

# ДОПЛЕРОВСКИЕ ГЕТЕРОДИННЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫБРОСА ЧАСТИЦ С ПОВЕРХНОСТИ УДАРНО-НАГРУЖЕННЫХ ОБРАЗЦОВ

*А. В. Андрияш*<sup>a</sup>, *С. А. Дьячков*<sup>a,b</sup>, *В. В. Жаховский*<sup>a,b</sup>, *Д. А. Калашников*<sup>c</sup>,  
*А. Н. Кондратьев*<sup>a\*</sup>, *С. Е. Куратов*<sup>a</sup>, *А. Л. Михайлов*<sup>c</sup>, *Д. Б. Rogozkin*<sup>a,d</sup>,  
*А. В. Федоров*<sup>c</sup>, *С. А. Финюшин*<sup>c</sup>, *Е. А. Чудаков*<sup>c</sup>

<sup>a</sup> *Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова*  
*127055, Москва, Россия*

<sup>b</sup> *Объединенный институт высоких температур Российской академии наук*  
*125412, Москва, Россия*

<sup>c</sup> *Российский федеральный ядерный центр –*  
*Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики*  
*607188, Саров, Нижегородская обл., Россия*

<sup>d</sup> *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»*  
*115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 4 июня 2019 г.,  
после переработки 13 ноября 2019 г.  
Принята к публикации 14 ноября 2019 г.

Представлены результаты доплеровских гетеродинных измерений выброса пылевых частиц при ударно-волновом нагружении металлических образцов. Эксперименты проводились на образцах из олова и свинца заданной толщины и качества обработки поверхности. Для условий, близких к экспериментальным, методом SPH (smooth particle hydrodynamics) выполнено прямое численное моделирование процесса выброса массы с поверхности ударно-нагруженных образцов. Определены поверхностная плотность и начальное распределение объемной плотности выброшенной массы по скорости. На основе этих результатов рассчитана временная зависимость профиля объемной плотности при расширении образовавшегося пылевого облака в воздушную среду. По спектральным данным доплеровских гетеродинных измерений с помощью подхода, основанного на транспортном уравнении для корреляционной функции рассеянного поля, восстановлены основные параметры распределения пылевых частиц по скорости, поверхностная плотность пыления и др. При соответствующем выборе разброса пылевых частиц по размерам удается описать наблюдаемую в экспериментах временную динамику спектров, обусловленную торможением пыли в воздухе. Восстановленные из эксперимента значения массы выброшенного вещества согласуются с результатами SPH-моделирования.

DOI: 10.31857/S0044451020030037

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие для изучения динамических процессов, сопровождающих выход ударной волны на поверхность материалов, наряду с традиционными методами измерений физических характеристик продуктов разрушения (пьезодатчика-

ми, фольгами Эсея, теневой протоно- и рентгенографией и др.) [1–16], стали широко использоваться доплеровские гетеродинные измерения скорости (photon doppler velocimetry, PDV) [17] (см. также [9, 10, 12–16, 18–31]). Этот метод позволяет одновременно регистрировать скорости движения нескольких или даже большого числа объектов, попадающих в область зондирования. Именно такая ситуация реализуется при выходе ударной волны на поверхность образца, когда происходит кумулятивный

\* E-mail: an.kondratev@physics.msu.ru

выброс твердотельных или жидко-капельных микрочастиц из неоднородностей поверхности.

При измерении скорости гетеродинным методом используется смещение двух волн, различающихся по частоте [17, 18]. Одна, опорная, волна представляет собой сигнал на исходной частоте, другая, отраженная от движущегося объекта, имеет частоту, смещенную из-за эффекта Доплера. Интерференция волн в детекторе приводит к временным биениям интенсивности. По частоте биений, которая совпадает с доплеровским сдвигом  $\omega = 2(v/c)\omega_0$  ( $v$  — скорость движения объекта,  $c$  — скорость света,  $\omega_0$  — частота зондирующего излучения), определяется значение скорости в заданный момент времени.

При отражении от многочастичной системы, такой как пылевой выброс с поверхности ударно-нагруженного образца, гетеродинный сигнал состоит из большого числа гармоник с различными амплитудами и фазами. Результаты обработки временной развертки биений с помощью дискретного фурье-преобразования собираются в так называемые спектрограммы [17–19] — двумерные распределения на плоскости «частота (или скорость) — время», где каждому значению фурье-спектра ставится в соответствие точка с яркостью, пропорциональной спектральной амплитуде. Такое представление результатов PDV-измерений является наглядным, но в случае отражения от многочастичной системы недостаточно информативным для количественного анализа данных эксперимента. В ситуации, когда отраженный сигнал формируется многократно рассеянными волнами, спектральное распределение уже нельзя однозначно связать со скоростями отдельных частиц и требуется более сложная статистическая интерпретация экспериментальных данных.

Для анализа данных доплеровских гетеродинных измерений в работе [28] был предложен подход, основанный на использовании транспортного уравнения для корреляционной функции рассеянного поля. Такой подход позволяет связать доплеровский спектр обратнорассеянного сигнала с исходными параметрами пылевых выбросов и открывает новые возможности для восстановления по спектральным PDV-данным различных физических характеристик пыления ударно-нагруженных образцов (поверхностной плотности пыления, распределения пылевых частиц по скоростям и размерам и др.).

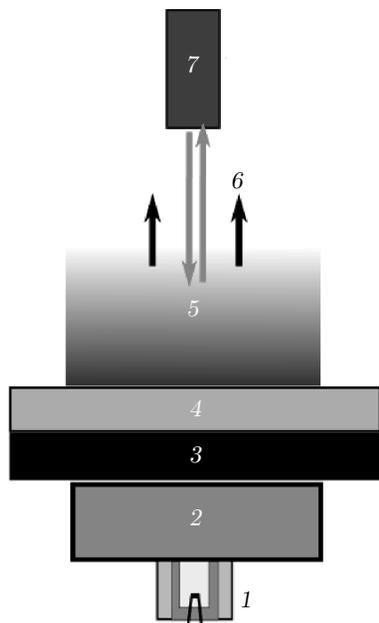
Ниже представлены результаты применения подхода работы [28] к анализу новых экспериментальных данных по выбросу частиц при ударном воздействии на образцы свинца (Pb) и олова (Sn) и сравнения восстановленных из эксперимента характери-

стик пыления с результатами численного моделирования выброса массы методом сглаженных частиц (smoothed particle hydrodynamics, SPH [32]). Доплеровские гетеродинные измерения выброса пыли проводились при ударно-волновом нагружении образцов Pb и Sn заданной толщины и качества обработки поверхности (шероховатость  $R_z = 7$  мкм и  $R_z = 20$  мкм для образцов соответственно Pb и Sn). В зависимости от схемы ударного воздействия давление в ударной волне варьировалось от 13.5 до 23 ГПа для Pb и составляло 16 ГПа для Sn. В экспериментах продемонстрирована качественная зависимость процесса пыления от давления в ударной волне.

Для условий, близких к экспериментальным, проведено прямое численное SPH-моделирование процесса выброса массы с поверхности ударно-нагруженных образцов. Выполнены расчеты поверхностной плотности и начального распределения объемной плотности выброшенной массы по скорости в зависимости от параметров профиля неровности поверхности образца. На основе этих результатов рассчитана временная эволюция распределения объемной плотности пылевых частиц при их торможении в воздухе. Для теоретического расчета доплеровского спектра обратнорассеянного сигнала разработан численный метод решения транспортного уравнения для корреляционной функции поля, обобщающий методы работ [28, 30] с учетом перераспределения частиц по скоростям и координатам в процессе торможения. Входящие в решение оптическая толщина и параметры начального профиля объемной плотности пылевого выброса, распределение частиц по размерам определены из условия наилучшего согласия теоретически рассчитанного спектра с зависящими от времени спектральными данными доплеровских гетеродинных измерений. Восстановленные таким способом из эксперимента значения поверхностной плотности пыления находятся в согласии с результатами SPH-моделирования.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТ

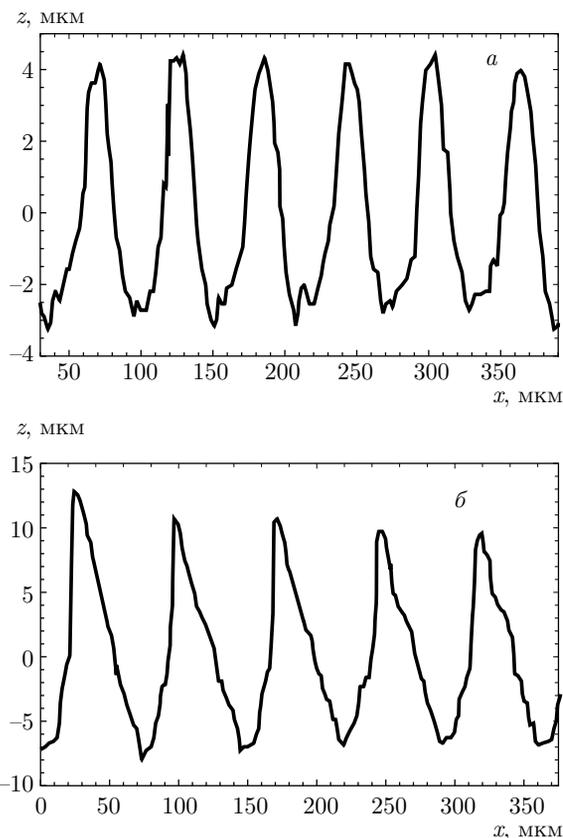
При ударном воздействии на образец происходит разрушение его поверхности, которое сопровождается кумулятивным выбросом микрочастиц. В результате перед образцом возникает баллистически расширяющееся облако металлической пыли. В настоящей работе для исследования пыления ударно-нагруженных образцов использовались доплеровские гетеродинные измерения скорости движения фрагментов разрушения поверхности. Схе-



**Рис. 1.** Схема эксперимента: 1 — капсюль электродетонатора; 2 — пластиковое ВВ; 3 — плоский ударник (в экспериментах с образцами Pb — стальная пластина диаметром 30 мм, толщиной 2 мм (13.5 ГПа) и 1.7 мм (23 ГПа)); 4 — исследуемый образец (пластина Pb диаметром 30 мм и толщиной 1.7 мм, пластина Sn диаметром 40 мм и толщиной 2.4 мм); 5 — движущиеся фрагменты разрушения поверхности; 6 — зондирующий луч; 7 — коллиматор

ма микросборки, с помощью которой выполнялись экспериментальные исследования, проиллюстрирована на рис. 1. Ударная волна в исследуемом образце формируется при воздействии на него ударником различной толщины из стали или непосредственно взрывчатым веществом (ВВ).

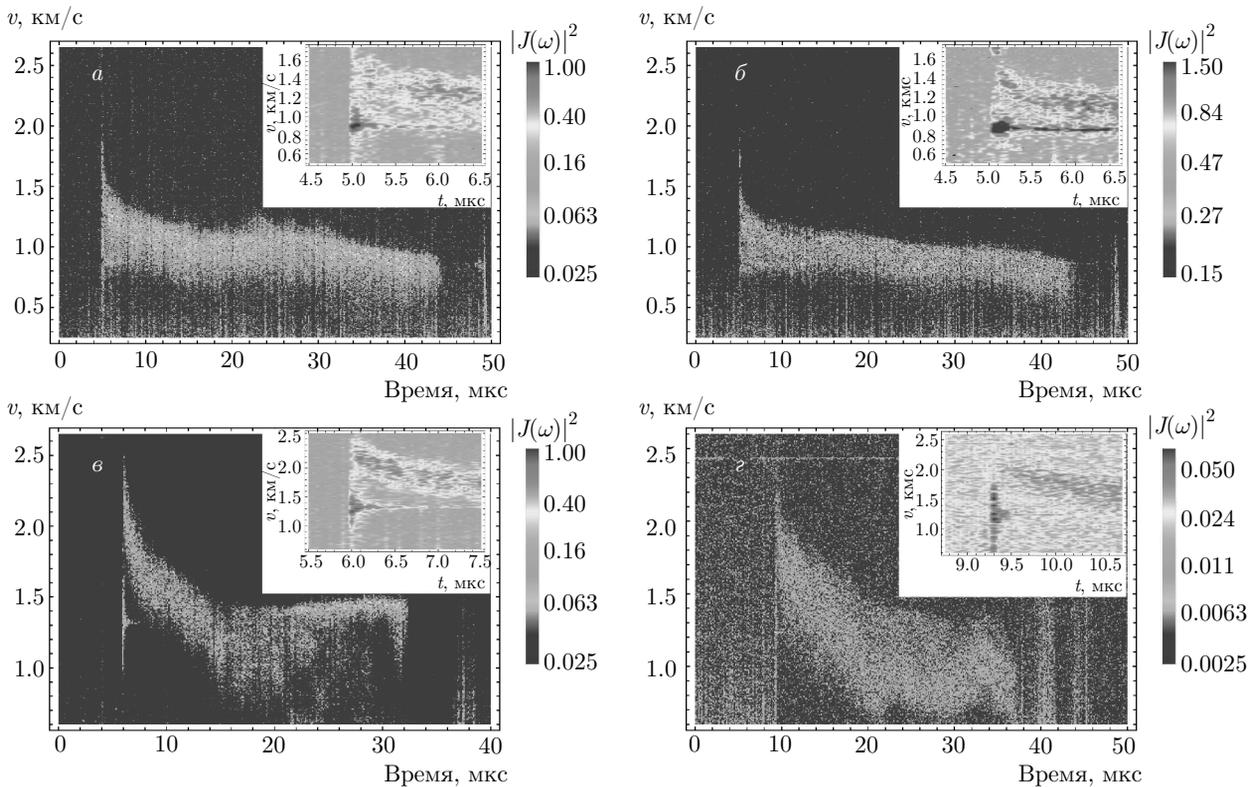
В экспериментах исследовалось пыление образцов из свинца и олова в воздушной среде при нормальных условиях. Пластины свинца имели толщину 1.7 мм, шероховатость поверхности  $R_z = 7$  мкм, пластины олова — толщину 2.4 мм, шероховатость поверхности  $R_z = 20$  мкм. Примеры профилограмм поверхности исследуемых образцов показаны на рис. 2. Исследование пыления ударно-нагруженных образцов проводилось PDV-методом в составе комплекса гетеродин-интерферометр [25–27]. Границы полосы пропускания фотодиода и осциллографа позволяли регистрировать скорости до 10 км/с. В экспериментах измерялась временная зависимость фототока, возникающего при интерференции опорного и обратнорассеянного от пылевого облака волновых полей. Полный временной интервал измерений составлял 100 мкс. Временные биения фототока



**Рис. 2.** Профили поверхности образцов Pb (а) и Sn (б)

PDV-сигнала на этом интервале описываются массивом из  $5 \cdot 10^6$  точек. Для получения частотного спектра PDV-сигнала временной интервал был разделен на равные части — «окна». В каждом окне проводилось дискретное преобразование Фурье. В результате был получен набор PDV-спектров, отвечающих различным моментам времени разлета пылевого облака. Результаты измерений скорости движения продуктов разрушения ударно-нагруженных образцов показаны в виде спектрограмм на рис. 3, на которых изображен квадрат амплитуды спектра гетеродинных биений  $|J(\omega)|^2$ .

Значение давления в ударной волне при выходе на свободную поверхность напрямую связано с материалом образца, его толщиной, а также со схемой возбуждения ударной волны (ударниками различной толщины или непосредственно ВВ). Использовалась схема с инициированием ВВ в одной точке от электродетонатора. Диаметр ВВ в экспериментах с образцами Pb составлял 15 мм, толщина варьировалась от 10 до 20 мм. В эксперименте с образцом Sn диаметр и толщина ВВ равнялись 10 мм. Расстояние от коллиматоров до исследуемой поверхности



**Рис. 3.** (В цвете онлайн) Спектрограммы движения продуктов разрушения ударно-нагруженных образцов Pb (канал 1 (а), канал 2, давление в ударной волне 13.5 ГПа (б), давление в ударной волне 23 ГПа (в) и Sn (давление в ударной волне 16 ГПа (г)). На вставках показаны участки спектрограмм, отвечающие первым 1.5 мкс после выхода ударной волны на поверхность

составляло 40 мм. Давление в ударной волне определялось по скорости свободной поверхности [33], значение которой оценивалось по положению пика в фурье-спектре в момент времени, соответствующий выходу ударной волны на поверхность образца. Для свинцовых пластин давление в двух опытах со стальными ударниками толщиной 2 мм и 1.7 мм составляло соответственно 13.5 ГПа и 23 ГПа. В опыте с образцом Sn ударная волна возбуждалась непосредственно ВВ, и давление в ударной волне составляло 16 ГПа. При таких давлениях можно считать, что образцы после нагружения оставались в твердом состоянии.

Согласно результатам, представленным на рис. 3, в экспериментах зарегистрированы сигналы как от выбрасываемых с поверхности пылевых частиц, так и от свободной поверхности. Значения скорости свободной поверхности ( $v_{fs}$ ) и оценки максимальной скорости движения частиц ( $v_{max}$ ) для трех описанных выше опытов приведены в табл. 1, в которой также представлены соответствующие значения давления в ударной волне и

**Таблица 1.** Параметры образцов и результаты PDV-измерений

№ опыта	Вещество	$R_z$ , мкм	$\lambda$ , мкм	$P$ , ГПа	$v_{fs}$ , км/с	$v_{max}$ , км/с
1	Pb	7	60	13.5	0.88	1.50
2	Pb	7	60	23.0	1.32	2.30
3	Sn	20	80	16.0	1.23	2.10

характеристики поверхности исследуемых образцов: средняя глубина неровностей  $R_z$  и среднее расстояние между их вершинами — «длина волны»  $\lambda$ . Погрешность измерения скорости  $v_{fs}$  методом PDV в экспериментах не превышала 20 м/с.

На рис. 3а,б представлены результаты регистрации скорости свободной поверхности и облака частиц в опыте 1 ( $P = 13.5$  ГПа) для двух каналов регистрации, соответствующих зондированию точек на поверхности, разнесенных на 5 мм. Плотность потока частиц от участка поверхности, соответствующую

щего каналу 2, оказывается ниже плотности потока в канале 1. Поэтому в канале 2 отчетливо виден сигнал от свободной поверхности на сравнительно большом временном участке в начале записи регистрации. На спектрограмме опыта 2 ( $P = 23$  ГПа), представленной на рис. 3в, сигнал от свободной поверхности виден в течение первой микросекунды с момента выхода ударной волны на поверхность образца. Затем плотное облако пылевых частиц экранирует свободную поверхность, и сигнал от нее исчезает.

Максимальные значения скорости пыли оценивались по фурье-спектру в первые моменты после выхода ударной волны на поверхность и составляли в первых двух опытах соответственно около 1.5 и 2.3 км/с. Отношения  $v_{max}/v_{fs}$  в этих опытах оказываются близкими, что можно объяснить одинаковым качеством обработки поверхности.

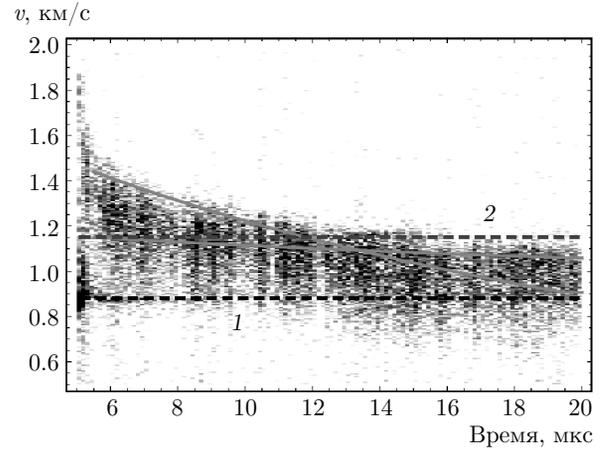
В опыте 3 с образцом олова, нагруженным до давления  $P = 16$  ГПа, слабый сигнал от свободной поверхности виден менее 1 мкс (рис. 3г). Максимальная скорость пылевых частиц составляла приблизительно 2.1 км/с. Регистрируемую максимальную скорость пыли при полете к коллиматору можно оценить как 1.3 км/с.

Тот факт, что на спектрограммах при малых временах после выхода ударной волны на поверхность образца удается различить сигнал от свободной поверхности (см. вставки на рис. 3), можно объяснить неоднородным в направлении, параллельном поверхности, распределением пыли. Выбросы пылевых частиц в виде плоских струй перемежаются относительно прозрачными областями [34, 35]. Поэтому, если ось зондирования образует малый угол с направлением выбросов, пылевые частицы в первые моменты не экранируют сигнал от свободной поверхности (наиболее отчетливо этот эффект наблюдается в опыте с образцом Pb, 13.5 ГПа, канал 2). Со временем поток пылевых частиц закрывает поверхность, и сигнал от нее пропадает.

По наклону начальных участков спектрограмм можно сделать оценку характерных размеров отдельных частиц, возникающих в процессе разрушения поверхности при ударно-волновом нагружении. Такая оценка основана на зависимости торможения частиц в воздухе от их размера вследствие гидродинамического сопротивления [36],

$$\frac{dv}{dt_m} = -\frac{3}{4} \frac{C_D \rho_g}{\rho_0 d} \Delta v^2, \quad (1)$$

где  $t_m$  — время движения,  $\Delta v = v - v_g$  — скорость движения частицы относительно газа,  $v_g$  — скорость



**Рис. 4.** Наложение временных зависимостей скорости частиц  $v(t_m)$  для различных  $v_0$  на спектрограмму опыта 1 (образец Pb, 13.5 ГПа, канал 1). Размер частиц  $d = 2.3$  мкм. Скорости свободной поверхности  $v_{fs} = 0.88$  км/с (линия 1) и ударной волны в воздухе  $v_{sh} = 1.15$  км/с (линия 2)

газа,  $d$  — диаметр частицы,  $\rho_0$  — плотность материала частицы,  $\rho_g$  — плотность газа. Коэффициент сопротивления среды  $C_D$  зависит от числа Рейнольдса  $Re = \rho_g(v - v_g)d/\mu_g$ , где  $\mu_g$  — динамическая вязкость среды [36, 37]. Наложение кривых  $v(t_m)$  для частиц размером  $d = 2.3$  мкм с различной начальной скоростью  $v_0$  на верхнюю границу спектрограммы опыта 1 (канал 1) проиллюстрировано на рис. 4. Такой способ позволяет, подбирая значения  $d$ , определить характерный размер частиц в пылевом выбросе. Для опытов 1, 2 и 3 размеры частиц можно оценить соответственно как 2.3 мкм, 1.5 мкм и около 3 мкм.

Как следует из показанных на рис. 3 спектрограмм, после нескольких первых микросекунд сигнал от лидирующих микрочастиц облака кумулятивной пыли из-за их сильного торможения исчезает. В результате для зондирующего излучения открывается часть пылевого облака, состоящая из частиц, движущихся медленнее ударной волны в воздухе и поэтому испытывающих относительно слабое торможение. Сравнение спектрограмм, отвечающих опытам 1 и 2, свидетельствует о том, что с ростом давления в ударной волне увеличивается доля выброшенных с поверхности пылевых частиц, движущихся с относительно большими скоростями (со скоростями, превышающими скорость ударной волны в воздухе,  $v_{sh}$ ).

### 3. МОДЕЛЬ СРЕДЫ

Для анализа данных PDV-измерений и восстановления по этим данным параметров пылевых вы-

бросов необходимо иметь представления об основных закономерностях пыления ударно-нагруженных образцов. Сведения о них можно получить на основе экспериментальных данных, полученных различными контактными методами (с помощью пьезодатчиков, фольг Эсея и др.) [2–6, 9–16], аналитических расчетов [38, 39], а также данных численного моделирования методами молекулярной динамики и SPH-методом [34, 35, 40–42]. В отличие от молекулярной динамики гидродинамическое SPH-моделирование позволяет определить при заданных условиях эксперимента (давление в ударной волне, профиль шероховатости поверхности образцов) абсолютные значения таких характеристик пылеобразования, как максимальная скорость пылевых частиц, распределение объемной плотности по скорости, поверхностная плотность пыления.

В первом приближении можно считать, что пылевое облако представляет собой плоский слой частиц, движущихся без столкновений с определенным разбросом по скоростям [3–6, 10, 12]. Временная эволюция распределения объемной плотности вещества в пылевом облаке описывается автомодельной зависимостью [6]

$$\rho(z, t_m) = \frac{\rho_a}{v_{fs} t_m} F\left(\frac{z}{v_{fs} t_m}\right), \quad (2)$$

где  $\rho_a$  — поверхностная плотность пыления,  $v_{fs}$  — скорость свободной поверхности, координата  $z$  — расстояние от ее исходного положения. Время  $t_m$  отсчитывается от момента выхода ударной волны на поверхность образца. Функция  $F(x)$  предполагается нормированной на единицу.

Наряду с объемной плотностью (2) во многих работах [2–6, 10, 12] используется так называемая динамическая поверхностная плотность

$$\rho_a(z, t_m) = \int_z^\infty dz' \rho(z', t_m), \quad (3)$$

которая является функцией отношения  $z/v_{fs} t_m$  (или  $v/v_{fs}$ ). При  $z = v_{fs} t_m$  величина (3) дает значение поверхностной плотности  $\rho_a$  выброшенной массы.

Прямые измерения (с помощью пьезодатчиков, фольг Эсея и др.) и численное моделирование пыления металлических образцов под воздействием ударной волны позволяют приблизительно установить вид функции  $F(x)$  [3–6, 10, 12, 35, 40]. Согласно этим данным, плотность вещества в пылевом облаке резко падает с ростом скорости частиц, которая может превышать скорость свободной поверхности в

1.5–2 раза. Экспериментальные данные часто аппроксимируют экспоненциальной зависимостью [12]

$$F(x) = \beta \exp[-\beta(x-1)], \quad (4)$$

где параметр  $\beta$  принимает в зависимости от условий эксперимента значения порядка 5–20 [12, 29]. Наибольшие отклонения от зависимости (4) наблюдаются при скоростях, близких к максимальной скорости движения частиц и к скорости свободной поверхности [10, 35, 40].

Соотношение (2) справедливо при движении фрагментов разрушения в вакууме. При разлете пылевого облака в газовой среде это соотношение применимо только в первые моменты времени после выхода ударной волны на поверхность, когда можно пренебречь эффектом торможения частиц.

Ниже приведены результаты SPH-расчетов основных характеристик пылевых выбросов для конкретных условий экспериментов, описанных в предыдущем разделе.

### 3.1. Моделирование начальной стадии процесса пыления

Пределы текучести исследуемых материалов (свинца и олова) на три порядка меньше, чем амплитуда реализуемых в эксперименте ударных волн. Поэтому будем предполагать, что имеет место только пластическое течение материала образца. Движение вещества при численном моделировании будем описывать уравнениями сохранения массы, импульса и энергии:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (6)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{P}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{U}, \quad (7)$$

где  $\rho$  — плотность вещества,  $\mathbf{U}$  — его скорость,  $P$  — давление,  $e$  — внутренняя энергия единицы объема. Так как процесс пыления характеризуется высокими скоростями движения вещества, силы вязкости и поверхностного натяжения не оказывают заметного влияния на течение. Ниже эти силы не учитываются.

Чтобы замкнуть систему уравнений (5)–(7), необходимо задать уравнение состояния  $P = P(\rho, e)$ . В данной работе воспользуемся уравнением состояния в форме Ми–Грюнаузена [43]:

$$P - P_r = \gamma \rho (e - e_r), \quad (8)$$

**Таблица 2.** Характеристики свинца и олова, используемые при SPH-моделировании

Характеристика материала	Свинец	Олово
Начальная плотность $\rho_0$ , кг/м <sup>3</sup>	11350	7206
Коэффициент Грюнайзена $\gamma$	1.7	1.7
Коэффициент $a$	1.26	1.55
Скорость звука $c$ , км/с	2.58	2.37

где  $P_r(\rho)$  и  $e_r(\rho)$  — опорные кривые давления и внутренней энергии,  $\gamma$  — коэффициент Грюнайзена. При плотности вещества выше начальной ( $\rho_0/\rho < 1$ ) состояние вещества описывается ударной адиабатой вида  $u_s = c + au_p$ , где  $u_s$  — скорость ударной волны,  $u_p$  — скорость вещества,  $c$  — скорость звука,  $a$  — численный коэффициент. В этом случае опорные кривые давления и энергии можно записать в виде [44]

$$P_r = \rho_0 c^2 \frac{1 - \rho_0/\rho}{[1 - a(1 - \rho_0/\rho)]^2}, \quad e_r = \frac{P_r}{\rho_0} \frac{1 - \rho_0/\rho}{2}. \quad (9)$$

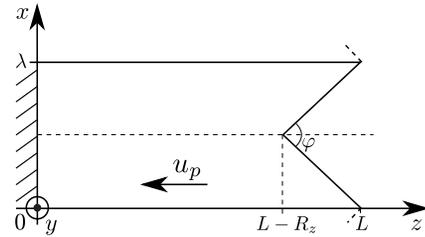
При плотности вещества ниже начальной ( $\rho_0/\rho > 1$ ), т. е. при растяжении вещества, предполагается, что давление линейно связано с удельным объемом:

$$P_r = \rho_0 c^2 (1 - \rho_0/\rho). \quad (10)$$

Значения констант, входящих в соотношения (8)–(10), приведены в табл. 2.

У образцов, используемых в экспериментах, структура неоднородностей поверхности представляет собой систему параллельных бороздок. Параметры шероховатости характеризуются средним расстоянием между бороздками  $\lambda$  и их глубиной  $R_z$ . При выходе ударной волны на такую поверхность из углублений выходит ансамбль струй с разными скоростями [1–16]. Это отчетливо видно на PDV-спектрограммах. Причиной разброса скоростей струй является разброс значений  $\lambda$  и  $R_z$  и, соответственно, угла раствора гофрировки  $\varphi = 2 \arctg(\lambda/2R_z)$ . Распределение выброшенной массы по скорости получается усреднением по ансамблю струй и отличается от соответствующего распределения для одиночной струи.

Постановка задачи для SPH-моделирования проиллюстрирована на рис. 5. Используются периодические граничные условия по осям  $x$  и  $y$ , образцу задается скорость  $u_p$  в направлении жесткой стенки. Угол гофрировки варьируется от некоторого значения  $\varphi_{min}$  до  $\varphi_{max}$  в соответствии с наблюдаемым диапазоном скоростей струй. Микроскопичес-



**Рис. 5.** Постановка задачи для расчетов методом SPH: образец толщиной  $L$  с гофрированной поверхностью ударяется о жесткую стенку со скоростью  $u_p$ . В результате удара возникает ударная волна, которая распространяется к гофрированной поверхности

кая структура поверхности в реальных образцах может варьироваться. Поэтому рассмотрены два варианта моделирования: величина  $R_z$  фиксирована, а  $\lambda$  распределена случайно; величина  $\lambda$  фиксирована, а  $R_z$  распределена случайно.

Скорость  $u_p$  удара образца о стенку подбиралась так, чтобы скорость свободной поверхности  $v_{fs} \simeq 2u_p$ , и амплитуда ударной волны соответствовали экспериментальным значениям. Поскольку скорости струй определяются углами раствора гофрировки, диапазон последних был подобран так, чтобы скорости струй соответствовали наблюдаемым в эксперименте на начальной стадии (длительностью менее 1 мкс) процесса пыления.

Для решения уравнений (5)–(7) в настоящей работе используется бессеточный лагранжев метод SPH (см., например, работу [32] и Приложение А).

Результаты расчета процесса формирования струй через 0.5 мкс после удара образца о жесткую стенку показаны на рис. 6. Как следует из расчетов, скорости струй определяются углом раствора гофрировки, т. е. соотношением между  $R_z$  и  $\lambda$ , а количество выброшенной массы существенно зависит только от  $\lambda$ .

Скорости истечения струй  $v_{sp}$  — практически линейные функции угла раствора  $\varphi$  (см. рис. 7),

$$v_{sp} = [1 + \alpha(180^\circ - \varphi)]v_{fs}, \quad (11)$$

где численный коэффициент  $\alpha$  слабо зависит от давления в ударной волне и материала образца. Линейная аппроксимация дает хорошие результаты для небольшой амплитуды ударной волны. При более сильном воздействии становятся заметными нелинейные эффекты.

Расчитанные профили объемной плотности выброшенной массы показаны на рис. 6б. При  $v/v_{fs} >$

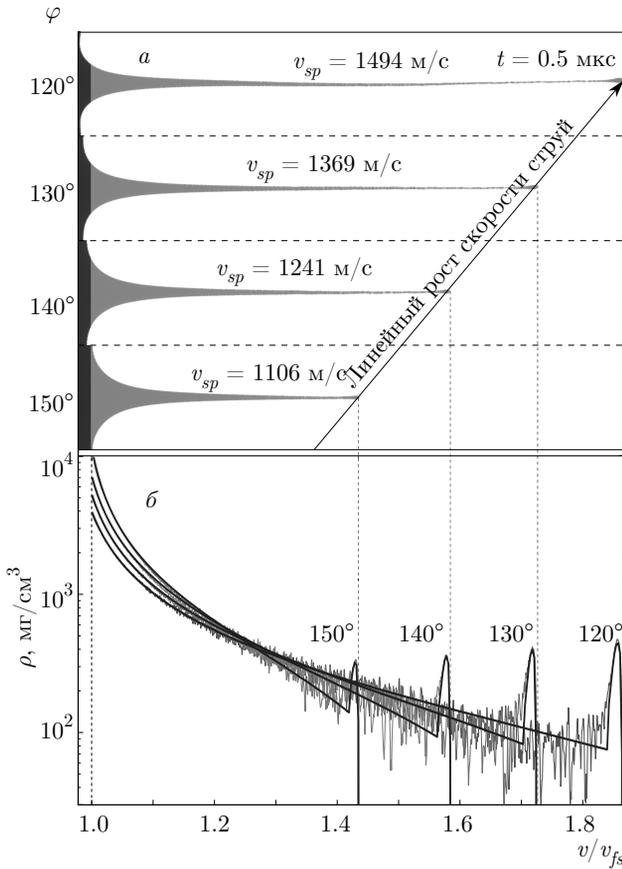


Рис. 6. (В цвете онлайн) а) Результаты расчетов пыления свинца для опыта 1 (13.5 ГПа и  $u_p = 0.4$  км/с) для углов от  $\varphi$  от 120° до 150° на момент времени 0.5 мкс. б) Результаты SPH-расчетов профилей объемной плотности пыления  $\rho(v/v_{fs})$ . Аналитическая аппроксимация (12) показана сплошными черными линиями

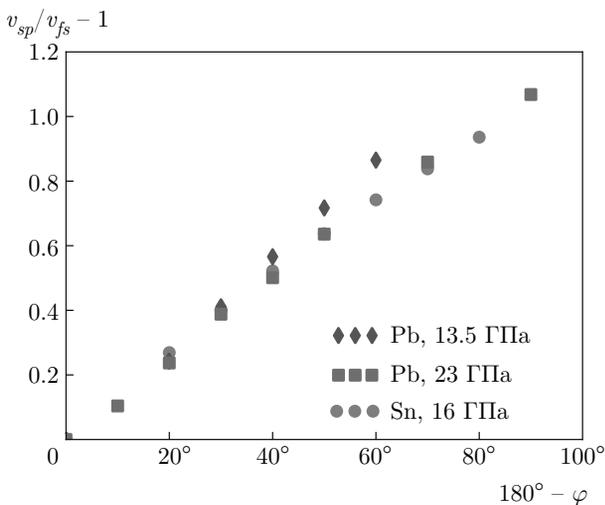


Рис. 7. Зависимости скоростей струй от угла гофрировки

> 1 их можно аппроксимировать зависимостью

$$\rho(x) = B + A \frac{x_{sp} - 1 + C}{x - 1 + C} + \delta\rho(x), \quad (12)$$

где  $x = v/v_{fs}$ ,  $x_{sp} = v_{sp}/v_{fs}$ ,  $x < x_{sp}$ . Слагаемое  $\delta\rho(x)$  в (12) описывает утолщение в головной части струи,

$$\delta\rho(x) = M \sqrt{\frac{x_{sp} - x}{\Delta x}} \exp\left(-\frac{(x_{sp} - x)^2}{2S^2\Delta x^2}\right), \quad (13)$$

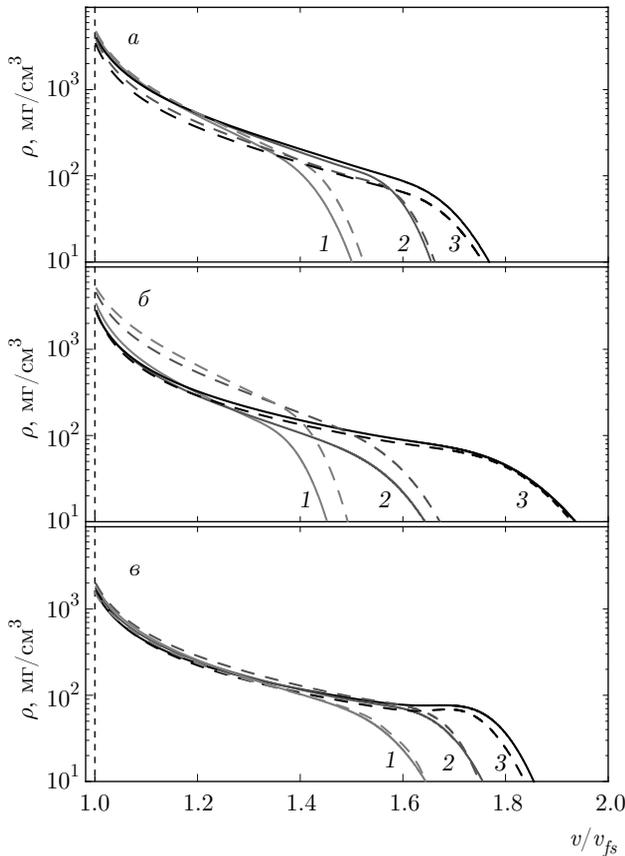
где  $\Delta x$  — ширина утолщения конца струи на оси скорости. Заметим, что во всех расчетах с высокой точностью можно предполагать, что скорость и координата связаны линейно:  $v = z/t_m$ .

Для каждого расчета при заданном значении угла  $\varphi$  (или  $R_z$  и  $\lambda$ ) подбирались коэффициенты  $A, B, C, M, S$ . Далее по ним строились соответствующие полиномиальные интерполяции  $A(\varphi), B(\varphi), C(\varphi), M(\varphi), S(\varphi)$  внутри выбранного диапазона углов  $[\varphi_{min}, \varphi_{max}]$ . В результате профиль распределения массы  $\rho(x, \varphi)$  может быть получен для любого угла  $\varphi$  внутри этого диапазона. Далее аналитическая функция  $\rho(x, \varphi)$  (12) усреднялась в предположении, что разброс значений угла  $\varphi$  подчиняется гауссову распределению с центром при  $\varphi_0 = (\varphi_{max} + \varphi_{min})/2$  с дисперсией  $\sigma = 0.17(\varphi_{max} - \varphi_{min})$ . В результате такого усреднения было определено распределение массы в ансамбле струй.

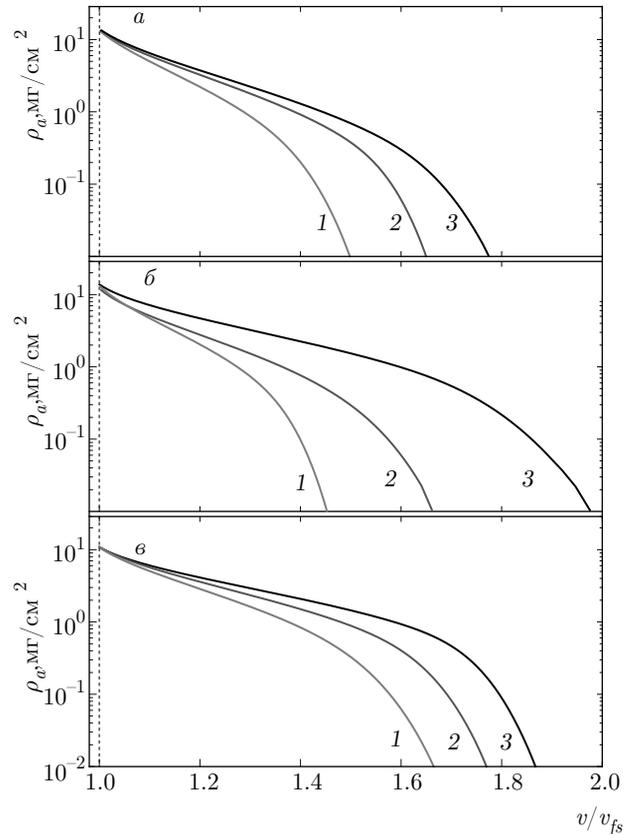
Результаты расчетов усредненных таким образом профилей объемной плотности  $\bar{\rho}(x)$  массы для опытов 1, 2 и 3 представлены на рис. 8. Видно, что утолщения на концах струй исчезают с усреднением по ансамблю. Также стоит отметить, что существенной разницы между средними профилями, полученными при вариации  $R_z$  или  $\lambda$ , не наблюдается, поэтому на практике для моделирования ансамбля может использоваться вариация какой-либо одной из этих величин.

Выбор диапазона углов для построения средних профилей ансамбля струй заметно влияет на наблюдаемую максимальную скорость частиц. На примере олова показано, что усреднение в диапазоне углов от 100° до 140° дает профиль с наибольшей скоростью; при этом головные части струй с утолщением дают заметный вклад в среднюю плотность. Это приводит к небольшому изгибу кривой зависимости  $\bar{\rho}(x)$ . Усреднение в диапазонах 110°–150° и 120°–160° полностью подавляет этот эффект.

Интеграл от усредненной объемной плотности  $\bar{\rho}(x)$  дает значение динамической поверхностной плотности пыления (см. соотношение (3)). Результаты интегрирования  $\bar{\rho}(x)$  для трех рассматриваемых



**Рис. 8.** (В цвете онлайн) Результаты расчета профиля объемной плотности  $\bar{\rho}(x)$  ансамбля струй для опытов 1 (а), 2 (б) и 3 (в) при фиксированных значениях  $\lambda$  (сплошные кривые) и  $R_z$  (штриховые). Диапазоны углов усреднения для опыта 1 (Pb, 13.5 ГПа): кривые 1 —  $140^\circ\text{--}160^\circ$ ; 2 —  $130^\circ\text{--}150^\circ$ ; 3 —  $120^\circ\text{--}150^\circ$ ; опыта 2 (Pb, 23 ГПа): 1 —  $140^\circ\text{--}160^\circ$ ; 2 —  $120^\circ\text{--}160^\circ$ ; 3 —  $90^\circ\text{--}150^\circ$ ; опыта 3 (Sn, 16 ГПа): 1 —  $120^\circ\text{--}160^\circ$ ; 2 —  $110^\circ\text{--}150^\circ$ ; 3 —  $100^\circ\text{--}140^\circ$ . Расчеты относятся к моменту времени 0.5 мкс после выхода ударной волны на поверхность



**Рис. 9.** (В цвете онлайн) Результаты расчета профиля динамической поверхностной плотности  $\bar{\rho}_a(x)$  ансамбля струй для опытов 1 (а), 2 (б) и 3 (в) при фиксированном значении  $\lambda$ . Диапазон углов усреднения и поверхностная плотность выброшенной массы для опыта 1 (Pb, 13.5 ГПа): кривые 1 —  $140^\circ\text{--}160^\circ$ ; 2 —  $130^\circ\text{--}160^\circ$ ; 3 —  $120^\circ\text{--}150^\circ$ ,  $\bar{\rho}_a(v/v_{fs} = 1) = 13.7 \text{ мг/см}^2$ ; опыта 2 (Pb, 23 ГПа): 1 —  $140^\circ\text{--}160^\circ$ ; 2 —  $120^\circ\text{--}160^\circ$ ; 3 —  $90^\circ\text{--}150^\circ$ ,  $\bar{\rho}_a(v/v_{fs} = 1) = 12.1 \text{ мг/см}^2$ ; опыта 3 (Sn, 16 ГПа): 1 —  $120^\circ\text{--}160^\circ$ ; 2 —  $110^\circ\text{--}150^\circ$ ; 3 —  $100^\circ\text{--}140^\circ$ ,  $\bar{\rho}_a(v/v_{fs} = 1) = 10.8 \text{ мг/см}^2$ . Расчеты относятся к моменту времени 0.5 мкс после выхода ударной волны на поверхность

опытов представлены на рис. 9. Численные значения полной поверхностной плотности  $\rho_a$  выброшенной массы приведены в подписи к рисунку.

Полученные начальные профили распределения плотности далее используются для моделирования торможения пылевого облака в газовой среде, а также для расчета доплеровского спектра сигнала обратного рассеяния.

### 3.2. Распределение частиц по размерам

Чтобы связать плотностные характеристики пылевых выбросов с их оптическими характеристиками, необходимо иметь информацию о размерах пылевых частиц, на которые на временах  $t_m \sim$

$\sim 0.3\text{--}0.5$  мкс [34, 35] распадаются струи выброшенной из образца массы. Определение размеров пылевых частиц выходит за рамки SPH-моделирования [45]. В относительных единицах профиль распределения по размерам удастся получить с помощью МД [34, 35]. Наиболее полную информацию о распределении частиц по размерам на сегодняшний день дают прямые оптические измерения (голография [46, 47], рассеяние Ми [48, 49]).

Для заданных экспериментальных условий (материала образца, профиля неровностей поверхности, давления в ударной волне и др.) характерные размеры фрагментов разрушения (микрочастиц ку-

мулятивной природы, осколков поверхности и др.) могут зависеть от их относительной скорости  $v/v_{fs}$  [46]. Большинство имеющихся данных о размерах относится к наиболее быстрым, лидирующим частицам, скорость движения которых заметно превышает скорость движения свободной поверхности  $v/v_{fs} > 1.1$  [7, 11, 46, 48, 50]. Средние размеры таких частиц обычно не превышают нескольких микрометров [46, 48]. О размерах более крупных фрагментов разрушения, которые движутся вблизи свободной поверхности и могут давать [10, 12] заметный вклад в полную массу пылевого выброса, имеются только данные качественного характера [7, 46].

Распределение частиц по размерам [7, 11, 46, 50] можно аппроксимировать распределением Юнга [51]

$$n(d) = Ad^{-\alpha},$$

где  $d$  — размер частицы,  $d_{min} < d < d_{max}$ , или лог-нормальной зависимостью [47, 49]

$$n(d, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 d}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \ln^2 \frac{d}{d_m}\right), \quad (14)$$

где  $d_m$  — медианный размер,  $\sigma$  — ширина распределения.

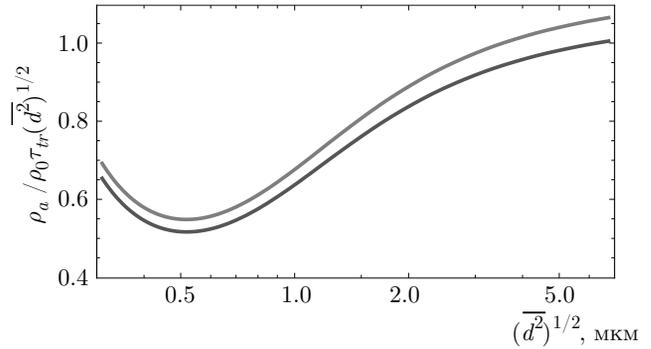
Степенную зависимость часто используют для описания «хвоста» распределения при сравнительно больших  $d$  [38, 47]. Показатель  $\alpha$  может варьироваться в достаточно широких пределах [35, 47, 50] от  $\alpha = 1.5$  [35] до  $\alpha = 5.6$  [50].

Лог-нормальное распределение с шириной  $\sigma = 0.2-1.0$  хорошо описывает экспериментальные данные по распределению частиц по размерам при  $v/v_{fs} > 1.1$  [47, 49]. Средние размеры пылевых частиц могут варьироваться в интервале 1–10 мкм в зависимости от условий эксперимента и характеристик образца, в частности от угла гофрировки неровностей поверхности [49].

В предположении, что расстояние между частицами превышает их размер и рассеяние зондирующей волны на отдельных частицах происходит независимо, задавая распределение частиц по размерам, можно связать оптические характеристики пылевого облака с его объемной и поверхностной плотностями [30]. Рассеивающую способность пылевого облака удобно характеризовать его транспортным коэффициентом рассеяния [51–53], который выражается через объемную плотность пыления соотношением

$$\sigma_{tr}(z, t_m) = \frac{\overline{\sigma_s(1-g)}}{\overline{m}} \rho(z, t_m), \quad (15)$$

где  $\overline{\sigma_s(1-g)}$  — транспортное сечение рассеяния, усредненное по размерам частиц,  $\sigma_s$  — сечение рас-



**Рис. 10.** Отношение поверхностной плотности пыления к транспортной оптической толщине пылевого слоя как функция среднеквадратичного размера частиц. Результаты расчета для Pb (нижняя кривая) и Sn (верхняя кривая) с лог-нормальным распределением частиц по размерам ( $\sigma = 0.5$ ). Длина волны излучения 1.55 мкм

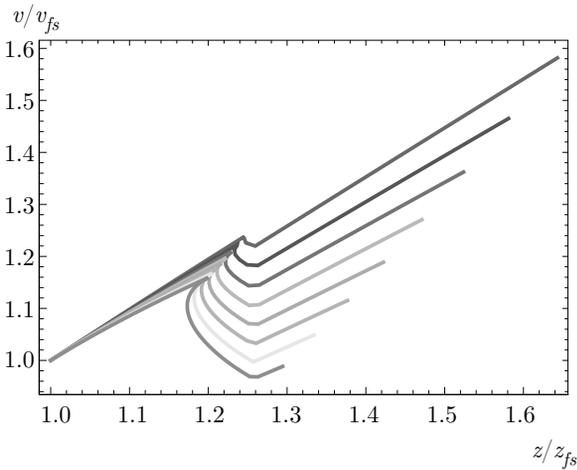
сеяния частицей размером  $d$ ,  $g$  — средний косинус угла рассеяния,  $\overline{m} = \rho_0 \pi \overline{d^3} / 6$  — средняя масса одной пылевой частицы,  $\rho_0$  — плотность материала. Интеграл от (15) по всей толщине пылевого слоя позволяет связать его поверхностную плотность с транспортной оптической толщиной

$$\tau_{tr} = \int_{z_{fs}}^{\infty} dz \sigma_{tr}(z) = \frac{\overline{\sigma_s(1-g)}}{\overline{m}} \rho_a. \quad (16)$$

Отношение  $\rho_a / \tau_{tr}$  зависит от характерного масштаба распределения частиц по размерам. Поскольку регистрируемый в PDV-экспериментах сигнал пропорционален сечению обратного рассеяния, которое для металлических частиц размером порядка или больше длины волны пропорционально геометрическому сечению  $\pi d^2 / 4$ , отношение  $\rho_a / \tau_{tr}$  удобно представить как функцию среднеквадратичного размера частиц. Для лог-нормального распределения с типичной для эксперимента шириной  $\sigma = 0.5$  справедлива оценка  $\rho_a / \tau_{tr} \simeq \rho_0 (\overline{d^2})^{1/2}$ .

Связь поверхностной плотности пыления с транспортной оптической толщиной  $\tau_{tr}$  для образцов Pb и Sn проиллюстрирована на рис. 10. Для расчета транспортного сечения рассеяния использовались численный код [54] и оптические постоянные веществ [55].

Как следует из представленных на рис. 10 результатов, пылевые выбросы в экспериментах, описанных в разд. 2, характеризуются большой оптической толщиной. Для размеров частиц  $d \sim 1.5-3$  мкм, которые следуют из оценки по накло-



**Рис. 11.** (В цвете онлайн) Семейство кривых  $v(z)$  для частиц Sn размером 2 мкм. Моменты времени  $t_m = 0.5\text{--}4$  мкс (от верхней к нижней кривой), скорость свободной поверхности  $v_{fs} = 1.23$  км/с

ну PDV-спектрограмм опытов 1–3 (см. рис. 4), и результатов SPH-моделирования для поверхностной плотности  $\rho_a$ , ожидаемые значения транспортной оптической толщины лежат в диапазоне  $\tau_{tr} = 5\text{--}15$ .

### 3.3. Эволюция распределения объемной плотности в газовой среде

Торможение пылевых частиц в воздухе может приводить к существенному изменению исходного распределения выброшенной массы по скорости движения  $v$  и координате  $z$ . Наиболее быстрые пылевые частицы, согласно соотношению (1), тормозятся на ранних стадиях разлета пылевого облака. Это хорошо видно на спектрограммах (см. рис. 3). Поэтому из-за процесса торможения происходит подавление высокоскоростной части распределения объемной плотности по скорости.

Для расчета эволюции распределения пылевых частиц по скоростям и координатам воспользуемся подходом, примененным к аналогичной проблеме в работе [56] (см. также Приложение В). Предполагается, что торможение частиц в газовой среде подчиняется уравнению (1).

Для описания временной зависимости распределения объемной плотности сначала для частиц заданного размера рассчитывается семейство траекторий, отвечающих различным значениям начальной скорости. На основе этих результатов на плоскости  $vz$  формируется набор кривых  $v(z)$  для каждого момента времени  $t_m$  (рис. 11). На заданной глубине  $z$  оказываются частицы с различными скорос-

тями — сильно затормозившиеся с начальной скоростью  $v_0 > v_{sh}$  ( $v_{sh}$  — скорость ударной волны в воздухе [36]) и испытывающие слабое торможение с начальной скоростью  $v < v_{sh}$ . Поскольку каждая точка на кривой  $v(z)$  отвечает определенному значению начальной скорости частиц, ей соответствует определенное значение доли объемной плотности.

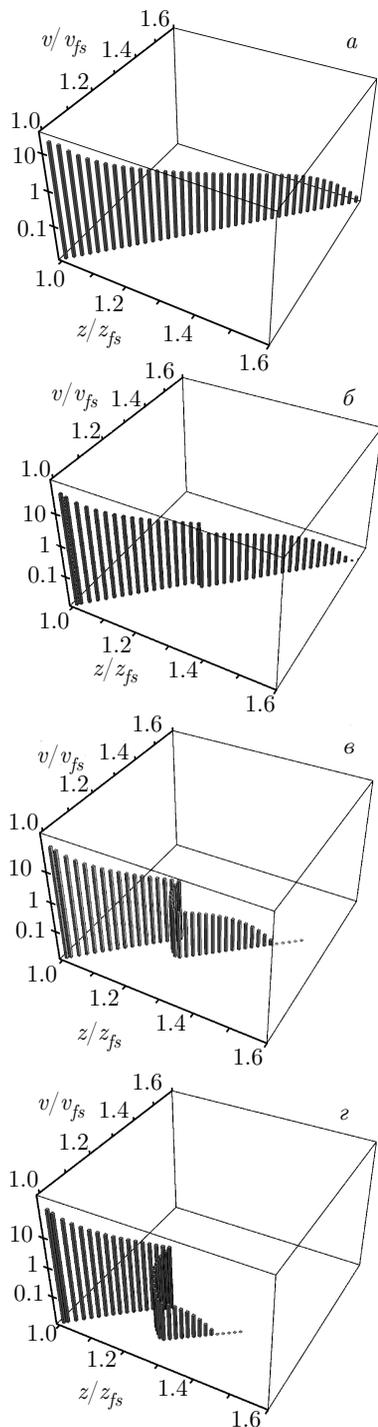
Наглядно это проиллюстрировано на рис. 12. Для того чтобы далее рассчитать эволюцию объемной плотности с учетом разброса частиц по размерам, показанные на рис. 12 профили объемной плотности нужно просуммировать с весовыми множителями, отвечающими распределению размеров частиц. Если полученный результат дополнительно проинтегрировать по координате  $z$ , то получим распределение объемной плотности по скорости,  $\rho(v, t_m)$ . Аналогично, если выполнить интегрирование по скорости при фиксированном значении  $z$ , приходим к распределению объемной плотности  $\rho(z, t_m)$ .

Временная эволюция транспортного коэффициента рассеяния рассчитывается аналогично, если заменить в выражении для распределения объемной плотности массу отдельной частицы  $m_d = \rho_0 \pi d^3 / 6$  на транспортное сечение  $\sigma_s(1-g)$ . Из-за перераспределения частиц по скоростям и координатам в процессе торможения равенство (15) нарушается, однако интегральное соотношение (16) остается в силе.

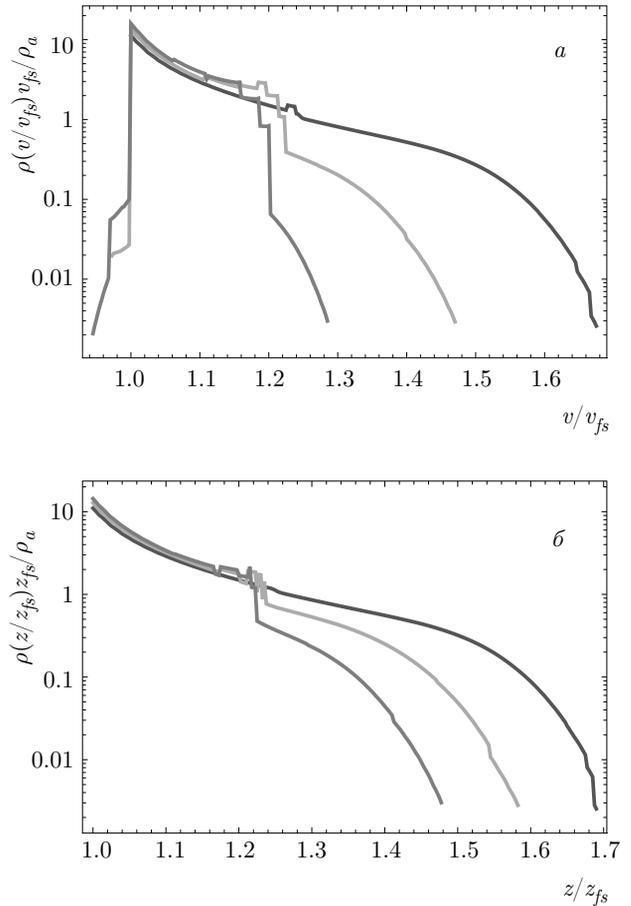
Результаты соответствующих расчетов для эксперимента с образцом Sn (16 ГПа) проиллюстрированы на рис. 13. Сравнение рис. 13а и 13б показывает, что те части распределений, которые определяются вкладом частиц, движущихся медленнее ударной волны в воздухе, слабо меняются со временем и практически совпадают между собой. Вклад частиц, первоначально движущихся быстрее ударной волны в воздухе, с ростом времени уменьшается в распределении по координатам медленнее, чем в распределении по скоростям. Как следует из рис. 13а, с ростом  $t_m$  в распределении по скоростям становится заметным вклад частиц, затормозившихся до  $v < v_{fs}$ .

## 4. РАСЧЕТ ДОПЛЕРОВСКОГО СПЕКТРА ОБРАТНОРАССЕЯННЫХ ВОЛН

Используемый в настоящей работе подход к анализу спектров обратнорассеянных волн был предложен в работе [28] и применялся затем в [29, 30] для восстановления параметров пылевых выбросов из экспериментальных PDV-данных. Он основан на использовании связи между спектральной мощно-



**Рис. 12.** Эволюция профиля объемной плотности частиц заданного размера. Результаты расчета для частиц Sn размером 2 мкм для моментов времени  $t_m = 0$  (а),  $t_m = 1$  мкс (б),  $t_m = 3$  мкс (в),  $t_m = 5$  мкс (г). Начальный профиль — результат SPH-моделирования для  $\bar{\varphi} = 140^\circ$ . Скорость свободной поверхности  $v_{fs} = 1.23$  км/с



**Рис. 13.** (В цвете онлайн) Эволюция распределений объемной плотности  $\rho(v, t_m)$  (а) и  $\rho(z, t_m)$  (б) частиц Sn. Результаты расчетов для моментов времени  $t_m = 0.5, 4, 8$  мкс (от правой к левой кривой). Начальное распределение массы по скорости — расчет SPH-методом для образца Sn при 16 ГПа,  $\bar{\varphi} = 140^\circ$ . Среднеквадратичный размер частиц  $(\bar{d}^2)^{1/2} = 2$  мкм

стью  $|J(\omega)|^2/\Delta t$  гетеродинных биений ( $\Delta t$  — временное «окно» фурье-преобразования) и временной корреляционной функцией обратнорассеянных волн [28, 30]. Как показано в работах [28, 30], спектральная мощность  $|J(\omega)|^2/\Delta t$  гетеродинных биений с точностью до общего множителя совпадает с доплеровским спектром  $|E(\omega + \omega_0)|^2/\Delta t$  обратнорассеянных волн, где  $E(\omega)$  — фурье-образ рассеянного поля,  $\omega_0$  — частота зондирующего излучения. Усредненный по флуктуациям доплеровский спектр

$$I(\omega) = \langle |E(\omega + \omega_0)|^2/\Delta t \rangle$$

напрямую связан с корреляционной функцией обратнорассеянного поля [51]:

$$I(\omega) = \int dt e^{i\omega t} I(\mathbf{r}, \mathbf{n} = -\mathbf{n}_0, t), \quad (17)$$

где

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t) = \int d^3r' \exp(-ik_0\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}' + i\omega_0 t) \times \langle E(\mathbf{r}+\mathbf{r}'/2, t_m+t/2) E^*(\mathbf{r}-\mathbf{r}'/2, t_m-t/2) \rangle, \quad (18)$$

вектор  $\mathbf{r}$  определяет положение детектора,  $\mathbf{n}_0$  и  $\mathbf{n}$  — направления распространения соответственно зондирующей и рассеянной волн,  $k_0 = \omega_0/c$  — волновое число. В предположении, что пылевые частицы расположены случайным образом и их число внутри зондируемого объема велико, зависящая от времени «интенсивность»  $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$  удовлетворяет транспортному уравнению [51].

В отличие от работы [28], где расчеты приводились простейшим двухпотоковым методом, в настоящей работе при решении уравнения для  $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, t)$  используется так называемое транспортное приближение [52, 53, 57]. Транспортное приближение оправдано, если дифференциальное сечение рассеяния можно представить как суперпозицию изотропной части и дифракционного пика. Именно такая ситуация складывается при рассеянии на металлических частицах. В транспортном приближении дифференциальное сечение заменяется на сумму изотропного сечения и  $\delta$ -пики в направлении вперед. Интегральное по углам сечение изотропной части полагается равным транспортному сечению рассеяния. Тогда исходное транспортное уравнение сводится к уравнению для изотропного рассеяния и в рассматриваемом случае плоской геометрии имеет вид

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tr} + \kappa \right) I(z, \mu, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' \langle \sigma_{tr} \exp[-ik_0(\mu - \mu')vt] \rangle I(z, \mu', t), \quad (19)$$

где  $\sigma_{tr}$  и  $\kappa$  — соответственно транспортный коэффициент рассеяния и коэффициент поглощения, угловые скобки означают усреднение по скоростям пылевых частиц. Координата  $z$  отсчитывается от начального положения свободной поверхности,  $\mu$  — косинус угла между направлением распространения рассеянной волны и осью  $z$ . Граничное условие к этому уравнению для падающей на среду из  $z = +\infty$  в направлении  $\mu = -1$  плоской волны имеет вид

$$I(z = +\infty, \mu, t) = \frac{1}{2\pi} \delta(\mu + 1).$$

Входящие в уравнение (19) коэффициенты  $\sigma_{tr}$  и  $\kappa$ , характеризующие оптические свойства пылевого облака, являются функциями  $z$ . Из-за расширения

пылевого облака зависимость этих коэффициентов от  $z$  меняется со временем. Значение времени разлета  $t_m$  входит в эти коэффициенты как параметр.

Зондируемый объем пылевого выброса ограничен поперечными размерами поля зрения PDV-системы. Предполагается, что поперечные размеры области зондирования намного больше, чем среднее значение длины свободного пробега фотонов в облаке. В продольном направлении зондируемый объем простирается от области наиболее быстрых частиц пылевого облака до свободной поверхности. Продольный размер зондируемого объема меняется со временем  $t_m$ , но общее число пылевых частиц в этом объеме, их суммарная масса и, соответственно, оптическая толщина предполагаются неизменными.

В случае, когда пыление ударно-нагруженного образца происходит в вакууме, пылевое облако расширяется в соответствии с автомодельным распределением (2). В этом приближении скорость частиц однозначно связана с координатой  $z$ :  $v(z) = z/t_m$ . Входящий в интегральное слагаемое уравнения (19) фактор рассеяния принимает вид

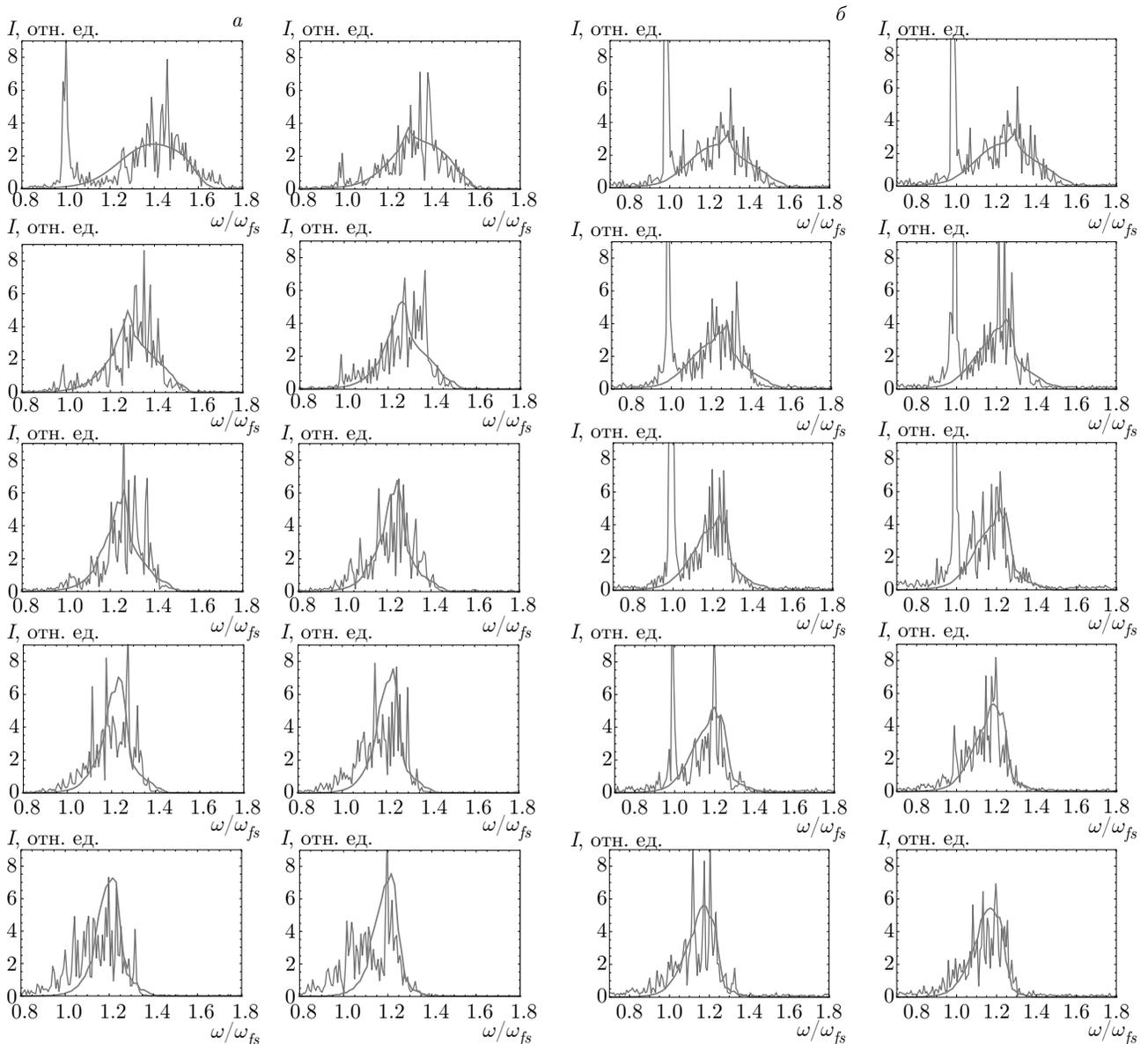
$$\langle \sigma_{tr} \exp(-ik_0(\mu - \mu')vt) \rangle = \sigma_{tr}(z) \exp\left(-ik_0(\mu - \mu')\frac{z}{t_m}t\right). \quad (20)$$

При расширении пылевого облака в газовую среду автомодельное приближение можно применять только в первые моменты времени после выхода ударной волны на поверхность образца, пока торможением частиц в среде можно пренебречь. В условиях торможения, когда нарушается однозначная связь между скоростью  $v$  и координатой  $z$  (см. рис. 11), входящий в уравнение (19) фактор рассеяния можно представить в виде многогруппового разложения

$$\langle \sigma_{tr} \exp[-ik_0(\mu - \mu')vt] \rangle = \sum_i \sigma_{tr}^{(i)}(z) \exp[-ik_0(\mu - \mu')v_i(z)t], \quad (21)$$

где суммирование проводится по группам частиц, для которых справедлива однозначная связь между скоростью и координатой и зависимости  $v_i(z)$  являются монотонными функциями  $z$ . Расчет входящих в уравнение (21) величин основан на результатах разд. 3.3 (см. также Приложение В).

Процедура решения уравнения (19) с фактором рассеяния (21) изложена в Приложении С.



**Рис. 14.** (В цвете онлайн) Эволюция экспериментально измеренного спектрального распределения  $\langle |J(\omega)|^2 \rangle$  (синие линии) и теоретически рассчитанного доплеровского спектра  $I(\omega)$  (красные линии) в опытах с образцом Pb (13.5 ГПа, канал 1 (а) и канал 2 (б)) в интервале  $t_m = 5.5\text{--}14.5$  мкс. Момент времени выхода ударной волны на поверхность  $t_m = 5$  мкс. Временное окно  $\Delta t = 125$  нс, интервал усреднения  $\Delta t_m = 0.5$  мкс. Доплеровский сдвиг сигнала от свободной поверхности  $\omega_{fs} = (2v_{fs}/c)\omega_0$ . Расчеты приведены для значений транспортной оптической толщины  $\tau_{tr} = 9$  (а) и  $\tau_{tr} = 5$  (б), среднеквадратичного размера частиц  $(\overline{d^2})^{1/2} = 2.1$  мкм и SPH-профиля объемной плотности с  $\overline{\varphi} = 140^\circ$

## 5. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Стандартная обработка экспериментальных данных PDV-измерений заключается в расчете фурье-спектров  $J(\omega)$  гетеродинных биений фототока во временном «окне»  $\Delta t$  от  $t_m - \Delta t/2$  до  $t_m + \Delta t/2$ . В

результате получается набор спектров, отвечающих различным моментам времени  $t_m$  движения пылевого облака. Согласно работам [28,30], для подавления флуктуаций в спектрах можно провести дополнительное усреднение спектральной мощности  $|J(\omega)|^2$  гетеродинных биений. Временная шкала разбивается на квазистационарные интервалы  $\Delta t_m$ . Значение

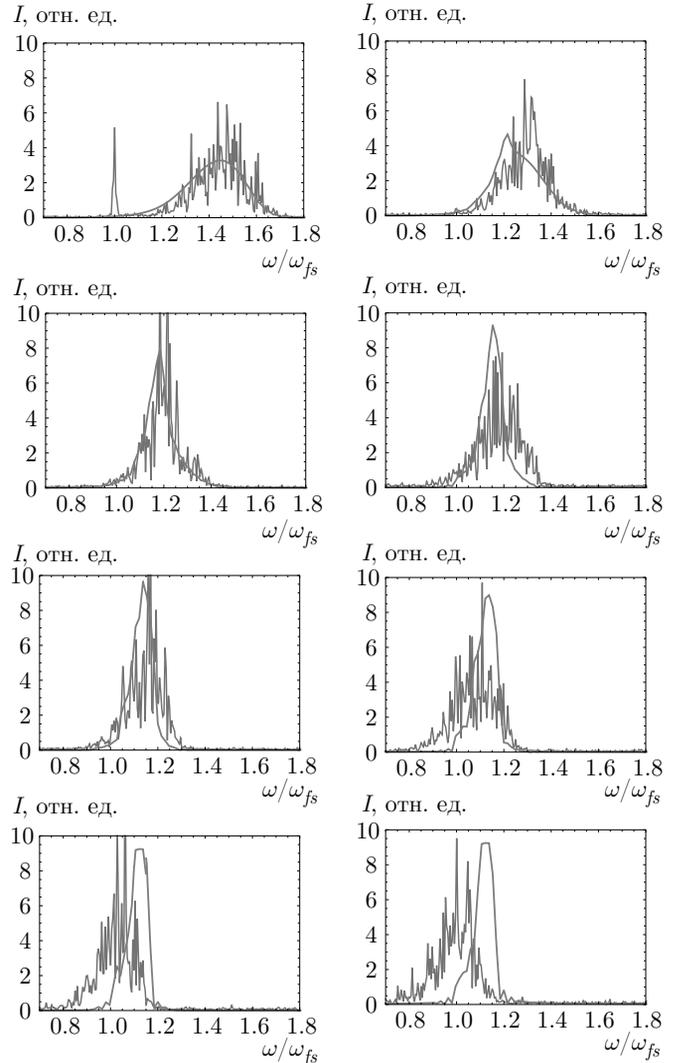
$\Delta t_m$  выбирается из условия, чтобы основные параметры спектрального профиля  $|J(\omega)|^2$  (ширина, положение максимума) оставались на таком временном отрезке практически неизменными. На каждом квазистационарном интервале рассчитывается средняя спектральная мощность

$$\langle |J(\omega)|^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |J(\omega)|_n^2, \quad (22)$$

где  $|J(\omega)|_n$  — амплитуда спектра в момент времени  $t_m^{(n)}$ ,  $N$  — число измеренных спектров на выбранном временном отрезке  $\Delta t_m$ . Результаты усреднения оказываются достаточно устойчивыми относительно вариации длительности окна  $\Delta t$  (расчеты проводились для  $\Delta t = 0.05\text{--}0.25$  мкс).

В предположении о случайном расположении пылевых частиц усредненная по флуктуациям величина  $\langle |J(\omega)|^2 \rangle$  должна быть пропорциональна определенному выше доплеровскому спектру обратного рассеяния  $I(\omega)$  (см. разд. 4, (17)). Результаты сравнения экспериментальных данных для  $\langle |J(\omega)|^2 \rangle$  с рассчитанным теоретически спектром  $I(\omega)$  показаны на рис. 14–16. Эти спектральные распределения относятся к различным моментам времени разлета пылевого облака.

Теоретический расчет доплеровских спектров проводился по следующей схеме. По результатам SPH-моделирования для объемной плотности выброшенной массы (см. рис. 8) задавалось начальное распределение пылевых частиц по скорости (т. е. входящая в (2) функция  $F(v/v_{fs})$ ). Затем по этому распределению, в предположении лог-нормального разброса частиц по размерам, рассчитывалась временная эволюция пространственной зависимости фактора рассеяния  $\langle \sigma_{tr} \exp[-ik_0(\mu - \mu')vt] \rangle$ , т. е. входящие в (21) пространственные профили скорости частиц и транспортного коэффициента рассеяния для различных моментов времени  $t_m$ . Далее, по определенной таким образом функции (21) численно решалось транспортное уравнение и рассчитывался доплеровский спектр обратнорассеянного сигнала (Приложение С). Параметры, от которых зависит наблюдаемый спектр, такие как транспортная оптическая толщина пылевого слоя  $\tau_{tr}$  и входящий в SPH-моделирование средний угол гофрировки поверхности образца  $\bar{\varphi}$ , подбирались из условия наилучшего согласия рассчитанного и экспериментально измеренного спектров в первые моменты времени (порядка 0.5 мкс) после выхода ударной волны на поверхность образца. Значение  $\tau_{tr}$  определяется по соотношению между шириной спектра и его смеще-



**Рис. 15.** (В цвете онлайн) Эволюция экспериментально измеренного спектрального распределения  $\langle |J(\omega)|^2 \rangle$  (синие линии) и теоретически рассчитанного доплеровского спектра  $I(\omega)$  (красные линии) в опыте с образцом Pb (23 ГПа) в интервале  $t_m = 6.5\text{--}13.5$  мкс. Момент времени выхода ударной волны на поверхность  $t_m = 6$  мкс. Временное окно  $\Delta t = 125$  нс, интервал усреднения  $\Delta t_m = 0.5$  мкс. Расчеты приведены для транспортной оптической толщины  $\tau_{tr} = 14$ , среднеквадратичного размера частиц  $(\overline{d^2})^{1/2} = 1.2$  мкм и SPH-профиля объемной плотности с  $\bar{\varphi} = 140^\circ$

нием относительно свободной поверхности [30]. Скорость свободной поверхности находилась из спектрального распределения при малых  $t_m$  (см. спектрограммы на рис. 3). Параметры распределения частиц по размерам (среднеквадратичный размер  $(\overline{d^2})^{1/2}$  и ширина  $\sigma$ ) подбирались из условия наилучшего согласия рассчитанного и измеренного в экспе-

**Таблица 3.** Восстановленные параметры пылевых выбросов

№ опыта	$\tau_{tr}$	$(\overline{d^2})^{1/2}$ , мкм	$\rho_a$ , мг/см <sup>2</sup>	$\rho_a^{SPH}$ , мг/см <sup>2</sup>	$\varphi$
1(1)	9	2.1	18	13.8/9.5	140°
1(2)	5	2.1	10		
2	14	1.2	13	12.1/10.1	140°
3	10	2.0	13	10.8/15.5	140°

рименте спектральных распределений для различных значений  $t_m$ . На классе начальных распределений частиц по скорости, рассчитанных SPH-методом, погрешность определения значений  $\tau_{tr}$  и  $(\overline{d^2})^{1/2}$  можно оценить как не превышающую 10–15 %.

Восстановленные таким образом значения параметров пылевых выбросов приведены в табл. 3. Значение поверхностной плотности  $\rho_a$  найдено по определенным из сравнения с экспериментом значениям  $\tau_{tr}$  и  $(\overline{d^2})^{1/2}$  с помощью результатов, представленных на рис. 10. Для сопоставления в табл. 3 приведены результаты расчета  $\rho_a$  SPH-методом (первое значение — при фиксированном  $\lambda$ , второе — при фиксированном  $R_z$ ).

Некоторое расхождение между восстановленными из эксперимента значениями  $\rho_a$  и результатами SPH-моделирования можно в первую очередь связать с различиями между реальным профилем поверхности образцов и используемым в моделировании. На разброс параметров шероховатости поверхности указывает, в частности, и различие данных, полученных в опыте 1 для одного и того же образца с двух участков поверхности, разнесенных всего на 5 мм.

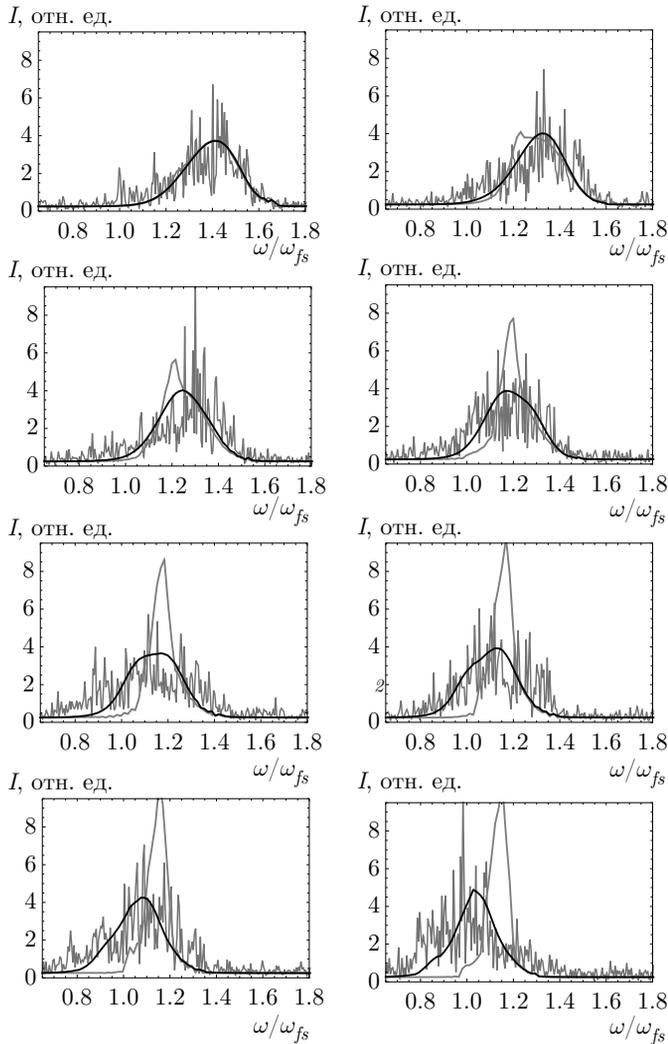
Для образца Sn оценка поверхностной плотности пыления  $\rho_a$ , полученная из результатов наложения рассчитанных спектров на измеренные в PDV-эксперименте, несколько ниже значения  $\rho_a$ , определенного контактными методами [12]. Для образцов с близкими характеристиками поверхности в работе [12] при давлении 27 ГПа были получены значения поверхностной плотности около 20 мг/см<sup>2</sup>. Имеющиеся различия в оценках  $\rho_a$ , возможно, обусловлены вкладом относительно крупных фрагментов, движущихся вблизи свободной поверхности, а также разницей в значениях давления в ударной волне и, соответственно, различным фазовым состоянием выброшенных частиц вещества.

Применимость приведенных выше теоретических расчетов доплеровских спектров имеет ограничение по времени  $t_m$ . Это ограничение обусловлено двумя причинами.

Одна причина связана с пренебрежением в наших расчетах столкновительным механизмом торможения в облаке пылевых частиц. Как следует из представленных на рис. 11 кривых  $v(z)$ , с ростом времени движения  $t_m$  область толщин  $z$ , где одновременно находятся частицы с различными скоростями (область неоднозначной зависимости  $v(z)$ ), расширяется. Одновременно увеличивается «оптическая» толщина этой области относительно процесса столкновения пылевых частиц, движущихся с различными скоростями, между собой. Когда соответствующая оптическая толщина становится порядка единицы, пренебрегать вероятностью столкновения частиц между собой уже нельзя. Процесс столкновений приводит к выравниванию скоростей частиц в этой области и, соответственно, к эффективному торможению более быстрых частиц и ускорению медленных. Время  $t_m$ , при котором столкновительный механизм торможения частиц в пылевом слое становится заметным, зависит от оптической толщины облака пылевых частиц, движущихся быстрее ударной волны в воздухе. По оценкам для первых двух опытов этот механизм становится важным при временах, превышающих 15 мкс (13.5 ГПа) и 5 мкс (23 ГПа) после выхода ударной волны на поверхность образца.

Вторая причина обусловлена нарушением с ростом  $t_m$  приближения плоской ударной волны в воздухе. В частности, в эксперименте с образцом Sn диаметр ударного воздействия составлял всего 10 мм. Поэтому на временах, превышающих 3 мкс после выброса частиц, ударная волна в воздухе становится сферической, и ее скорость существенно падает [58]. Расчет эволюции доплеровских спектров в этом предположении также показан на рис. 16. Как следует из рис. 16, компактизация потока частиц при скоростях, близких к скорости ударной волны в воздухе, которая отражается на спектре в виде выраженного пика при  $v/v_{fs} \sim 1.2$ , в этом случае не наблюдается, и согласие с экспериментом прослеживается до больших значений  $t_m$ .

В экспериментах с образцами Pb диаметр ударника составлял 30 мм, и приближение плоской ударной волны в воздухе может нарушаться на существенно больших временах (превышающих 15 мкс ( $P = 13.5$  ГПа) и 10 мкс ( $P = 23$  ГПа) после выхода ударной волны на поверхность).



**Рис. 16.** (В цвете онлайн) Эволюция экспериментально измеренного спектрального распределения  $\langle |J(\omega)|^2 \rangle$  (синие линии) и теоретически рассчитанного доплеровского спектра  $I(\omega)$  (красные и черные линии для плоской и сферической ударных волн, соответственно) в опыте с образцом Sn (16 ГПа) в интервале  $t_m = 10\text{--}17$  мкс. Момент времени выхода ударной волны на поверхность  $t_m = 9.3$  мкс. Временное окно  $\Delta t = 125$  нс, интервал усреднения  $\Delta t_m = 0.5$  мкс. Расчеты приведены для транспортной оптической толщины  $\tau_{tr} = 10$ , среднеквадратичного размера частиц  $(\overline{d^2})^{1/2} = 2.0$  мкм и SPH-профиля объемной плотности с  $\overline{\varphi} = 140^\circ$

### 6. ВЫВОДЫ

В настоящей работе показано, что гетеродинные измерения доплеровского спектра сигнала обратного рассеяния от ударно-нагруженных металлических образцов дают возможность количественно определять основные физические характеристики

пыления (поверхностную плотность пыления, среднеквадратичный размер частиц, начальный профиль объемной плотности). Приведены результаты экспериментов на образцах Sn и Pb заданной толщины и качества обработки поверхности. Продемонстрирована зависимость процесса пыления от давления в ударной волне и других условий эксперимента.

Прямое численное моделирование процесса выброса массы с поверхности ударно-нагруженных образцов, выполненное бессеточным лагранжевым SPH-методом, позволило определить поверхностную плотность и начальный профиль объемной плотности пыления. На основе этих результатов рассчитана временная эволюция распределения объемной плотности при расширении образовавшегося пылевого облака в газовую среду. Для интерпретации усредненных спектральных данных PDV-измерений использовано решение транспортного уравнения для второго момента рассеянного волнового поля. Показано, что, подбирая значения оптической толщины пылевого слоя, разброса частиц по скоростям и размерам, удается добиться хорошего согласия теоретических расчетов с полученными из эксперимента спектральными профилями сигнала обратного рассеяния в широком диапазоне времен  $t_m$ . Такой подход дает возможность на основе данных доплеровских гетеродинных измерений решать обратную задачу восстановления основных характеристик возникающего при разрушении поверхности образца пылевого выброса.

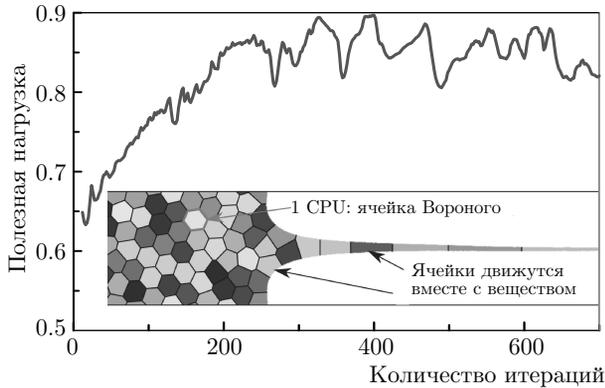
**Финансирование.** Работа одного из авторов (В. В. Ж.) поддержана Российским научным фондом (проект № 19-19-00697).

### ПРИЛОЖЕНИЕ А

#### Моделирование начальной стадии пыления контактным SPH-методом

Метод сглаженных частиц — SPH-метод — представляет собой способ интерполяции некоторой функции  $f(\mathbf{r})$ , значения которой заданы на дискретном наборе из  $N$  точек пространства  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ . В некоторой точке  $\mathbf{r}$  пространства с использованием этих известных значений и сглаживающей функции (ядра)  $W(r, h)$  можно построить аппроксимацию значения функции

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N f_j \Delta V_j W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|, h), \quad (\text{A.1})$$



**Рис. 17.** (В цвете онлайн) Отношение времени SPH-расчета к полному времени на один шаг моделирования (полезная нагрузка) как функция количества итераций работы алгоритма балансировки. Внизу показана пространственная декомпозиция моделируемого образца на ячейки Вороного в ходе параллельного расчета. Частицы, принадлежащие одной ячейке, обрабатываются отдельным процессором

где  $\Delta V_j$  — соответствующий элемент объема,  $h$  — дистанция сглаживания. Сглаживающее ядро удовлетворяет условиям

$$\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|<h} W(|\mathbf{r}-\mathbf{R}|, h) d^3r = 1, \quad (\text{A.2})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(|\mathbf{r}-\mathbf{R}|, h) = \delta(\mathbf{R}), \quad (\text{A.3})$$

где  $\delta(\mathbf{R})$  — дельта-функция. Удобство такого представления заключается в том, что градиент функции  $f(\mathbf{r})$  выражается через производную сглаживающего ядра  $W(r, h)$ , вычисленную для разных точек пространства:

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N f_j \Delta V_j \nabla W(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|, h), \quad (\text{A.4})$$

$$\nabla W(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|, h) = W'(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|, h) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|}. \quad (\text{A.5})$$

Таким образом, аппроксимация значения производной функции в данной пространственной точке рассчитывается с использованием ее ближайшего окружения на дистанции сглаживания путем простого суммирования.

Используя такое представление пространственной зависимости функции, можно построить множе-

ство конечно-разностных SPH-аппроксимаций уравнений (5)–(7). В данной работе используется схема с решением задачи Римана на контактной границе между парой частиц [59], которая обеспечивает монотонность функций в окрестности разрыва. В этом случае система уравнений (5)–(7) записывается в виде

$$\frac{d\rho_i}{dt} = 2\rho_i \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{ij}^*) \cdot \nabla W_{ij}, \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = -\frac{2}{\rho_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} P_{ij}^* \nabla W_{ij}, \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{2}{\rho_i} \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} P_{ij}^* (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{ij}^*) \cdot \nabla W_{ij}, \quad (\text{A.8})$$

где  $\mathbf{U}_{ij}^*$  и  $P_{ij}^*$  — значения контактной скорости и давления для частиц  $i$  и  $j$ , которые получаются при решении одномерной задачи Римана вдоль линии, соединяющей их центры. Для расчета контактных значений используется решение, приведенное в работе [60]. В качестве сглаживающей функции используется полином Wendland-C2 [61].

Для расчетов методом SPH с необходимой точностью требуется большое число частиц (высокое пространственное разрешение). Используемый в этом случае алгоритм параллельных вычислений должен быть оптимизирован по времени счета. В данной работе используется динамическое разбиение среды на ячейки Вороного [62], за счет автоматического перераспределения частиц между которыми достигается баланс вычислительной нагрузки. Суть подхода пояснена на рис. 17. Моделируемый образец состоит из большого числа частиц (несколько миллионов), которые обрабатываются параллельно работающими процессорами. Каждый процессор обрабатывает только локальный набор данных о частицах (обычно 50–100 тысяч частиц на ядро процессора), которые соответствуют одной ячейке Вороного в моделируемом пространстве. Диаграмма Вороного однозначно определяется положениями центров ячеек, поэтому изменение положения этих центров с целью улучшить баланс вычислительной нагрузки приводит к изменению диаграммы и соответствующему перераспределению частиц между рабочими процессорами. Таким образом параллельную декомпозицию удается быстро адаптировать к изменяющимся условиям. Детали алгоритма подробно описаны в работе [62].

Представление среды в виде набора SPH-частиц имеет ряд преимуществ перед сеточными методами. Эйлеровы сеточные схемы требуют отслеживания контактных поверхностей и свободных границ, что является основным источником погрешности при моделировании этими методами. Для лагранжевых сеточных схем необходимы специальные процедуры перестройки сетки в области формирования струи при пылении, что приводит к значительной численной диффузии импульса и энергии в зоне перепланировки и, как следствие, к потере мелкомасштабных физических процессов, происходящих при струеобразовании. При моделировании бессеточным SPH-методом не приходится преодолевать указанные технические сложности, поэтому он оптимально пригоден для моделирования таких физических явлений, как струеобразование, вращательные и сдвиговые течения сжимаемых сред, фрагментация расчетной области на части вследствие эффектов разрушения.

### ПРИЛОЖЕНИЕ В

#### Распределение пылевых частиц при торможении в газовой среде

Из-за торможения пылевых частиц в воздухе исходное распределение выброшенной массы по скорости и координате с течением времени изменяется. Функция распределения частиц определенного размера  $d$  в заданный момент времени  $t_m$  может быть записана в виде

$$N(v, z, t_m) = \frac{N_a}{v_{fs}} \int dv_0 F\left(\frac{v_0}{v_{fs}}\right) \times \delta(z - z(v_0, t_m)) \delta(v - v(v_0, t_m)), \quad (B.1)$$

где  $N_a$  — число частиц, вылетающих с единицы площади,  $(1/v_{fs}) F(v_0/v_{fs})$  — нормированное начальное распределение пылевых частиц по скорости (см. соотношение (2)),  $v(v_0, t_m)$  и  $z(v_0, t_m) = \int_0^{t_m} dt v(v_0, t)$  — скорость и координата частицы с начальной скоростью  $v_0$  в момент времени  $t_m$ . Зависимость  $v(v_0, t_m)$  рассчитывается с помощью численного интегрирования уравнения (1) с учетом изменения закона торможения в области за фронтом ударной волны в воздухе [36, 37]. Распределение (B.1) получается из решения одномерного кинетического уравнения, если в нем учесть силу торможения и пренебречь столкновениями частиц между собой.

Если выполнить интегрирование по  $v_0$ , то выражение (B.1) можно представить в виде

$$N(v, z, t_m) = \frac{N_a}{v_{fs}} \sum_i F\left(\frac{v_0^{(i)}}{v_{fs}}\right) \times \left| \frac{dz}{dv_0}(v_0^{(i)}, t_m) \right|^{-1} \delta(v - v(v_0^{(i)}, t_m)), \quad (B.2)$$

где суммирование выполняется по корням  $v_0^{(i)} = v_0^{(i)}(z, t_m)$  уравнения  $z = z(v_0, t_m)$ . Распределение  $N(v, z, t_m)$  на плоскости  $vz$  отлично от нуля на кривой  $v = v(z)$  (см. рис. 11), которая получается исключением  $v_0$  из системы уравнений  $v = v(v_0, t_m)$  и  $z = z(v_0, t_m)$ . Каждая точка на этой кривой отвечает определенному значению начальной скорости  $v_0$ . Суммирование в (B.2) эквивалентно суммированию по группам частиц, отвечающих монотонным участкам в зависимости  $v(z)$ .

Формулы (B.1), (B.2) описывают эволюцию распределения частиц заданного диаметра. Чтобы вычислить распределение объемной плотности выброшенной массы,  $\rho(v, z, t_m)$ , с учетом разброса пылевых частиц по размерам  $d$ , нужно умножить (B.1) или (B.2) на массу отдельной частицы  $m_d = \rho_0 \pi d^3 / 6$  и проинтегрировать по  $d$  с распределением  $n(d)$ . Полученный результат можно выразить через поверхностную плотность пыления, воспользовавшись соотношением  $N_a = \rho_a / \overline{m_d}$ , где  $\overline{m_d}$  — средняя масса частицы. В настоящей работе предполагается, что распределение частиц по размерам,  $n(d)$ , не зависит от их начальной скорости (согласно работам [47, 49], это оправдано при  $v_0/v_{fs} > 1.1$ , т. е. для большей доли частиц, вовлеченных в процесс многократного рассеяния зондирующего сигнала).

Если интегрирование заменить дискретной суммой по размерам, то выражение для объемной плотности  $\rho(v, z, t_m)$  сведется к суммированию по группам частиц, каждая из которых отвечает монотонному участку зависимости  $v(z)$  для частиц заданного размера. В расчетах, результаты которых приведены в настоящей работе, мы использовали 16-групповое приближение. Распределение  $n(d)$  моделировалось ансамблем частиц четырех различных размеров, для каждого из которых на кривой  $v(z)$  могут быть выделены четыре монотонных участка (см. рис. 11). Использовалась аппроксимация лог-нормального распределения (14) с шириной  $\sigma = 0.5$  набором из четырех дискретных значений размера  $d/d_m = 0.8, 1.3, 1.8, 2.3$  с соответствующими весовыми множителями 0.50, 0.32, 0.13, 0.05. На результаты расчета объемной плотности и транспортного коэффициента рассеяния дополнительное увеличение числа дискретных значений  $d/d_m$  практически не влияет.

## ПРИЛОЖЕНИЕ С

## Решение транспортного уравнения при многогрупповом описании пылевого слоя

Для решения транспортного уравнения (19) в случае рассеяния волн на ансамбле частиц, который характеризуется неоднозначной зависимостью скорости частиц от координаты  $z$ , воспользуемся многогрупповым представлением фактора рассеяния

$$\langle \sigma_{tr} \exp[-ik_0(\mu - \mu')vt] \rangle$$

в виде разложения (21) на парциальные вклады. После подстановки (21) исходное транспортное уравнение (19) преобразуется к виду

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial z} + \sigma_{tr}(z) + \kappa(z) \right) I(z, \mu, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_k \sigma_{tr}^{(k)}(z) \exp[-ik_0\mu v_k(z)t] \Phi_k(z, t), \quad (C.1)$$

где суммирование проводится по группам, каждая из которых соответствует монотонному участку зависимости скорости  $v_k(z)$  частиц заданного диаметра от  $z$  и введена парциальная плотность

$$\Phi_k(z, t) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu \exp[ik_0\mu v_k(z)t] I(z, \mu, t). \quad (C.2)$$

Входящие в (C.1) величины  $\sigma_{tr}(z)$ ,  $\kappa(z)$ ,  $\sigma_{tr}^{(k)}(z)$  и  $v_k(z)$  зависят от времени движения  $t_m$  как от параметра.

Преобразуя уравнение (C.1) к интегральному виду и выполняя в нем интегрирование по угловой переменной  $\mu$ , получим систему уравнений относительно парциальной плотности  $\Phi_i$ :

$$\Phi_i(\zeta, t) = \sum_k \int_0^{\tau_{tot}} d\zeta' h_{ik}(\zeta, \zeta', t) \Phi_k(\zeta', t) + \Phi_i^{(0)}(\zeta, t), \quad (C.3)$$

где вместо переменной  $z$  введена оптическая глубина

$$\zeta = \int_z^\infty dz' [\sigma_{tr}(z') + \kappa(z')]. \quad (C.4)$$

Входящий в (C.4) транспортный коэффициент рассеяния  $\sigma_{tr}(z)$  определяется суммой парциальных вкладов:

$$\sigma_{tr}(z) = \sum_k \sigma_{tr}^{(k)}(z). \quad (C.5)$$

Полная оптическая толщина пылевого слоя равна  $\tau_{tot} = \zeta(z = v_{fs}t_m)$ . Входящая в уравнение (C.3) величина  $\Phi_i^{(0)}(\zeta, t)$  соответствует парциальной плотности от источника в виде падающей на среду плоской монохроматической волны,

$$\Phi_i^{(0)}(\zeta, t) = \exp[-\zeta - ik_0v_i(\zeta)t]. \quad (C.6)$$

Ядра  $h_{ik}(\zeta, \zeta', t)$  в системе интегральных уравнений (C.3) определяются выражениями

$$h_{ik}(\zeta, \zeta', t) = \frac{\Lambda}{2} \frac{\sigma_{tr}^{(k)}(\zeta')}{\sigma_{tr}(\zeta')} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{|\mu|} \eta \left( \frac{\zeta' - \zeta}{\mu} \right) \times \exp \left( -\frac{\zeta' - \zeta}{\mu} - ik_0\mu[v_k(\zeta') - v_i(\zeta)]t \right), \quad (C.7)$$

где предполагается, что альбеда однократного рассеяния  $\Lambda = \sigma_{tr}/(\sigma_{tr} + \kappa)$  одинаково для всех групп частиц и не зависит от координат. Значение  $\Lambda$  определяется только материалом образца и длиной волны излучения. Расчеты по теории Ми [54] для длины волны  $\lambda = 1.55$  мкм, оптических постоянных из [55] и размеров частиц 1–5 мкм дают для  $\Lambda$  значения 0.89 для Pb и 0.83 для Sn.

Система интегральных уравнений (C.3) является многогрупповым обобщением известного уравнения Милна [53] на случай движущихся частиц. В одногрупповом приближении (т. е. для случая однозначной функции  $v(z)$ ) уравнение (C.1) рассматривалось ранее [30]. В настоящей работе используется 16-групповое приближение (ансамбль частиц четырех различных размеров, для каждого из которых на кривой  $v(z)$  могут быть выделены четыре монотонных участка (см. Приложение В)).

Численное интегрирование системы уравнений (C.3) проводится на сетке значений  $\zeta_n$  и  $\mu_m$ , являющихся корнями полиномов Лежандра. Для каждого значения времени  $t$ , входящего в доплеровские фазовые множители в (C.6), (C.7), решается система соответствующих алгебраических уравнений и, таким образом, формируется массив значений плотности  $\Phi_k(\zeta_n, t)$ .

Интенсивность обратнорассеянного сигнала  $I(\mu = 1, \zeta = 0, t)$  вычисляется по формуле

$$I(t) = \frac{\Lambda}{4\pi} \sum_k \int_0^{\tau_{tot}} d\zeta \frac{\sigma_{tr}^{(k)}(\zeta)}{\sigma_{tr}(\zeta)} \times \exp[-\zeta - ik_0v_k(\zeta)t] \Phi_k(\zeta, t). \quad (C.8)$$

Доплеровский спектр сигнала обратного рассеяния,  $I(\omega)$ , вычисляется далее с помощью дискретного преобразования Фурье по  $t$  от выражения (C.8).

Результат (С.8) относится к случаю обратного рассеяния волн от свободного слоя (т. е. предполагается, что отражение волн от свободной поверхности отсутствует).

Обобщение (С.8) на случай отражающей свободной поверхности может быть получено с помощью соответствующего граничного условия (см. [30]) и представлено в виде разложения решения по последовательным отражениям от границы. Это разложение удается просуммировать для диффузно-отражающей поверхности [30]. Наиболее простой результат получается в предположении, что коэффициент отражения поверхности равен единице и отражение носит зеркальный характер [28, 63]. В этом случае интенсивность обратного рассеяния можно выразить через решение для свободного слоя удвоенной оптической толщины. Значение интенсивности получается из выражения (С.8), если в него подставить  $\Phi_k(\zeta, t)$  для слоя толщиной  $2\tau_{tot}$ , верхний предел интегрирования заменить на  $2\tau_{tot}$ , а вместо одного экспоненциального множителя подставить сумму

$$\exp[-\zeta - ik_0 v_k(\zeta)t] + \exp[-2\tau_{tot} + \zeta - ik_0(2v_{fs} - v_k(\zeta))t].$$

Такой результат позволяет оценить максимальный эффект отражения волн от поверхности на сигнал обратного рассеяния.

Предположение о зеркальном отражении от поверхности [28, 63] оправдано по двум причинам. С одной стороны, для многократно рассеянного излучения характер отражения (зеркальный или диффузный) оказывается несущественным [52, 53]. С другой стороны, коэффициент отражения излучения от металлических образцов близок к единице (для нормального падения  $r = 0.92$  для Pb,  $r = 0.87$  для Sn [55], усредненные по углам коэффициенты соответственно равны 0.9 и 0.85).

Для реализуемых в экспериментах значений оптической толщины пылевых выбросов  $\tau_{tot} \gg 1$  и значений  $\Lambda$ , отвечающих частицам Pb и Sn, влияние отражения волн от свободной поверхности на спектр сигнала обратного рассеяния оказывается незначительным (даже для канала 2 в опыте 1).

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Огородников, А. Г. Иванов, А. Л. Михайлов и др., *Физика горения и взрыва* **34**, 103 (1998).
2. W. S. Vogan, W. W. Anderson, M. Grover et al., *J. Appl. Phys.* **98**, 113508 (2005).
3. W. T. Buttler, M. B. Zellner, R. T. Olson et al., *J. Appl. Phys.* **101**, 063547 (2007).
4. M. B. Zellner, M. Grover, J. E. Hammerberg et al., *J. Appl. Phys.* **102**, 013522 (2007).
5. M. B. Zellner, W. Vogan-McNeil, J. E. Hammerberg et al., *J. Appl. Phys.* **103**, 123502 (2008).
6. M. B. Zellner and W. T. Buttler, *Appl. Phys. Lett.* **93**, 114102 (2008).
7. В. А. Огородников, А. Л. Михайлов, В. В. Бурцев и др., *ЖЭТФ* **136**, 615 (2009).
8. V. V. Igonin, G. B. Krasovsky, S. E. Kuratov et al., *Phys. Scripta* **142**, 014019 (2010).
9. W. T. Buttler, D. M. Oró, D. L. Preston et al., *J. Fluid Mech.* **703**, 60 (2012).
10. Y. Chen, H. Hu, T. Tang et al., *J. Appl. Phys.* **111**, 053509 (2012).
11. А. Л. Михайлов, В. А. Огородников, В. С. Сасик и др., *ЖЭТФ* **145**, 892 (2014).
12. S. K. Monfared, D. M. Oró, M. Grover et al., *J. Appl. Phys.* **116**, 063504 (2014).
13. W. T. Buttler, D. M. Oró, R. T. Olson et al., *J. Appl. Phys.* **116**, 103519 (2014).
14. В. А. Огородников, А. Л. Михайлов, В. С. Сасик и др., *ЖЭТФ* **150**, 411 (2016).
15. В. А. Огородников, А. Л. Михайлов, С. В. Ерунов и др., *ЖЭТФ* **152**, 1156 (2017).
16. M. V. Antipov, V. A. Arinin, A. B. Georgievskaya et al., *J. Dynam. Behav. Mater.* **3**, 300 (2017).
17. O. T. Strand, D. R. Goosman, C. Martinez et al., *Rev. Sci. Instr.* **77**, 083108 (2006).
18. B. J. Jensen, D. B. Holtkamp, P. A. Rigg et al., *J. Appl. Phys.* **101**, 013523 (2007).
19. A. R. Valenzuela, G. Rodriguez, S. A. Clarke et al., *Rev. Sci. Instr.* **78**, 013101 (2007).
20. E. A. Moro, M. E. Briggs, L. M. Hull et al., *Appl. Opt.* **52**, 08661 (2013).
21. W. J. Warren, E. A. Moro, M. E. Briggs et al., *Appl. Opt.* **53**, 4661 (2014).
22. М. В. Асташкин, В. К. Баранов, А. Б. Георгиевская и др., *Письма в ЖЭТФ* **99**, 165 (2014).
23. G. Prudhomme, P. Mercier, L. Berthe et al., *J. Phys.: Conf. Ser.* **500**, 142022 (2014).
24. G. Prudhomme, P. Mercier, and L. Berthe, *J. Phys.: Conf. Ser.* **500**, 142027 (2014).
25. А. В. Федоров, А. Л. Михайлов, С. А. Финюшин и др., *ЖЭТФ* **149**, 792 (2016).

26. А. В. Федоров, А. Л. Михайлов, Л. К. Антонюк и др., *Физика горения и взрыва* **52**, 115 (2016).
27. А. В. Федоров, А. Л. Михайлов, С. А. Финюшин и др., *Физика горения и взрыва* **52**, 122 (2016).
28. А. В. Андрияш, М. В. Асташкин, В. К. Баранов и др., *ЖЭТФ* **149**, 1121 (2016).
29. J.-E. Franzkowiak, G. Prudhomme, P. Mercier et al., *Rev. Sci. Instr.* **89**, 033901 (2018).
30. A. V. Andriyash, M. V. Astashkin, V. K. Baranov et al., *J. Appl. Phys.* **123**, 243102 (2018).
31. А. В. Федоров, И. С. Гнutow, А. О. Яговкин, *ЖЭТФ* **153**, 92 (2018).
32. J. J. Monaghan, *J. Comp. Phys.* **136**, 298 (1997).
33. S. P. Marsh, *LANL Shock Hugoniot Data*, Univ. of California Press, Berkeley (1980).
34. O. Durand and L. Soulard, *J. Appl. Phys.* **114**, 194902 (2013).
35. O. Durand and L. Soulard, *J. Appl. Phys.* **117**, 165903 (2015).
36. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (2000).
37. L. D. Cloutman, *Amer. J. Phys.* **56**, 643 (1988).
38. A. V. Georgievskaya and V. A. Raevsky, *AIP Conf. Proc.* **1426**, 1007 (2012).
39. A. V. Georgievskaya and V. A. Raevsky, *J. Dynam. Behav. Mater.* **3**, 321 (2017).
40. G. Dimonte, G. Terrones, F. J. Cherne et al., *J. Appl. Phys.* **113**, 024905 (2013).
41. J.-L. Shao, P. Wang and A.-M. He, *J. Appl. Phys.* **116** (2014).
42. S. Dyachkov, A. Parshikov, and V. Zhakhovsky, *AIP Conf. Proc.* **1793**, 100024 (2017).
43. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Физматлит, Москва (2008).
44. J. R. Asay and M. Shahinpoor, *High-Pressure Shock Compression of Solids*, Springer, New York (1993).
45. C. Roland, T. de Ressaiguiet, A. Sollier et al., *J. Dynam. Behav. Mater.* **3**, 156 (2017).
46. D. S. Sorenson, P. Pazuchanics, R. P. Johnson et al., *Technical Report LA-UR-14-24722*, Los Alamos National Laboratory (2014).
47. D. S. Sorenson, G. A. Capelle, M. Grover et al., *J. Dynam. Behav. Mater.* **3**, 233 (2017).
48. S. K. Monfared, W. T. Buttler, D. K. Frayer et al., *J. Appl. Phys.* **117**, 223105 (2015).
49. M. M. Schauer, W. T. Buttler, D. K. Frayer et al., *J. Dynam. Behav. Mater.* **3**, 217 (2017).
50. D. S. Sorenson, R. W. Minich, J. L. Romero et al., *J. Appl. Phys.* **92**, 5830 (2002).
51. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах*, т. 1, 2, Мир, Москва (1981).
52. В. В. Соболев, *Рассеяние света в атмосферах планет*, Наука, Москва (1972).
53. H. C. Van De Hulst, *Multiple Light Scattering*, Academic Press, New York (1980).
54. P. Laven, *Appl. Opt.* **42**, 436 (2003); <http://www.philiplaven.com>.
55. E. D. Palik and G. Ghosh, *Handbook of Optical Constants of Solids*, Academic Press, San Diego (1998).
56. D. M. Oró, J. E. Hammerberg, W. T. Buttler et al., *AIP Conf. Proc.* **1426**, 1351 (2012).
57. L. A. Dombrovsky, *Comp. Therm. Sci.* **4**, 297 (2012).
58. Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике*, Наука, Москва (1977).
59. A. N. Parshikov and S. A. Medin, *J. Comp. Phys.* **180**, 353 (2002).
60. J. K. Dukowicz, *J. Comp. Phys.* **61**, 119 (1985).
61. H. Wendland, *Adv. Comp. Math.* **4**, 389 (1995).
62. M. S. Egorova, S. A. Dyachkov, A. N. Parshikov et al., *Comp. Phys. Comm.* **234**, 112 (2019).
63. J.-E. Franzkowiak, P. Mercier, G. Prudhomme et al., *Appl. Opt.* **57**, 2766 (2018).