

ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ ПРИ УНИПОЛЯРНОЙ ИНЖЕКЦИИ ЗАРЯДА В ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. А. Ильин^{}, В. Н. Александрова*

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 24 июля 2019 г.,
после переработки 24 июля 2019 г.
Принята к публикации 15 августа 2019 г.

Исследованы нелинейные режимы неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе в поле тяжести и постоянном электрическом поле при униполярной инжекции заряда с катода и нагреве сверху. Рассмотрена модель, в которой плотность инжектируемых с катода зарядов пропорциональна напряженности электрического поля в конденсаторе. При тепловом числе Рэлея $Ra = -1000$ построена бифуркационная диаграмма режимов. Исследованы различные режимы электроконвекции: стационарный режим, режим стоячих и бегущих волн. При изучении влияния увеличения нагрева сверху были обнаружены переходы между режимами: режим бегущей волны сменяется режимом стоячей волны, который переходит в режим модулированной стоячей волны.

DOI: 10.31857/S0044451020020133

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение конвекции слабопроводящих жидкостей в электрическом поле представляет интерес, потому что является способом прямого преобразования энергии электрического поля в энергию движения [1–3]. Электроконвективные движения наблюдаются в жидких диэлектриках, в которых присутствует хотя бы небольшой заряд. Электрическое поле может изменить пороги тепловой конвекции и обеспечить эффективный способ управления движением жидкостей [2]. С практической точки зрения, знание законов действия электрического поля на конвективные течения актуально в связи с проблемой эффективного управления конвекцией, тепло- и массопереносом в различных технологических ситуациях [4], например, в электрогидродинамических преобразователях, ионно-конвективных насосах и немеханических переключателях.

Несмотря на большое количество экспериментальных и теоретических работ, остаются откры-

тыми вопросы, связанные с возникновением и эволюцией электроконвективных движений [4]. Существуют различные механизмы зарядообразования в жидкостях [4]. В работе [5] проведено исследование влияния электрокондуктивного механизма зарядообразования на нелинейные режимы электроконвекции. Инжекционный механизм зарядообразования связан с инжекцией зарядов с поверхности электрода. В силу сложности проблемы существует много моделей, описывающих инжекцию заряда в слабопроводящей жидкости. В работе [6] проведено исследование электроконвекции слабопроводящей жидкости в случае униполярной автономной инжекции заряда с постоянной плотностью заряда на аноде.

Ряд экспериментальных данных описывается моделью, в которой инжектируемый с катода заряд зависит от напряженности электрического поля в конденсаторе [7, 8]. В работах [7–10] используется такая модель инжекции заряда с катода. Согласно этой модели плотность инжектируемого в жидкость заряда на катоде прямо пропорциональна напряженности электрического поля в конденсаторе. В настоящей работе в рамках этой модели рассматривается электроконвекция неоднородно нагретой слабопроводящей жидкости в

^{*} E-mail: ilin1@psu.ru

горизонтальном конденсаторе в поле тяжести и в постоянном электрическом поле при униполярной инжекции заряда. Используется электрогидродинамическое приближение (магнитными эффектами по сравнению с электрическими пренебрегают). Инжектируемые с поверхности катода заряды движутся через слой жидкости, изменяя в ней распределение электрического поля. Диффузия заряда не учитывается. Считается, что время диффузии заряда пренебрежимо мало по сравнению с характерным гидродинамическим временем и временем релаксации заряда.

В статье [7] в аналогичной постановке проведено исследование линейной устойчивости изотермической слабопроводящей жидкости, нагрев жидкости в ней не рассматривался. В работе [8] исследовано влияние подвижности носителей заряда на критические параметры задачи, изучены нелинейные режимы электроконвекции при нагреве сверху. В [9] проведен линейный анализ устойчивости равновесия слабопроводящей жидкости при нагреве снизу и сверху, приведены предварительные результаты исследования нелинейных режимов электроконвекции при нагреве снизу. В работе [10] в одномерном случае проведено исследование динамики переноса заряда в изотермической жидкости в модулированном электрическом поле и в двумерном случае исследованы нелинейные режимы в неизотермической жидкости при нагреве снизу в постоянном электрическом поле. В работе [11] исследованы амплитудно- и фазовомодулированные бегущие волны в бинарных смесях при модулированном нагреве. В работах [9, 10] обнаружено, что при нагреве снизу существуют только стационарные режимы, волновые режимы не найдены. В настоящей работе продолжено исследование нелинейных волновых режимов электроконвекции при нагреве сверху.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечный плоский горизонтальный слой вязкой несжимаемой слабопроводящей жидкости в вертикальном постоянном электрическом поле и поле тяжести с ускорением свободного падения \mathbf{g} . Ось x направлена вдоль нижней границы слоя, ось z — перпендикулярна границам слоя. Два плоских электрода лежат в плоскостях $z = 0$ и $z = h$ (рис. 1), h — толщина слоя.

Идеально тепло- и электропроводные пластины конденсатора нагреты до разной температуры — $T(0) = \Theta$, $T(h) = 0$. Здесь T — температура, отсчи-

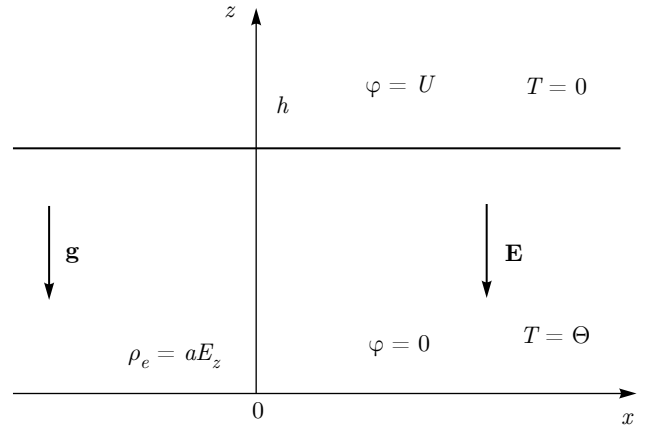


Рис. 1. Геометрия задачи

тываемая от температуры верхнего электрода, Θ — характерная разность температур. Случай $\Theta > 0$ соответствует нагреву снизу ($\Theta < 0$ — нагреву сверху). На катоде (нижнем электроде) потенциал равен нулю $\varphi(0) = 0$, на аноде (верхнем электроде) — $\varphi(h) = U$. Здесь U — напряжение электрического поля.

Под действием электрического поля в узком слое вблизи катода в результате электрохимических реакций образуется заряд. Плотность свободных зарядов у катода пропорциональна нормальной составляющей вектора напряженности поля $\rho_e = aE_z$, где a — коэффициент, характеризующий степень инжекции заряда. Инжектированный заряд под действием поля движется в глубь жидкости. Двигаясь к аноду, заряд может увлекать за собой жидкость, вызывая электроконвективное течение. Движение жидкости и свободных зарядов в слое описывается системой уравнений электрогидродинамики:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) &= -\nabla p + \rho \nu_0 \Delta \mathbf{v} + \rho_e \mathbf{E} + \rho \mathbf{g}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T &= \chi \Delta T, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div}(\rho_e \mathbf{v} - b \rho_e \mathbf{E}) &= 0, \\ \text{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \rho = \rho_0 (1 - \beta T), \\ \text{div}(\varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}) &= \rho_e, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \end{aligned} \tag{1}$$

где ρ — массовая плотность жидкости; \mathbf{v} — вектор скорости жидкости; p — давление; ν_0 — коэффициент кинематической вязкости; ρ_e — плотность свободных зарядов; χ — коэффициент температуропроводности; β — коэффициент теплового расширения жидкости; ε — диэлектрическая проницаемость среды; ε_0 — электрическая постоянная; b — подвижность зарядов; \mathbf{E} — напряженность, φ — потенциал поля. Считается, что диэлектрическая проница-

емость среды ε и коэффициент подвижности ионов b не зависят от температуры и поля.

Границы слоя считаются твердыми, непроницаемыми, на них выполняются условия прилипания — скорость равна нулю:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 0, \\ \rho_e = aE_z = -a \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad T = \Theta, \\ z = h: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = U, \quad T = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Используем безразмерные переменные на основе масштабов времени — время вязкой диссипации $[t] = h^2/\nu_0$, расстояния — расстояние между электродами $[\mathbf{r}] = h$, скорости — $[\mathbf{v}] = \nu_0/h$, потенциала — $[\varphi] = U$, давления — $[p] = \rho\nu_0^2/h^2$, температуры — $[T] = \Theta$, плотности заряда — $[\rho_e] = \varepsilon\varepsilon_0 U/h^2$.

После приведения к безразмерному виду система уравнений (1) с граничными условиями (2) следующая [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \Delta \mathbf{v} - \frac{T_e^2}{M^2} \rho_e \nabla \varphi + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} T \gamma, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T &= \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \quad \Delta \varphi + \rho_e = 0, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho_e &= \frac{T_e}{M^2} (\rho_e^2 - \nabla \varphi \cdot \nabla \rho_e), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\gamma = (0, 0, 1)$, p — превышение давления над гидростатическим. Граничные условия переписутся в виде

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 0, \\ \rho_e = -A \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad T = 1, \\ z = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \varphi = 1, \quad T = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь введены безразмерные параметры — тепловое число Рэлея Ra , электрические параметры T_e и M , число Прандтля Pr и параметр инжекции A :

$$\begin{aligned} \text{Ra} = \frac{g\beta\Theta h^3}{\nu_0\chi}, \quad T_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 U}{b\rho\nu_0}, \quad M = \frac{1}{b} \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\rho}}, \\ \text{Pr} = \frac{\nu_0}{\chi}, \quad A = \frac{ah}{\varepsilon\varepsilon_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассматриваются плоские возмущения $\mathbf{v} = (u, 0, w)$ и $\partial/\partial y = 0$. Для исследования нелинейных режимов электроконвекции вводится функция тока ψ и вихрь скорости Φ :

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Phi = (\text{rot } \mathbf{v})_y = -\Delta \psi. \quad (6)$$

Вследствие малой инжекции нелинейную задачу можно решать в безындукционном приближении, в котором предполагается, что изменение распределения заряда, возникающее в результате появления электроконвективных структур, по сравнению с равновесным, не вызывает заметного изменения потенциала электрического поля [7]. Система (3) в безындукционном приближении примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \\ &= \Delta \Phi - E \frac{T_e^2}{M^2} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \rho_e}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \rho_e}{\partial x} &= \frac{T_e}{M^2} \left(\rho_e^2 + E \frac{\partial \rho_e}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T, \end{aligned} \quad (7)$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial x = 0, \\ \rho_e = AE, \quad T = 1, \\ z = 1: \quad \psi = 0, \quad \partial \psi / \partial z = 0, \quad T = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

На боковых границах для всех искомым функций выполняются условия периодичности.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Нелинейные режимы электроконвекции при нагреве сверху

Система (7), (8) аппроксимировалась конечно-разностными отношениями. Эволюционные уравнения решались по явной схеме, конвективные слагаемые в уравнении для заряда и температуры аппроксимировались разностями «против потока» [8]. Для уравнения переноса тепла использовались центральные разности. Для удобства работы с условиями периодичности к сетке добавлялись два вертикальных ряда. Вихрь скорости на горизонтальных границах вычислялся по формуле Тома. Для решения уравнения Пуассона использовался метод последовательной верхней релаксации.

Для вычислений выбиралась прямоугольная ячейка с пространственными размерами $L_z = 1$, $L_x = 2$. Горизонтальная ячейка соответствует волновому числу $k = 3.14$. Размер сетки брался 21×41 узел. Следующие параметры фиксировались: число Прандтля $\text{Pr} = 10$, электрический параметр $M = 14.14$ ($M^2 = 200$), параметр инжекции заряда $A = 0.15$. Вычислялись зависимости максимальной функции тока от параметра T_e . Большой нагрев

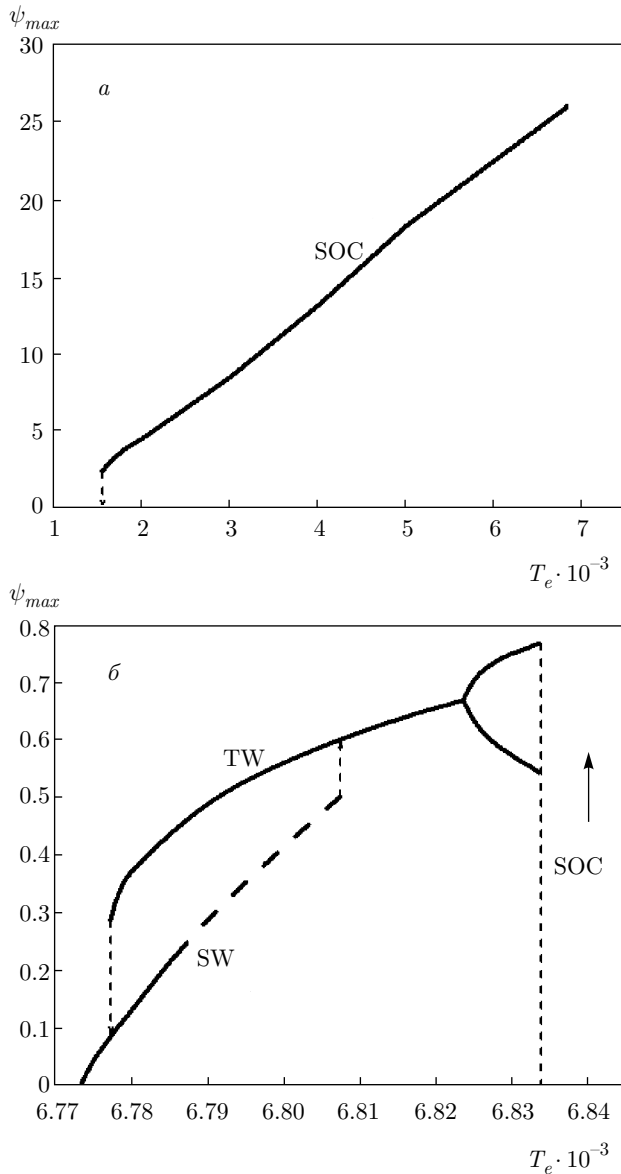


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма: зависимость максимальной функции тока от электрического параметра T_e : *a* — режим стационарной конвекции (SOC); *б* — режим колебательной конвекции (TW — режим бегущих волн, SW — режим стоячих волн)

сверху ($Ra = -2500$) рассмотрен в работе [8]. Нагрев снизу изучен в работах [9, 10]. В настоящей работе рассмотрен умеренный нагрев сверху: $Ra = -1000$.

В результате вычислений были обнаружены два режима электроконвекции, один из которых колебательный, а другой — стационарный. Между режимами наблюдались гистерезисные переходы. На рис. 2 представлена бифуркационная диаграмма — зависимость максимальной функции тока от электрического параметра T_e с учетом вычислений ме-

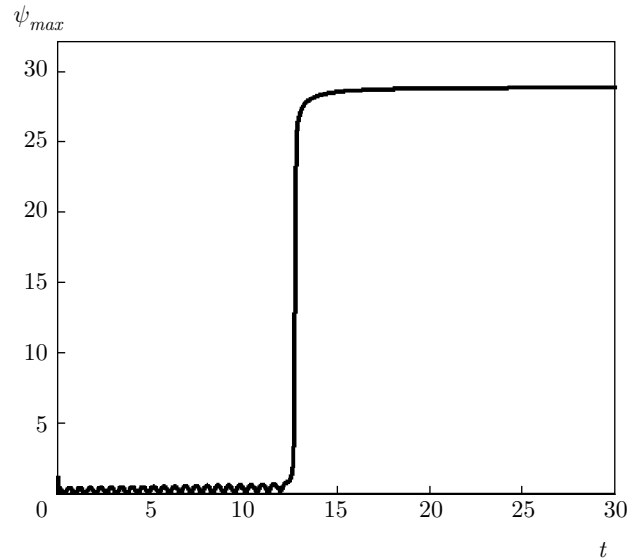


Рис. 3. Стационарная электроконвекция: $Ra = -1000$, $T_e = 6830$

тодом продолжения по параметру. При постоянных начальных условиях возмущения либо колебательным образом затухают к равновесию или колебательному режиму, либо резко возрастают и в некоторый момент времени происходит переход в режим стационарной конвекции.

При постоянных начальных условиях и значениях $T_e > 6821$ возмущения колебательным образом возрастают и происходит переход в режим стационарной конвекции (рис. 3). Максимальное значение функции тока, а также функция тока в фиксированной точке после переходного процесса принимают постоянные значения. При этом в ячейке образуются два зеркально-симметричных конвективных вала (рис. 4*a*), которые смещены вверх относительно центра слоя. Это связано с действием кулоновских сил, поскольку за счет инъекции заряда с катода жидкость в целом имеет отрицательный заряд, который стремится к аноду. Данный режим характеризуется интенсивным движением жидкости с довольно сложной структурой распределения заряда (рис. 4*б*).

При вычислении методом продолжения по параметру было обнаружено, что стационарный режим начинает существовать при $T_e = 1549$. Это означает, что при $T_e < 1549$ в системе устанавливается равновесное распределение переменных. Если электрический параметр изменяется в пределах от 1549 до 6774, то в системе будет либо равновесие, либо стационарная конвекция. При $T_e \geq 6775$ в системе наблюдаются два колебательных режима: бегущих

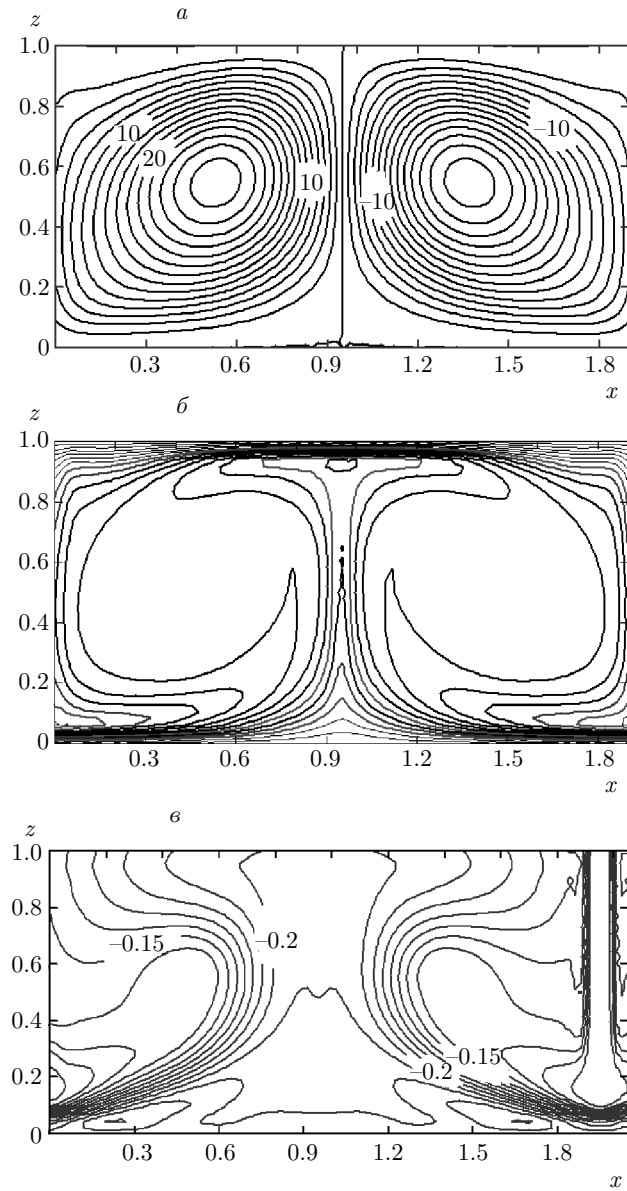


Рис. 4. а) Изолинии функции тока; б) изолинии функции температуры; в) изолинии функции плотности электрического заряда для стационарного режима: $Ra = -1000$, $T_e = 6900$

(TW) или стоячих (SW) волн (рис. 2б).

Режим стоячих волн (SW, рис. 2б) устойчив при $6775 \leq T_e \leq 6786$. Для него характерна осцилляция максимального значения функции тока от нуля до некоторой постоянной величины, при этом значение функции тока в фиксированной точке периодически меняет знак. В ячейке находятся два конвективных вала, которые периодически меняют направление вращения и не смещаются вдоль оси x . При $6787 \leq T_e \leq 6820$ стоячая волна имеет неустой-

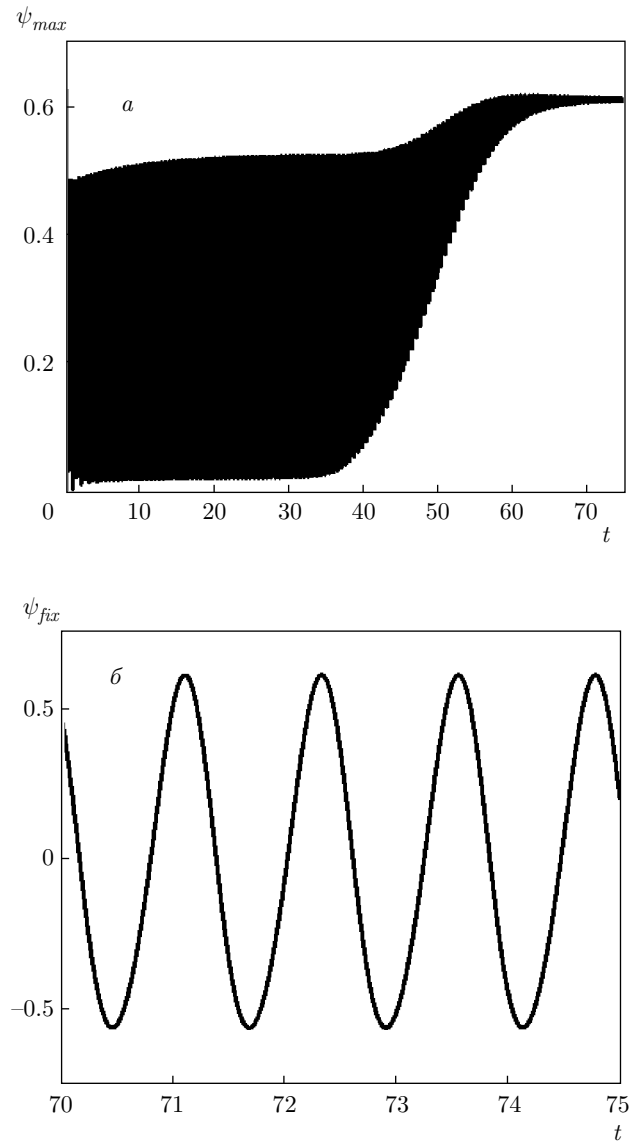


Рис. 5. Колебательный режим электроконвекции: $Ra = -1000$, $T_e = 6810$; а — эволюция максимального значения функции тока с течением времени; б — функция тока в фиксированной точке

чивый характер (штриховая линия SW на рис. 2б). Это означает, что после длительного переходного процесса стоячая волна переходит в бегущую волну (TW).

На рис. 5а представлена эволюция максимального значения функции тока в конвективной ячейке для режима бегущих волн при $T_e = 6810$. На начальной стадии наблюдается режим стоячей волны, который увеличивает свою амплитуду. Фазовая скорость волны вдоль оси x равна нулю. Далее происходит переходный процесс, при котором режим стоячей волны сменяется режимом бегущей волны:

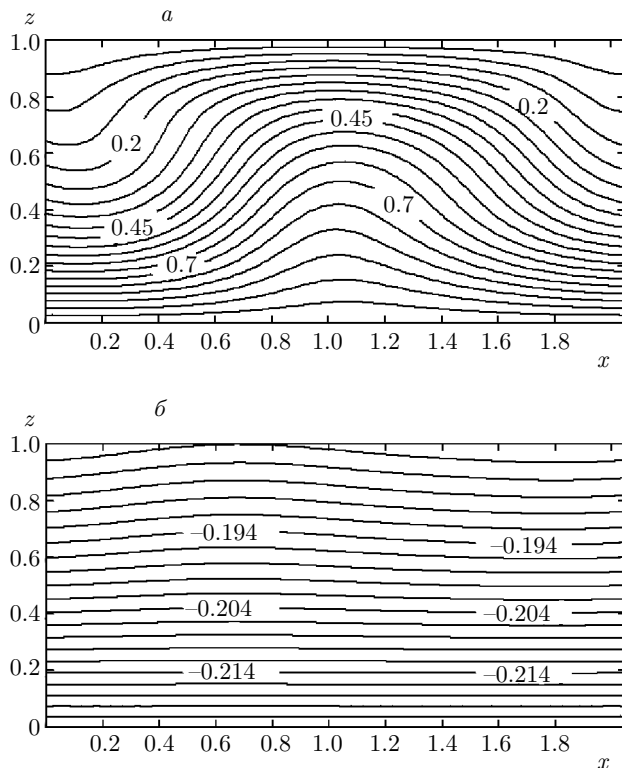


Рис. 6. а) Изолинии функции температуры; б) изолинии функции плотности электрического заряда для режима бегущих волн: $Ra = -1000$, $T_e = 6810$

появляется движение электроконвективных структур вдоль горизонтали. В конце переходного процесса максимальное значение функции тока принимает постоянное значение, в то время как значение функции тока в фиксированной точке ячейки периодически меняется (рис. 5б). В отличие от режима стационарной конвекции, в режиме бегущей волны поле заряда имеет простую структуру (рис. 6б), а интенсивность конвективного движения на два порядка меньше, чем в случае стационарной конвекции. Если сопоставить рис. 4б и 6а, то можно заметить, что поток тепла в стационарном режиме больше, чем в колебательном.

При использовании метода продолжения по параметру было обнаружено, что при увеличении электрического параметра T_e интенсивность течения резко возрастает. Бегущая волна теряет устойчивость и система переходит в режим стационарной конвекции при $T_e = 6835$. При уменьшении параметра T_e бегущие волны сохраняют устойчивость до значения $T_e = 6777$, после чего происходит жесткий переход к режиму стоячих волн. Начиная со значения $T_e = 6826$ режим продолжает быть бегущей волной, но амплитуда максимального значения

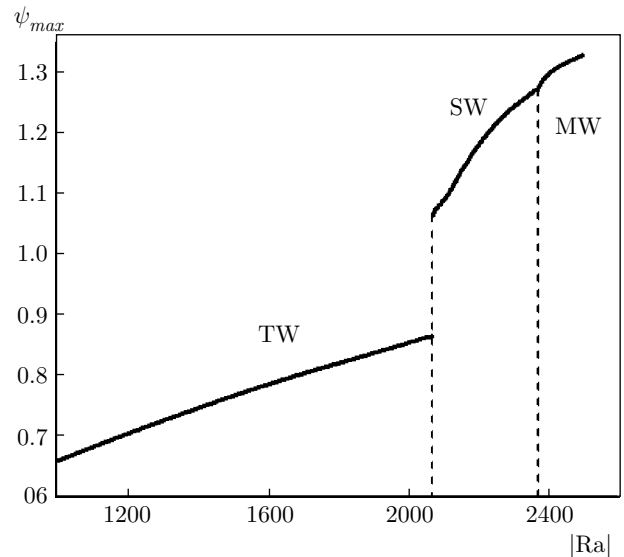


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма: зависимость максимального значения функции тока от степени нагрева сверху при $T_e = 6820$ (TW — режим бегущих волн, SW — режим стоячих волн, MW — режим модулированных стоячих волн)

функции тока не принимает стационарного значения, а начинает колебаться в некотором интервале величин. С ростом параметра T_e этот интервал значений растет, а затем происходит переход к режиму стационарной конвекции.

3.2. Исследование влияния интенсивности нагрева на смену режимов

В статье [8] изучена электроконвекция в слабопроводящей жидкости с более интенсивным нагревом ($Ra = -2500$). В этом исследовании между бегущими волнами и стационарным режимом был найден еще один колебательный режим — модулированных стоячих волн. При $Ra = -1000$ данный режим не был обнаружен. Возникло предположение, что на появление режима модулированных стоячих волн влияет степень нагрева жидкости. Было решено провести изучение смены режимов при фиксированном значении электрического параметра $T_e = 6820$ в зависимости от теплового числа Рэлея.

На рис. 7 представлена бифуркационная диаграмма смены режимов — график зависимости максимального значения функции тока от интенсивности нагрева сверху. Выяснилось, что при увеличении по модулю теплового числа Рэлея от $Ra = -1000$ режим бегущих волн (TW, рис. 7) наблюдается до $Ra = -2072$. При этом в системе максимальное зна-

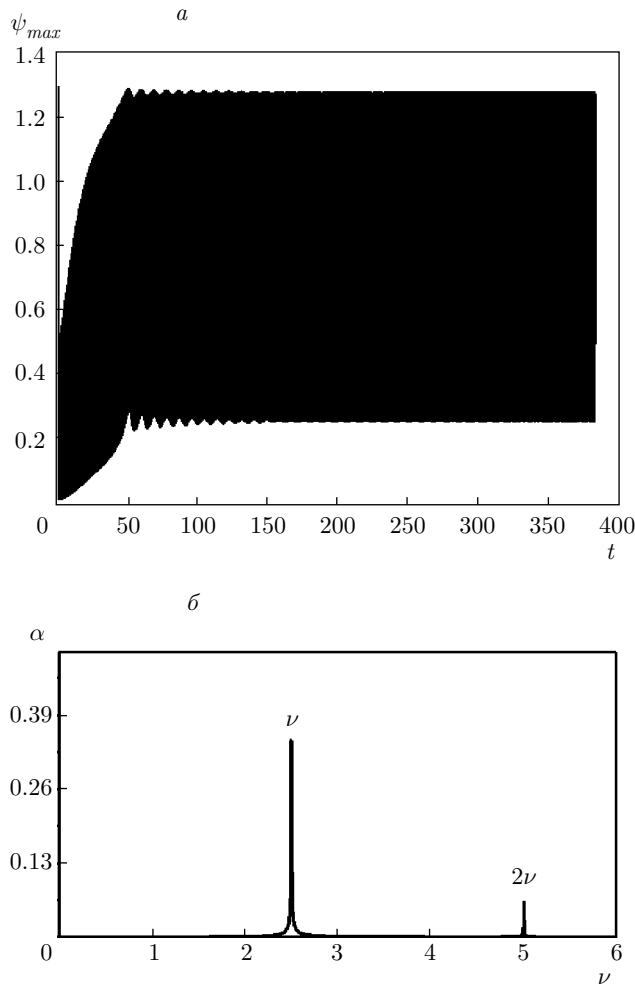


Рис. 8. а) Эволюция максимального значения функции тока в режиме стоячих волн при $Ra = -2370$; б) фурье-спектр колебаний максимального значения функции тока

чение функции тока принимает стационарное значение, изменяется значение функции тока в фиксированной точке ячейки, качественно поведение системы остается неизменным при разных температурах нагрева. Далее при $Ra = -2073$ появляются стоячие волны (SW, рис. 7), которые при $Ra = -2375$ (MW, рис. 7) сменяются режимом модулированных стоячих волн. С увеличением по модулю теплового числа Рэлея амплитуда колебаний функции тока возрастает. При переходе от режима бегущих волн к стоячим волнам максимальное значение функции тока претерпевает скачок. А смена модулированных волн стоячими происходит непрерывно.

На рис. 8а представлена эволюция максимального значения функции тока в конвективной ячейке для режима стоячих волн при $Ra = -2370$. После

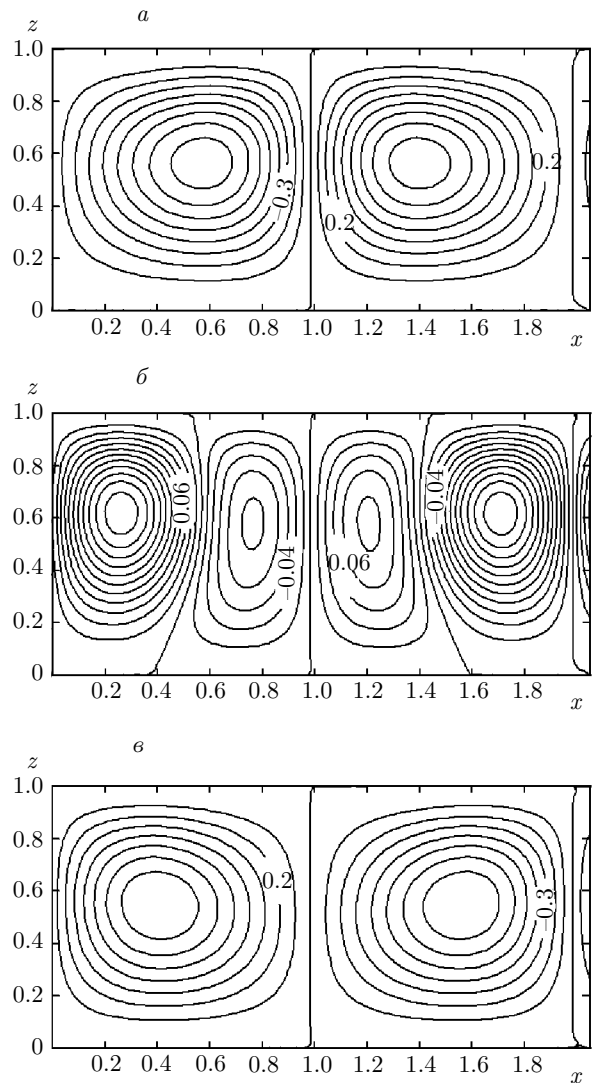


Рис. 9. а) Изолинии функции тока в момент времени $t = 198$; б) $t = 198.5$; в) $t = 199$ для стоячей волны: $Ra = -2183$, $T_e = 6820$

переходного процесса максимальное значение функции тока колеблется в некотором интервале значений. Значение функции тока в фиксированной точке ячейки периодически меняется, как в случае бегущих волн, изменяется только амплитуда этих колебаний. В фурье-спектре наблюдается лишь главная частота и ее вторая гармоника (рис. 8б).

Амплитуда этих колебаний увеличивается с ростом нагрева. Фазовая скорость волны вдоль оси x равна нулю. Однако в пределах ячейки можно наблюдать перемещение вихрей вдоль горизонтального направления. Структура в ячейке может быть как двухвихревая, так и четырехвихревая (рис. 9). Связано это с конкуренцией первой и второй пространственных гармоник [8].

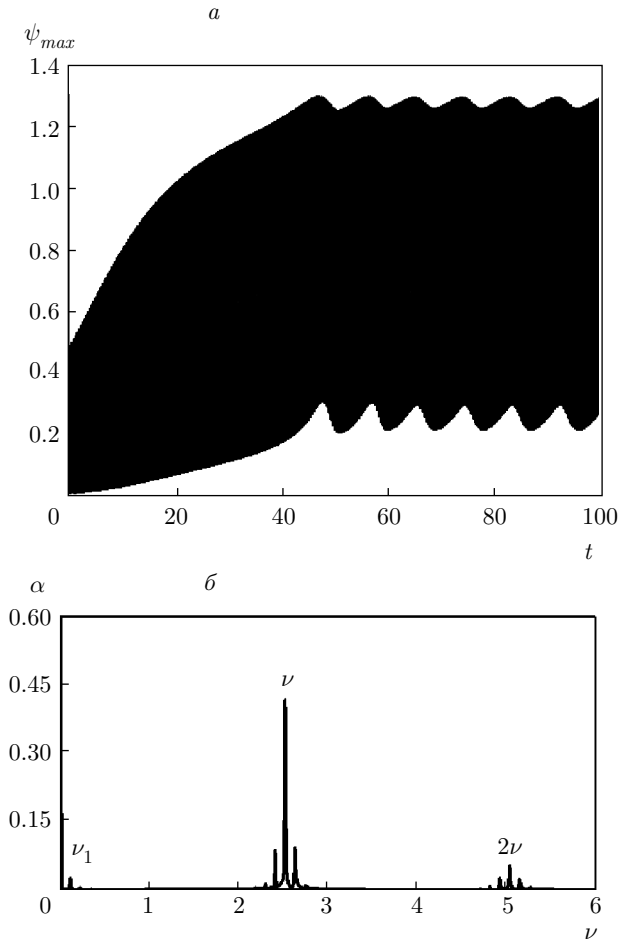


Рис. 10. *а*) Эволюция максимального значения функции тока в режиме модулированных стоячих волн при $Ra = -2400$; *б*) фурье-спектр колебаний максимального значения функции тока

Модуляция амплитуды колебаний максимального значения функции тока и колебаний функции тока в фиксированной точке ячейки появляется, когда число Рэлея принимает значение $Ra = -2375$. На рис. 10*а* представлена эволюция максимального значения функции тока в конвективной ячейке для режима модулированных стоячих волн при $Ra = -2400$. Движение жидкости как целого вдоль оси x отсутствует. В спектре Фурье колебаний максимального значения функции тока (рис. 10*б*) кроме основной частоты ν и ее второй гармоники 2ν имеются собственная частота ν_1 , с которой происходит модуляция, и комбинированные частоты $(\nu - \nu_1)$, $\nu + \nu_1$ и др.).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование нелинейных режимов электроконвекции неизотермической сла-

бопроводящей жидкости в горизонтальном конденсаторе в гравитационном и постоянном электрическом полях при униполярной инжекции заряда при нагреве сверху и инжекции заряда с катода.

Изучены нелинейные режимы электроконвекции, один из которых колебательный, а другой стационарный. Построена бифуркационная диаграмма найденных режимов при $Ra = -1000$. Обнаружено, что режимам стоячих или бегущих волн соответствует почти упорядоченное распределение заряда в конвективной ячейке. При больших значениях электрического параметра T_e устанавливается режим стационарной конвекции, который характеризуется сложным распределением заряда и большей интенсивностью вихрей.

Также было рассмотрено влияние увеличения степени нагрева жидкости на смену режимов при $T_e = 6820$. Обнаружено, что при слабом нагреве сверху в системе устанавливается режим бегущих волн. При $|Ra| = 2073$ на смену ему приходит режим стоячих волн, который при $|Ra| = 2375$ сменяется режимом модулированных стоячих волн. Расчеты проведены с постоянными начальными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Остроумов, *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей: Физические основы электрогидродинамики*, Наука, Москва (1979).
2. С. Б. Афанасьев, Ю. К. Стишков, *Электрофизические процессы в жидкостях и газах: учебно-методическое пособие*, Санкт-Петербург (2007).
3. Ю. К. Стишков, *Электрофизические процессы в жидкостях при воздействии сильных электрических полей*, Юстицинформ, Москва (2019).
4. А. И. Жакин, *УФН* **182**, 495 (2012).
5. Н. Н. Картавых, Б. Л. Смородин, В. А. Ильин, *ЖЭТФ* **148**, 178 (2015).
6. А. В. Тараут, Б. Л. Смородин, *ЖЭТФ* **142**, 403 (2012).
7. А. Н. Верещага, в сб.: *Гидродинамика и процессы теплопереноса*, УрО АН СССР, Свердловск (1989), с. 42.
8. А. Н. Мордвинов, Б. Л. Смородин, *ЖЭТФ* **141**, 997 (2012).
9. В. А. Ильин, А. Н. Мордвинов, Д. А. Петров, *ЖЭТФ* **147**, 181 (2015).
10. В. А. Ильин, *ЖТФ* **87**, 5 (2017).
11. В. L. Smorodin and M. Luecke, *Phys. Rev. E* **79**, 026315 (2009).