'_1}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_3}+\\
&+\;\delta^{a'_3a_2}\delta^{a_1a_3}\delta^{a'_2a'_1}\times\\
&\times\delta(\mathbf{k}'_3-\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}'_1)N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}'_1}+\\
&+\;\delta^{a'_3a_2}\delta^{a'_1a_1}\delta^{a'_2a_3}\times\\
&\times\delta(\mathbf{k}'_3-\mathbf{k}_2)\delta(\mathbf{k}'_1-\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}_3)N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_3}\Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

В данном выражении только первый и последний члены дают необходимый вклад в искомое кинетическое уравнение. Подставляем эти члены в первый интеграл в правой части (3.5) и выполняем суммирование по цветным индексам a'_1, a'_2, a'_3 и интегрирование по импульсам $\mathbf{k}'_1$, $\mathbf{k}'_2$, $\mathbf{k}'_3$. В итоге получаем

$$
\begin{aligned}
3i\Big\{&\widetilde{T}^{*a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+\\
&+\widetilde{T}^{*a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}\Big\}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)=\\
&=6\,i\widetilde{T}^{*a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}\times\\
&\times(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Для примера приведем явный вид вклада, который генерирует второй член в разбиении корреляционной функции (3.6):

$$
N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}\delta(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)\delta(\mathbf{k}_3-\mathbf{k})\delta^{a_1\;a_2}i\int\widetilde{T}^{*a\;b\;b\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}'}d\mathbf{k}'.
$$

Сравнивая два последних выражения, видим, что они имеют совершенно разную структуру.

Смотрим далее вторую шеститочечную корреляционную функцию в (3.5). В данном корреляторе выписываем в явном виде только «правильные» члены:

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}\hat{c}^{a'_1}_{\mathbf{k}'_1}\hat{c}^{\dagger a'_2}_{\mathbf{k}'_2}\hat{c}^{\dagger a'_3}_{\mathbf{k}'_3}\hat{c}^{\;a_2}_{\mathbf{k}_2}\hat{c}^{\;a_3}_{\mathbf{k}_3}\rangle&=\\
=3(2\pi)^9\Big\{&\delta^{a\;a'_1}\delta^{a_2a'_2}\delta^{a_3a'_3}\delta(\mathbf{k}'_1-\mathbf{k}\,)\delta(\mathbf{k}'_2-\mathbf{k}_2)\times\\
&\times\delta(\mathbf{k}'_3-\mathbf{k}_3)N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+\;(2\rightleftarrows 3)\;+\;\ldots\Big\}.
\end{aligned}
$$

Подставляя данное выражение во второй интеграл в (3.5), получаем выражение, аналогичное выражению (3.7):

$$6i\,\widetilde{T}^{*a_1\;a\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3).$$

Аналогичные рассуждения для третьего и четвертого корреляторов в (3.5) дают нам два оставшихся вклада соответственно

$$-6i\,\widetilde{T}^{a_2\;a_3\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_3}(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)$$

и

$$-6i\,\widetilde{T}^{a_3\;a_2\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3).$$

Учитывая соотношения симметрии для амплитуды рассеяния

$$\widetilde{T}^{a_2\;a_3\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}=\widetilde{T}^{*a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3},$$

$$\widetilde{T}^{a_3\;a_2\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}=\widetilde{T}^{*a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3},$$

находим уравнение для корреляционной функции четвертого порядка, вместо (3.5):

$$\begin{aligned}\frac{\partial I^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}}{\partial t}&=i\big[\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}\big]I^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}+\\&+\;6i\widetilde{T}^{*a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\Big(N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}-\\&-N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_3}-N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}\Big)\times\\&\times(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3).\end{aligned}\quad(3.8)$$

4. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГЛЮОННЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ

Перейдем теперь к непосредственному выводу кинетического уравнения для плазмонов. В принципе, самосогласованная система двух уравнений (3.4) и (3.8) определяет эволюцию плотности числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$. Однако мы сделаем еще одно упрощение: в уравнении (3.8) пренебрежем членом с производной по времени в сравнении с членом, содержащим разность собственных частот волновых пакетов. Вместо (3.8) тогда будем иметь

$$\begin{aligned}I^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}&\simeq N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}(2\pi)^6\Big[\delta^{a\;a_2}\delta^{a_1\;a_3}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_2)\times\\&\times\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)+\delta^{a\;a_3}\delta^{a_1\;a_2}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\Big]-\\&-\frac{6}{\Delta\omega+i0}\,\widetilde{T}^{*a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\Big(N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}-\\&-N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_3}-N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}\Big)(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3),\end{aligned}$$

где

$$\Delta\omega\equiv\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}.$$

Здесь первый член в правой части, соответствующий полностью некоррелированным волнам (чисто гауссовым флуктуациям), является решением однородного уравнения для корреляционной функции четвертого порядка $I^{\,a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}$. Второй член определяет отклонение четырехточечного коррелятора от гауссова приближения для малого уровня нелинейности взаимодействующих волн.

Подставим первый член в правую часть уравнения для $N^l_{\mathbf{k}}$ (3.4):

$$\begin{aligned}&-\;i(2\pi)^3N^l_{\mathbf{k}}\int\frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\;N^l_{\mathbf{k}_1}\Big\{\widetilde{T}^{\;a\;a_1\;b\;a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')+\\&\qquad+\widetilde{T}^{\;a\;a_1\;a_1\;b}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_1\;\mathbf{k}'}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')-\\&-\;\widetilde{T}^{*\;b\;a_1\;a\;a_1}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})-\widetilde{T}^{*\;b\;a_1\;a_1\;a}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}}\delta(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\Big\}=\\&=-\,i2\,(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')N^l_{\mathbf{k}}\int\frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\;N^l_{\mathbf{k}_1}\times\\&\qquad\times\Big\{\widetilde{T}^{\;a\;a_1\;b\;a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}-\widetilde{T}^{*\;b\;a_1\;a\;a_1}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}\Big\}.\end{aligned}\quad(4.1)$$

Подставим далее второй член в правую часть уравнения (3.4):

$$\begin{aligned}&-6i\int\frac{d\mathbf{k}_1\;d\mathbf{k}_2\;d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\;\Big\{\widetilde{T}^{a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\Big(\frac{1}{\Delta\omega+i0}\Big)\times\\&\times\widetilde{T}^{*b\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\times\\&\times(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\Big[N^l_{\mathbf{k}}\,N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+\ldots\Big]-\\&-\;\widetilde{T}^{a_2\;a_3\;b\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1}\Big(\frac{1}{\Delta\omega-i0}\Big)\widetilde{T}^{*a_2\;a_3\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}\times\\&\times(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\times\\&\times\Big[N^l_{\mathbf{k}}\,N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+\;\ldots\;\Big].\end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned}&\delta(\mathbf{k}'+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)=\\&\qquad=\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3),\end{aligned}$$

последнее выражение можно записать в более компактной форме:

$$\begin{aligned}&-6i(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\int\frac{d\mathbf{k}_1\;d\mathbf{k}_2\;d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\;\times\\&\times(2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\Big[N^l_{\mathbf{k}}\,N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}+\ldots\Big]\times\\&\times\Bigg\{\frac{\widetilde{T}^{a\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}\widetilde{T}^{*b\;a_1\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}}{\Delta\omega+i0}-\\&\qquad-\frac{\widetilde{T}^{a_2\;a_3\;b\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k}',\,\mathbf{k}_1}\widetilde{T}^{*a_2\;a_3\;a\;a_1}_{\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3,\,\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1}}{\Delta\omega-i0}\Bigg\}.\end{aligned}\quad(4.2)$$

Свертывая далее полученные выражения (3.4), (4.1) и (4.2) с δ^{ab}, учитывая, что

$$\frac{1}{\Delta\omega + i0} - \frac{1}{\Delta\omega - i0} = -2i\pi\delta(\Delta\omega),$$

и сокращая на множитель $(2\pi)^3\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$, находим искомое кинетическое уравнение для бесцветных продольных глюонных возбуждений:

$$\begin{aligned}\frac{dN^l_{\mathbf{k}}}{dt} &= \frac{4}{d_A} N^l_{\mathbf{k}} \int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\, N^l_{\mathbf{k}_1} \mathrm{Im}\Big[\widetilde{T}^{\,a\ a_1\ a\ a_1}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}\Big] + \\ &+ \frac{6}{d_A}\int \frac{d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\,(2\pi)^4\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}) \times \\ &\times \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\widetilde{T}^{a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\widetilde{T}^{*a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3} \times \\ &\times \Big(N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3} + N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3} - N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_3} - \\ &- N^l_{\mathbf{k}}N^l_{\mathbf{k}_1}N^l_{\mathbf{k}_2}\Big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь $d_A = N_c^2 - 1$. Первое слагаемое в правой части (4.3) описывает процесс нелинейного затухания Ландау [20], декремент которого представляет собой линейный функционал плотности числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$:

$$\hat{\gamma}\{N^l_{\mathbf{k}}\} \equiv \gamma^l(\mathbf{k}) = \frac{4}{d_A}\int \frac{d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\, N^l_{\mathbf{k}_1}\mathrm{Im}\Big[\widetilde{T}^{\,a\ a_1\ a\ a_1}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}\Big].$$

Второе слагаемое в (4.3) связано с процессом упругого плазмон-плазмонного рассеяния. Уравнение (4.3) можно представить также в более наглядном виде:

$$\begin{aligned}\frac{dN^l_{\mathbf{k}}}{dt} &\equiv \frac{\partial N^l_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \mathbf{v}^l_{\mathbf{k}}\cdot\frac{\partial N^l_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{x}} = \\ &= -\hat{\gamma}\,\{N^l_{\mathbf{k}}\}\,N^l_{\mathbf{k}} - N^l_{\mathbf{k}}\Gamma_d[N^l_{\mathbf{k}}] + (1+N^l_{\mathbf{k}})\Gamma_i[N^l_{\mathbf{k}}],\end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$\mathbf{v}^l_{\mathbf{k}} = \frac{\partial\omega^l_{\mathbf{k}}}{\partial\mathbf{k}} = -\left[\left(\frac{\partial\mathrm{Re}\,\varepsilon^l(k)}{\partial\mathbf{k}}\right)\left(\frac{\partial\mathrm{Re}\,\varepsilon^l(k)}{\partial\omega}\right)^{-1}\right]\Bigg|_{\omega=\omega^l_{\mathbf{k}}}$$

— групповая скорость продольных колебаний, а обобщенная скорость распада Γ_d и обратная скорость регенерации Γ_i представляют собой нелинейные функционалы плотности числа плазмонов:

$$\Gamma_d[N^l_{\mathbf{k}}] = \int d\mathcal{T}^{(3)}\,w_4(\mathbf{k},\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)N^l_{\mathbf{k}_1}(1+N^l_{\mathbf{k}_2})(1+N^l_{\mathbf{k}_3})$$

и соответственно

$$\Gamma_i[N^l_{\mathbf{k}}] = \int d\mathcal{T}^{(3)}\,w_4(\mathbf{k},\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3)(1+N^l_{\mathbf{k}_1})N^l_{\mathbf{k}_2}N^l_{\mathbf{k}_3}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} w_4(\mathbf{k},\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) &= \\ &= \frac{6}{d_A}\,\widetilde{T}^{a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\widetilde{T}^{*\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\end{aligned} \tag{4.5}$$

— вероятность рассеяния для процесса упругого столкновения двух бесцветных плазмонов, а мера интегрирования определена как

$$\begin{aligned} d\mathcal{T}^{(3)} &\equiv (2\pi)^4\,\delta(\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}) \times \\ &\times \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_3)\frac{d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3}{(2\pi)^9}\,.\end{aligned}$$

В пределе больших чисел заполнения плазмонных состояний, $N^l_{\mathbf{k}} \gg 1$, правая часть уравнения Больцмана (4.4) переходит в (4.3).

5. ЯВНЫЙ ВИД ФУНКЦИИ $T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}$

Нам осталось определить явный вид вершинных функций $T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}$, $U^{a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}$ и $V^{a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}$, которые входят в эффективную амплитуду (2.13). В данном разделе мы определим вид функции $T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}$ в приближении так называемых жестких температурных петель (HTL) [8]. В работе [11], в рамках HTL-приближения была вычислена вероятность упругого рассеяния двух плазмонов

$$\begin{aligned} w_4(\mathbf{k},\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3) &= 3\mathrm{M}^{aa_1a_2a_3}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_3)\times \\ &\times \mathrm{M}^{*aa_1a_2a_3}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_3).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Здесь матричный элемент четырехплазмонного распада имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^{aa_1a_2a_3}(\mathbf{k},\mathbf{k}_1,-\mathbf{k}_2,-\mathbf{k}_3) &= g^2\left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}\times \\ &\times \left(\frac{\tilde{u}^{\mu}(k)}{\sqrt{\bar{u}^2(k)}}\right)\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k}_i)}{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}\right)^{1/2}\left(\frac{\tilde{u}^{\mu_i}(k_i)}{\sqrt{\bar{u}^2(k_i)}}\right)\times \\ &\times\, {}^*\tilde{\Gamma}^{aa_1a_2a_3}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k,k_1,-k_2,-k_3)\Big|_{on-shell},\end{aligned} \tag{5.2}$$

и, в свою очередь, эффективная амплитуда ${}^*\tilde{\Gamma}^{a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mu\ \mu_1\ \mu_2\ \mu_3}(k,k_1,-k_2,-k_3)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} {}^*\tilde{\Gamma}^{aa_1a_2a_3}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k,k_1,-k_2,-k_3) &= -f^{aa_1b}f^{ba_2a_3}\times \\ &\times {}^*\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k,k_1,-k_2,-k_3) - \\ &- f^{aa_2b}f^{ba_1a_3}\,{}^*\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_2\mu_1\mu_3}(k,-k_2,k_1,-k_3),\end{aligned} \tag{5.3}$$

где f^{abc} — антисимметричные структурные константы цветовой алгебры Ли $\mathrm{su}(N_c)$. Цветные факторы в последнем выражении умножаются на чисто кинематические коэффициенты — эффективные субамплитуды, определяемые следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&{}^*\tilde{\Gamma}_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) \equiv \\
&\equiv {}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) - \\
&- {}^*\Gamma_{\mu\mu_1\nu}(k, k_1, -k-k_1)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}^{\nu\nu'}(k_2+k_3) \times \\
&\times {}^*\Gamma_{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3, -k_2, -k_3) - \\
&- {}^*\Gamma_{\mu\mu_3\nu}(k, -k_3, -k+k_3)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}^{\nu\nu'}(k_2-k_1) \times \\
&\times {}^*\Gamma_{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1, -k_2, k_1). \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

В Приложении приведен вид вершинных функций ${}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, k_2, k_3)$ и ${}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(k, k_1, k_2)$, (A.1)–(A.7), а также глюонного пропагатора ${}^*\tilde{\mathcal{D}}^{\nu\mu}(k)$ в приближении жестких температурных петель, (A.8)–(A.10). Два 4-вектора

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_\mu(k) &= \frac{k^2}{(k\cdot u)}\Big(k_\mu - u_\mu(k\cdot u)\Big) \quad \text{и} \\
\bar{u}_\mu(k) &= k^2 u_\mu - k_\mu(k\cdot u)
\end{aligned} \qquad (5.5)
$$

представляют собой проекторы на продольное направление волнового вектора $\mathbf{k}$, записанные в лоренц-инвариантной форме в гамильтоновой и лоренцевой калибровках соответственно. Здесь u^μ — 4-скорость среды, которая в системе покоя равна $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Наконец, 4-векторы вида

$$
\left(\frac{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \frac{\tilde{u}_\mu(k)}{\sqrt{\bar{u}^2(k)}}\Bigg|_{on-shell} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\,\epsilon^l_\mu(\mathbf{k}) \qquad (5.6)
$$

в правой части (5.2) представляют собой обычные волновые функции продольного физического глюона в A_0-калибровке, где фактор $\sqrt{\mathrm{Z}_l(\mathbf{k})}$ обеспечивает ренормировку глюонной волновой функции за счет температурных эффектов. Множитель 3 в правой части (5.1) учитывает три возможных канала четырехплазмонного распада, которые меняют плотность числа плазмонов:

$$
\mathrm{g}^* + \mathrm{g}^*_1 \rightleftharpoons \mathrm{g}^*_2 + \mathrm{g}^*_3, \quad \mathrm{g}^* + \mathrm{g}^*_2 \rightleftharpoons \mathrm{g}^*_1 + \mathrm{g}^*_3,
$$

$$
\mathrm{g}^* + \mathrm{g}^*_3 \rightleftharpoons \mathrm{g}^*_1 + \mathrm{g}^*_2.
$$

Сравнивая два выражения для вероятности плазмон-плазмонного рассеяния (4.5) и (5.1), видим, что эффективную амплитуду $\widetilde{T}^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}$, определяемую выражением (2.13), с точностью до числового множителя следует отождествить с матричным элементом $\mathrm{M}^{aa_1a_2a_3}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3)$, вычисленным в рамках высокотемпературной квантовой теории поля, т. е.

$$
\widetilde{T}^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3} = \left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2} \mathrm{M}^{a\,a_1\,a_2\,a_3}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, -\mathbf{k}_2, -\mathbf{k}_3). \qquad (5.7)
$$

Из выражений для эффективных амплитуд (2.13) и (5.2), (5.3) мы можем сразу получить явный вид амплитуды $T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}$, которая входит в качестве коэффициентной функции в определение оператора Гамильтона четвертого порядка $\widehat{H}_4$ (2.7):

$$
\begin{aligned}
T^{\,a\ a_1\ a_2\ a_3}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3} &= -\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2} g^2 \left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right) \times \\
&\times \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right)\Big[f^{aa_1b} f^{ba_2a_3} \times \\
&\times {}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2\mu_3}(k, k_1, -k_2, -k_3) + f^{aa_2b} f^{ba_1a_3} \times \\
&\times {}^*\Gamma^{\mu\mu_2\mu_1\mu_3}(k, -k_2, k_1, -k_3)\Big]\Big|_{on-shell}. \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

Здесь мы приняли во внимание связь продольного проектора с вектором поляризации, (5.6). Явный вид эффективной четырехглюонной вершины ${}^*\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3)$ в правой части последнего выражения определяется формулами (A.5)–(A.7).

6. ЯВНЫЙ ВИД ФУНКЦИЙ $U^{\,a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}$ И $V^{\,a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}$

Перейдем теперь к определению явного вида коэффициентных функций $U^{\,a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}$ и $V^{\,a\ a_1\ a_2}_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}$ в подынтегральных выражениях оператора Гамильтона третьего порядка $\widehat{H}_3$ (2.6). Однако в отличие от предыдущего случая, здесь мы имеем более сложную ситуацию. С учетом (2.13) и (5.2)–(5.4) из (5.7) следует исходное для анализа выражение

$$
\begin{aligned}
&\frac{U^{\;b\;a_2\;a_3}_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\,U^{*\;b\;a\;a_1}_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}+\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}}+\\
&\quad+\frac{V^{\;b\;a_2\;a_3}_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\,V^{*\;b\;a\;a_1}_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}}+\\
&\quad+\frac{V^{\;a_1\;a_2\;b}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,V^{*\;a_3\;a\;b}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}}+\\
&\quad+\frac{V^{\;a\;a_2\;b}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}\,V^{*\;a_3\;a_1\;b}_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_3}}+\\
&\quad+\frac{V^{\;a\;a_3\;b}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\,V^{*\;a_2\;a_1\;b}_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}}+\\
&\quad+\frac{V^{\;a_1\;a_3\;b}_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3}\,V^{*\;a_2\;a\;b}_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}}=\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2}g^2\left(\frac{\epsilon^l_\mu(k)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right)\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(k_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right)\times\\
&\times\Big[f^{aa_1b}f^{ba_2a_3}\Big({}^*\Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k,k_1,-k-k_1)\,{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2+k_3)\times\\
&\times{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3,-k_2,-k_3)+{}^*\Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k,-k_3,-k+k_3)\times\\
&\times{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2-k_1)\,{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1,-k_2,k_1)\Big)+\\
&+f^{aa_2b}f^{ba_1a_3}\Big({}^*\Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k,-k_2,-k+k_2)\times\\
&\times{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(-k_1+k_3)\,{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(-k_1+k_3,k_1,-k_3)+\\
&+{}^*\Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k,-k_3,-k+k_3)\,{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(-k_1+k_2)\times\\
&\times{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(-k_1+k_2,k_1,-k_2)\Big)\Big]\Big|_{on-shell}.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Первым шагом нам необходимо «распутать» цветовую структуру данного выражения. Для этой цели полагаем для трехточечных амплитуд U и V:

$$U^{a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}=f^{aa_1a_2}\,U_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2},$$

$$V^{a\;a_1\;a_2}_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}=f^{aa_1a_2}\,V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}.$$

Такое представление является однозначным. В силу полной антисимметричности структурных констант $f^{\;a\;a_1\;a_2}$ по перестановке цветных индексов, из свойств (2.8) немедленно следует

$$
\begin{aligned}
V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}&=-V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1}\;,\\
U_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2}&=-U_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1}=U_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}}\,.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Далее, используя тождество для антисимметричных структурных констант

$$f^{a_1a_2b}f^{ba_3a}=-f^{aa_2b}f^{ba_1a_3}+f^{aa_1b}f^{ba_2a_3},$$

левую часть (6.1) можно привести к следующему виду:

$$
\begin{aligned}
&f^{aa_1b}f^{ba_2a_3}\Bigg[\frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\,U^*_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}+\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}}+\\
&\quad+\frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\,V^*_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}^l_1}-\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}}+\\
&\quad+\frac{V_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,V^*_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_3}}+\\
&\quad+\frac{V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\,V^*_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2}}\Bigg]-\\
&-f^{aa_2b}f^{ba_1a_3}\Bigg[\frac{V_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,V^*_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_3}}+\\
&\quad+\frac{V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}\,V^*_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_3}}+\\
&\quad+\frac{V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\,V^*_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2}}+\\
&\quad+\frac{V_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3}\,V^*_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_2}}\Bigg].
\end{aligned}
$$

Сравнивая коэффициенты после произведений антисимметричных структурных констант $f^{\;a\;a_1\;b}f^{\;b\;a_2\;a_3}$ и $f^{\;a\;a_2\;b}f^{\;b\;a_1\;a_3}$ полученного выше выражения и правой части (6.1), находим

$$
\begin{aligned}
&\frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\,U^*_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}+\omega_{\mathbf{k}}+\omega_{\mathbf{k}_1}}+\\
&\quad+\frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_3}\,V^*_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}}-\omega_{\mathbf{k}_1}}+\\
&\quad+\frac{V_{\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\,V^*_{\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega_{-(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)}+\omega_{\mathbf{k}_2}-\omega_{\mathbf{k}_1}}+\\
&\quad+\frac{V_{\mathbf{k},\;\mathbf{k}_3,\;\mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\,V^*_{\mathbf{k}_2,\;\mathbf{k}_1,\;\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega_{\mathbf{k}_1}-\omega_{\mathbf{k}_2}}=\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2}g^2\left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right)\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right)\times\\
&\times\Big[{}^*\Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k,k_1,-k-k_1)\,{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k+k_1)\times\\
&\quad\times{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3,-k_2,-k_3)+\\
&+{}^*\Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k,-k_3,-k+k_3)\,{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2-k_1)\times\\
&\quad\times{}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1,-k_2,k_1)\Big]\Big|_{on-shell}
\end{aligned}
$$

плюс аналогичное соотношение для второй коэффициентной функции. Наконец, из структуры данного выражения ясно, что здесь мы фактически имеем два независимых соотношения: первое

$$\frac{U_{-(\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3),\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\, U^*_{-(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1),\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \\ + \frac{V_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_3}\, V^*_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}} = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2} g^2 \left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right) \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right) \times \\ \times \Big[\, {}^*\Gamma^{\mu\mu_1\nu}(k,k_1,-k-k_1)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k+k_1)\,\times \\ \times\, {}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_3}(k_2+k_3,-k_2,-k_3)\Big]\Big|_{on-shell} \quad (6.3)$$

и второе

$$\frac{V_{\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2}\, V^*_{\mathbf{k}_3,\ \mathbf{k},\ \mathbf{k}_3-\mathbf{k}}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \\ + \frac{V_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_3,\ \mathbf{k}-\mathbf{k}_3}\, V^*_{\mathbf{k}_2,\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}} = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{d_A}{2}\right)^{1/2} g^2 \left(\frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\right) \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\epsilon^l_{\mu_i}(\mathbf{k}_i)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_i}}}\right) \times \\ \times \Big[\, {}^*\Gamma^{\mu\mu_3\nu}(k,-k_3,-k+k_3)\, {}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2-k_1)\,\times \\ \times\, {}^*\Gamma^{\nu'\mu_2\mu_1}(k_2-k_1,-k_2,k_1)\Big]\Big|_{on-shell}. \quad (6.4)$$

В левых частях (6.3) и (6.4) мы учли четность дисперсионного соотношения, т. е. $\omega^l_{-\mathbf{k}} = \omega^l_{\mathbf{k}}$.

Далее, вторым шагом в эффективных глюонных пропагаторах ${}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}$ в правых частях (6.3) и (6.4) мы оставляем только члены с продольным проектором $\tilde{Q}_{\nu\nu'}$. Так, для первого пропагатора ${}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k+k_1)$ делаем замену

$${}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k+k_1) \Rightarrow -\,\tilde{Q}_{\nu\nu'}(k+k_1)\, {}^*\Delta^l(k+k_1),$$

где правая часть, с учетом (A.10) и (A.9), в явном виде задается выражением

$$-\frac{\tilde{u}_\nu(k+k_1)\,\tilde{u}_{\nu'}(k+k_1)}{\bar{u}^2(k+k_1)}\,\frac{1}{(k+k_1)^2-\Pi^l(k+k_1)}, \quad (6.5)$$

и аналогично для второго пропагатора ${}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\nu\nu'}(k_2-k_1)$. Вблизи полюса $\omega \sim \omega^l_{\mathbf{k}}$ продольный скалярный пропагатор ${}^*\Delta^l(k) = {}^*\Delta^l(\omega,\mathbf{k})$ ведет себя как (см., например, [21])

$${}^*\Delta^l(\omega,\mathbf{k}) = \frac{1}{\omega^2-\mathbf{k}^2-\Pi^l(\omega,\mathbf{k})} \simeq \frac{Z_l(\mathbf{k})}{\omega^2-(\omega^l_{\mathbf{k}})^2} = \\ = \frac{Z_l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\left[\frac{1}{\omega-\omega^l_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{\omega+\omega^l_{\mathbf{k}}}\right].$$

Используя данное приближение, получаем, в частности, для первого пропагатора

$${}^*\Delta^l(k+k_1) \simeq -\frac{Z_l(\mathbf{k}+\mathbf{k}_1)}{2\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}} \times \\ \times \left[\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}}\right] \quad (6.6)$$

и для второго

$${}^*\Delta^l(k_2-k_1) \simeq -\frac{Z_l(\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1)}{2\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}} \times \\ \times \left[\frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_2}-\omega^l_{\mathbf{k}_1}} + \frac{1}{\omega^l_{\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}_2}}\right]. \quad (6.7)$$

Принимая во внимание приведенные выше выражения (6.3)–(6.7), мы можем выписать искомый вид трехплазмонных вершинных функций:

$$V_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2} = g\left(\frac{d_A}{8}\right)^{1/4} \frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\,\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\,\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}} \times \\ \times\, {}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(k,-k_1,-k_2)\Big|_{on-shell} \quad (6.8)$$

и

$$U_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2} = g\left(\frac{d_A}{8}\right)^{1/4} \frac{\epsilon^l_\mu(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}}}}\,\frac{\epsilon^l_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_1}}}\,\frac{\epsilon^l_{\mu_2}(\mathbf{k}_2)}{\sqrt{2\omega^l_{\mathbf{k}_2}}} \times \\ \times\, {}^*\Gamma^{\mu\mu_1\mu_2}(-k,-k_1,-k_2)\Big|_{on-shell}. \quad (6.9)$$

Отметим, что вершинные функции (6.8) и (6.9) описывают существенно различные процессы. Возьмем для примера процесс, который описывается вторым графиком на рис. 1 (s-канал). Фактически он включает в себя два подпроцесса рассеяния. Первый из них в рамках рассматриваемого приближения можно описать следующим образом (рис. 2): два плазмона с частотами $\omega^l_{\mathbf{k}}$ и $\omega^l_{\mathbf{k}_1}$ и волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$ сливаются в вершине *1* в один плазмон с частотой $\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}$ и волновым вектором $\mathbf{k}+\mathbf{k}_1$, который затем в вершине *2* распадается в два плазмона с частотами $\omega^l_{\mathbf{k}_2}$ и $\omega^l_{\mathbf{k}_3}$ и волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$ (рис. 2*a*). Функция $1/(\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}-\omega^l_{\mathbf{k}}-\omega^l_{\mathbf{k}_1})$ играет в классическом гамильтоновом описании роль пропагатора промежуточного «виртуального» состояния коллективных продольных возбуждений, а взаимодействие в вершинах *1* и *2* здесь задается функцией $V_{\mathbf{k},\ \mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2}$ (6.8).

Второй подпроцесс определяется таким образом (рис. 2*б*): в вершине *2* происходит трехплазмонный распад — два плазмона с частотами $\omega^l_{\mathbf{k}_2}$ и $\omega^l_{\mathbf{k}_3}$, и волновыми векторами $\mathbf{k}_2$ и $\mathbf{k}_3$ уходят в систему, а третий плазмон с частотой $\omega^l_{\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3}$ и волновым вектором

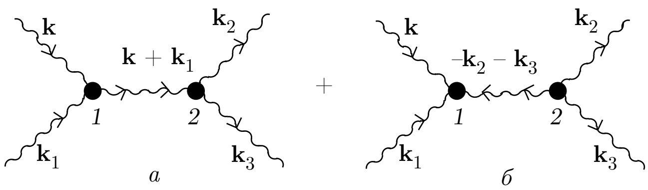

Рис. 2. Подпроцессы четырехплазмонного упругого рассеяния, определяемые процессами трехплазмонных распадов и слияний в s-канале

$\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3$ в вершине *1* сливается с двумя плазмонами с частотами $\omega^l_{\mathbf{k}}$ и $\omega^l_{\mathbf{k}_1}$ и волновыми векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_1$, которые приходят из системы. Роль пропагатора здесь играет функция $1/(\omega^l_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_1}+\omega^l_{\mathbf{k}}+\omega^l_{\mathbf{k}_1})$. Взаимодействие в вершинах *1* и *2* определяется функцией $U_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2}$ (6.9).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе сделан первый шаг к построению классического гамильтонова формализма для описания процессов нелинейного взаимодействия мягких глюонных возбуждений в высокотемпературной теории поля Янга – Миллса. Построено в явной форме каноническое преобразование (2.10), позволяющее исключить гамильтониан взаимодействия третьего порядка $\widehat{H}_3$ (2.6) и тем самым определить новый эффективный гамильтониан взаимодействия $\widetilde{\widetilde{H}}_4$ (2.12), с калибровочно-ковариантной амплитудой рассеяния $\widetilde{T}^{\,a\,a_1\,a_2\,a_3}_{\mathbf{k},\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\mathbf{k}_3}$. Данный гамильтониан взаимодействия определяет конкретный физический процесс — упругое рассеяние двух бесцветных плазмонов друг на друге. Данный процесс рассеяния будет доминирующим, когда значение амплитуды калибровочного поля имеет порядок [11]

$$|A_\mu(x)|\sim\sqrt{g}T \text{ и, соответственно, } N^l_{\mathbf{k}}\sim\frac{1}{g},$$

фактически отвечающий уровню тепловых флуктуаций в горячей глюонной плазме. Для данного значения амплитуды калибровочного поля при $g\ll 1$ плотность числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$ является большой, и использование чисто классического описания оправдано. Более того, здесь справедливо использование линеаризованного уравнения Больцмана, вместо точного (2.12), для бесцветных плазмонов, так как распределение Планка, относительно которого измеряется отклонение плотности числа плазмонов $\delta N^l_{\mathbf{k}}$, имеет порядок

$$N^l_{eq}(\mathbf{k})\sim\frac{T}{\omega^l_{\mathbf{k}}}\sim\frac{1}{g}.$$

В этом случае можно говорить, что теория плазмон-плазмонного взаимодействия для малых амплитуд мягких возбуждений является линейной, а нелинейные эффекты, связанные с неравновесными флуктуациями плотности числа плазмонов $\delta N^l_{\mathbf{k}}$, могут трактоваться как возмущения.

Ситуация качественно меняется, когда система сильно возбуждена, что может иметь место в столкновениях ультрарелятивистских тяжелых ионов в экспериментах на Большом адронном коллайдере. При увеличении интенсивности возбуждений в глюонной плазме необходимо учитывать дальнейшие члены в разложении $\widehat{H}_{int}$. Так как процессы нелинейного взаимодействия с участием нечетного числа плазмонов запрещены, то мы можем, в принципе, определяя подходящим образом канонические преобразования, избавиться от всех «нечетных» гамильтонианов взаимодействия $\widehat{H}_{2n+1}$, $n=1,2,\ldots$ В предельном случае сильных возбуждений, когда

$$|A_\mu(x)|\sim T \text{ и, соответственно, } N^l_{\mathbf{k}}\sim\frac{1}{g^2},$$

данные канонические преобразования будут содержать бесконечное число членов произвольной степени по операторам рождения $\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}$ и уничтожения $\hat{c}^{a}_{\mathbf{k}}$. Это, в свою очередь, приведет к необходимости учета в правой части кинетического уравнения (4.4) всех высших процессов упругого рассеяния плазмонов: $3\to 3$, $4\to 4$, $\ldots$, так как все они одного порядка по константе взаимодействия g. Ясно, что процедура линеаризации кинетического уравнения для плотности числа плазмонов $N^l_{\mathbf{k}}$ в данном случае становится неприменимой и здесь мы приходим к истинно нелинейной теории взаимодействия мягких глюонных возбуждений в плазме с неабелевым типом взаимодействия.

Таким образом, возникает нетривиальная проблема построения явного вида канонических преобразований. Данные нелинейные канонические преобразования должны приводить исходный гамильтониан взаимодействия к новому эффективному виду:

$$\widehat{H}_{int}\longrightarrow\widetilde{\widetilde{H}}_{int}=\widetilde{\widetilde{H}}_4+\widetilde{\widetilde{H}}_6+\ldots+\widetilde{\widetilde{H}}_{2n+2}+\ldots$$

Однако прямой подход в определении явного вида необходимых канонических преобразований, который был использован в данной работе, становится малоэффективным при попытке исключения уже следующего нечетного гамильтониана $\widehat{H}_5$ ввиду чрезвычайной громоздкости вычислений. Для сильновозбужденных состояний, когда мы имеем дело с бесконечным числом членов, необходим качественно иной, более адекватный в данной ситуации аппарат, например, введение множества нелокальных канонических переменных, зависящих от дополнительного трехмерного единичного вектора, как это было предложено в работе [22]. Другой подход заключается в использовании связи

$$A^a_\mu(k) = A^{(0)a}_\mu(k) + {}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(k)\big\{\tilde{J}^{(2)a\nu}(A^{(0)}, A^{(0)}) + \\ + \tilde{J}^{(3)a\nu}(A^{(0)}, A^{(0)}, A^{(0)}) + \ldots\big\}, \quad (7.1)$$

где $A^a_\mu(k)$ и $A^{(0)a}_\mu(k)$ представляют собой взаимодействующее и свободное калибровочные поля системы, а $\tilde{J}^{(n)a}_\mu(A^{(0)}, A^{(0)}, \ldots)$ — некоторые эффективные токи, являющиеся нелинейными функционалами от свободного поля и определяемые рекуррентным образом в рамках приближения жестких температурных петель [11]. Коэффициентные функции в $\tilde{J}^{(n)a}_\mu$ есть эффективные амплитуды типа (5.3). В качестве взаимодействующего поля необходимо взять выражение (2.1), а в качестве свободного поля — выражение вида

$$\hat{A}^{(0)a}_\mu(x) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{Z^l(\mathbf{k})}{2\omega^l_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} \times \\ \times \left\{\epsilon^l_\mu \hat{c}^a_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \epsilon^*_\mu \hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right\}$$

с операторами $\hat{c}^a_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}^{\dagger a}_{\mathbf{k}}$, которые входят в правую часть канонических преобразований (2.10). Соотношение (7.1) фактически содержит в себе искомое каноническое преобразование с любой степенью точности, если использовать соответствующие аппроксимации для пропагаторов типа (6.6), (6.7) и вершинных функций (6.8), (6.9), (5.7) и т. п. Соотношение (7.1) позволяет дать нам совершенно новую интерпретацию канонических преобразований: преобразования (2.10) определяют переход от невзаимодействующего поля $A^{(0)a}_\mu(k)$ к взаимодействующему $A^a_\mu(k)$, которое учитывает все эффекты взаимодействия в среде. Анализ данной связи требует отдельного рассмотрения.

Финансирование. Работа Д. М. Гитмана и Ю. А. Маркова поддержана программой повышения конкурентоспособности Национального исследовательского Томского государственного университета среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Также работа Д. М. Гитмана частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 18-02-00149), Фондом исследований Сан-Паулу (FAPESP, грант 2016/03319-6) и Национальным Советом по науке (CNPq).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Эффективные вершины и глюонный пропагатор

В данном приложении мы приводим явный вид эффективных вершинных функций и глюонного пропагатора в высокотемпературном приближении жестких температурных петель (HTL) [8, 9].

Эффективная трехглюонная вершина

$${}^*\Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) \equiv \Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) + \\ + \delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) \quad (A.1)$$

представляет собой сумму голой трехглюонной вершины

$$\Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) = g^{\mu\nu}(k - k_1)^\rho + g^{\nu\rho}(k_1 - k_2)^\mu + \\ + g^{\mu\rho}(k_2 - k)^\nu \quad (A.2)$$

и соответствующей HTL-поправки

$$\delta\Gamma^{\mu\nu\rho}(k, k_1, k_2) = 3\omega^2_{pl} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v^\mu v^\nu v^\rho}{v\cdot k + i\epsilon} \times \\ \times \left(\frac{\omega_2}{v\cdot k_2 - i\epsilon} - \frac{\omega_1}{v\cdot k_1 - i\epsilon}\right), \quad (A.3)$$

где $v^\mu = (1, \mathbf{v})$, $k + k_1 + k_2 = 0$, $d\Omega$ — элемент телесного угла. Ниже приведены полезные свойства трехглюонной HTL-ресуммированной вершинной функции при комплексном сопряжении и перестановке импульсов:

$$({}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(-k_1 - k_2, k_1, k_2))^* = \\ = -\,{}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(k_1 + k_2, -k_1, -k_2) = \\ = {}^*\Gamma_{\mu\mu_1\mu_2}(k_1 + k_2, -k_2, -k_1). \quad (A.4)$$

Далее, эффективная четырехглюонная вершина

$${}^*\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3) \equiv \Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3) + \\ + \delta\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3) \quad (A.5)$$

есть сумма голой четырехглюонной вершины

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma} = 2g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\lambda} - g^{\mu\lambda}g^{\sigma\nu} \quad (A.6)$$

и соответствующей HTL-поправки

$$\delta\Gamma^{\mu\nu\lambda\sigma}(k, k_1, k_2, k_3) = 3\omega^2_{pl} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \frac{v^\mu v^\nu v^\lambda v^\sigma}{v\cdot k + i\epsilon} \times \\ \times \left[\frac{1}{v\cdot(k + k_1) + i\epsilon}\left(\frac{\omega_2}{v\cdot k_2 - i\epsilon} - \frac{\omega_3}{v\cdot k_3 - i\epsilon}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{v\cdot(k+k_3)+i\epsilon}\left(\frac{\omega_1}{v\cdot k_1 - i\epsilon} - \frac{\omega_2}{v\cdot k_2 - i\epsilon}\right)\right]. \quad (A.7)$$

Наконец, выражение

$$
{}^*\tilde{\mathcal{D}}_{\mu\nu}(k) = -P_{\mu\nu}(k)\,{}^*\Delta^t(k) - \tilde{Q}_{\mu\nu}(k)\,{}^*\Delta^l(k) - \\ - \xi_0 \frac{k^2}{(k\cdot u)^2} D_{\mu\nu}(k) \quad \text{(A.8)}
$$

представляет собой модифицированный эффектами среды глюонный (запаздывающий) пропагатор в A_0-калибровке. Здесь «скалярные» поперечный и продольный пропагаторы имеют вид

$$
{}^*\Delta^t(k) = \frac{1}{k^2 - \Pi^t(k)}, \quad {}^*\Delta^l(k) = \frac{1}{k^2 - \Pi^l(k)}, \quad \text{(A.9)}
$$

где

$$
\Pi^t(k) = \frac{1}{2}\Pi^{\mu\nu}(k)P_{\mu\nu}(k), \quad \Pi^l(k) = \Pi^{\mu\nu}(k)\tilde{Q}_{\mu\nu}(k).
$$

Поляризационный тензор $\Pi_{\mu\nu}(k)$ в приближении жестких температурных петель имеет вид

$$
\Pi^{\mu\nu}(k) = 3\omega_{pl}^2\left(u^\mu u^\nu - \omega\int \frac{d\Omega}{4\pi}\,\frac{v^\mu v^\nu}{v\cdot k + i\epsilon}\right),
$$

а продольный и поперечный проекторы определяются, соответственно, следующими выражениями:

$$
\begin{gathered}
\tilde{Q}_{\mu\nu}(k) = \frac{\tilde{u}_\mu(k)\tilde{u}_\nu(k)}{\bar{u}^2(k)}, \\
P_{\mu\nu}(k) = g_{\mu\nu} - u_\mu u_\nu - \tilde{Q}_{\mu\nu}(k)\,\frac{(k\cdot u)^2}{k^2},
\end{gathered} \quad \text{(A.10)}
$$

где, в свою очередь, лоренц-ковариантный 4-вектор $\tilde{u}_\mu(k)$ задается формулой (5.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Б. Кадомцев, в сб. *Вопросы теории плазмы*, вып. 4, под ред. М. А. Леонтовича, Атомиздат, Москва (1964), с. 188–339.
2. Л. Коврижных, ЖЭТФ **49**, 237 (1965).
3. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **51**, 688 (1966).
4. В. А. Липеровский, В. Н. Цытович, Изв. вузов. Радиофизика **XII**, 823 (1969).
5. V. E. Zakharov, Phys. Rep. **129**, 285 (1985).
6. В. Е. Захаров, Изв. вузов. Радиофизика **XVII**, 431 (1974).
7. А. М. Балк, В. Е. Захаров, в сб. науч. тр. *Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов*, под ред. В. Г. Барьяхтара, В. Е. Захарова, В. М. Черноусенко, Наук. думка, Киев (1990), с. 417–472.
8. J.-P. Blaizot and E. Iancu, Phys. Rep. **359**, 335 (2002).
9. E. Braaten and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. B **337**, 569 (1990).
10. J.-P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. B **417**, 608 (1994).
11. Yu. A. Markov and M. A. Markova, Ann. Phys. **302**, 172 (2002).
12. Д. М. Гитман, И. В. Тютин, *Каноническое квантование полей со связями*, Наука, Москва (1986).
13. V. P. Nair, Phys. Rev. D **48**, 3432 (1993).
14. V. P. Nair, Phys. Rev. D **50**, 4201 (1994).
15. J.-P. Blaizot and E. Iancu, Nucl. Phys. B **434**, 662 (1995).
16. О. К. Калашников, В. В. Климов, ЯФ **31**, 1357 (1980).
17. А. С. Шварц, *Математические основы квантовой теории поля*, Атомиздат, Москва (1975).
18. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, Наука, Москва (1976).
19. V. I. Man'ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, and F. Zaccaria, Phys. Scripta **55**, 528 (1997).
20. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др., *Элекродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974).
21. H. A. Weldon, Phys. Rev. D **58**, 105002 (1998).
22. D. Metaxas and V. P. Nair, Int. J. Mod. Phys. A **16**, 1249 (2001).