

# ЭНЕРГООБМЕН ПРИ ВЫРОЖДЕННОМ СМЕШЕНИИ ЧЕТЫРЕХ БЫСТРЫХ $TE_2$ -МОД ТОНКОЙ ЛЕВООРИЕНТИРОВАННОЙ ПЛЕНКИ НА НЕЛИНЕЙНОЙ ПОДЛОЖКЕ

А. С. Буллер<sup>a\*</sup>, С. В. Леонов<sup>b</sup>, Н. Р. Литвинова<sup>a</sup>, Р. В. Литвинов<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup> Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники  
634034, Томск, Россия

<sup>b</sup> Национальный исследовательский Томский политехнический университет  
634050, Томск, Россия

Поступила в редакцию 19 сентября 2019 г.,  
после переработки 21 октября 2019 г.  
Принята к публикации 24 октября 2019 г.

Рассмотрено вырожденное по частоте смешение вперед и назад распространяющихся быстрых мод планарного оптического волновода на основе тонкой левоориентированной пленки и правоориентированной подложки, обладающей эффектом Керра. Решение нелинейных уравнений для интенсивностей связанных мод получено в пренебрежении вкладами элементарных процессов, не удовлетворяющих условию фазового синхронизма. Показано, что внутримодовое самовоздействие четырех мод  $TE$ -типа сопровождается обменом энергии между ними. Эффективность энергообмена периодически меняется вдоль направления распространения мод, приводя к инвертированию интенсивностей вперед и назад распространяющихся световых полей на полупериоде взаимодействия.

DOI: 10.31857/S0044451020030074

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Планарные волноводные структуры оптического диапазона на основе тонких пленок являются основой для интегральной оптики [1–4]. Наличие в их составе материалов, обладающих нелинейным оптическим откликом, позволяет за счет варьирования параметров светового поля, вводимого в волновод, изменять пространственное распределение полей волноводных мод и условия их отсечки, смещать длину нулевой групповой дисперсии, добиваться самофокусировки светового поля и распространения временных и пространственных оптических солитонов, реализовывать различные типы смешения волноводных мод и др. [5–8].

Исследования распространения электромагнитных волн в левоориентированных метаматериалах с одновременно отрицательными значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей, начатые в работах [9, 10], в дальнейшем позволили обнаружить

новые закономерности, не свойственные обычным правоориентированным средам [11–13]. При этом нелинейные левоориентированные метаматериалы значительно расширили представление об эффектах самовоздействия, параметрического усиления и преобразования частот, нелинейных эффектах на границе раздела сред, направляемых нелинейных модах планарных волноводов и др. [12, 13].

Оптически линейные планарные волноводы на основе левоориентированных метаматериалов обладают свойствами, которые у волноводов, на основе правоориентированных материалов отсутствуют [14–26]. В них могут распространяться не только быстрые волноводные моды, но и медленные. В этих волноводах направление переноса мощности некоторой волноводной модой в областях из левоориентированных метаматериалов противоположно направлению переноса мощности для той же моды в областях из правоориентированных материалов. При определенных условиях суммарная мощность, переносимая волноводной модой через сечение волновода, и, как следствие, ее групповая скорость обращаются в нуль [14, 24–28]. Скорость распространения максимума мощности, переносимой узкопо-

\* E-mail: albertbuller@yandex.ru

лосным внутримодовым волновым пакетом со спектром, прижатым снизу к частоте нуля групповой скорости моды, может быть на несколько порядков ниже групповой скорости света в объемном левоориентированном метаматериале [24–26].

Дисперсионные зависимости постоянных распространения направляемых мод волноводов, содержащих левоориентированные метаматериалы, в общем случае являются немонотонными [15, 17, 18, 20, 22–33], в отличие от аналогичных зависимостей для обычных волноводов на основе правоориентированных материалов [1–4]. Непрерывная ветвь зависимости постоянной распространения быстрой  $TE$ -моды от частоты делится на два монотонных участка точкой, в которой групповая скорость моды обращается в нуль [24–26, 28]. Один из этих участков соответствует одинаковым направлениям фазовой и групповой скоростей моды, а другой — противоположным. Поэтому в левоориентированной пленке на одной частоте, близкой к частоте нуля групповой скорости моды, могут распространяться четыре волноводные моды с постоянными распространения, принадлежащими одной непрерывной дисперсионной ветви.

Внутримодовое самовоздействие в оптических волноводах на основе обычных правоориентированных материалов, обладающих нелинейным оптическим откликом керровского типа, приводит к фазовой самомодуляции двух мод, распространяющихся вперед и назад с одинаковой величиной фазовой скорости, и фазовой кросс-модуляции между ними [5, 6, 34]. Такое самовоздействие не приводит к обмену энергией между модами. Возможность распространения в левоориентированной пленке четырех волноводных мод одного типа с различными направлениями фазовых и групповых скоростей создает условия для формирования возмущений диэлектрической проницаемости волновода за счет эффекта Керра, периодически меняющихся вдоль направления распространения волноводных мод. Пространственно-параметрическое смещение этих мод за счет таких возмущений может привести к энергообмену между ними, аналогично энергообмену при вырожденном четырехволновом взаимодействии (см., например, [5, 6, 35]).

В выполненных к настоящему времени исследованиях распространения направляемых мод в нелинейных планарных волноводах, содержащих левоориентированные метаматериалы [11–13, 27, 28], вырожденное по частоте пространственно-параметрическое взаимодействие мод не рассматривалось. В данной работе выполнен анализ

такого взаимодействия при смешении четырех быстрых  $TE_2$ -мод (двух распространяющихся вперед и двух — назад) трехслойного планарного волновода с оптически линейными правоориентированной покровной средой и левоориентированной пленкой на правоориентированной подложке, обладающей эффектом Керра.

## 2. МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Следуя работам [10, 14, 15, 17, 19–21, 23–28], модельные соотношения, описывающие зависимости относительной диэлектрической ( $\epsilon_f$ ) и магнитной ( $\mu_f$ ) проницаемостей метаматериала тонкой левоориентированной пленки, находящейся между полуграниченными правоориентированными диэлектрическими подложкой и покровной средой (см. рис. 1), от частоты  $\omega$ , можно представить в следующем виде:

$$\epsilon_f = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \mu_f = 1 - F \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_m^2}, \quad (1)$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота,  $\omega_m$  — частота магнитного резонанса,  $F$  — фактор заполнения метаматериала ( $0 < F < 1$ ). Диапазон частот, в котором проницаемости  $\epsilon_f$  и  $\mu_f$  являются отрицательными

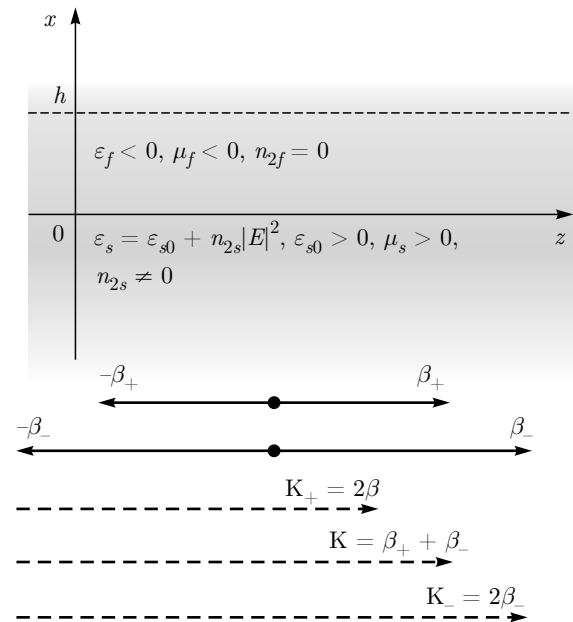


Рис. 1. Левоориентированная пленка на нелинейной подложке. Волновые векторы (сплошные) вперед и назад распространяющихся мод, векторы (штриховые) парциальных интерференционных световых решеток

(пленка левоориентированная), зависит от соотношений между величинами  $\omega_p$ ,  $\omega_m$ , и  $\omega_m/(1-F)^{1/2}$  [24, 26].

В случае оптически линейной подложки частотная зависимость постоянных распространения быстрых волноводных мод тонкой левоориентированной пленки  $\beta(\omega)$  неявно задается следующим дисперсионным соотношением:

$$\operatorname{tg} k_f h = \frac{\chi_s \mu_f k_f^{-1} \mu_s^{-1} + \chi_c \mu_f k_f^{-1} \mu_c^{-1}}{1 - \chi_s \chi_c \mu_f^2 k_f^{-2} \mu_s^{-1} \mu_c^{-1}}, \quad (2)$$

где

$$k_f = [\varepsilon_f \mu_f (\omega/c)^2 - \beta^2]^{1/2}, \quad (3)$$

$$\chi_{c,s} = [\beta^2 - \varepsilon_{c,s} \mu_{c,s} (\omega/c)^2]^{1/2}. \quad (4)$$

Здесь  $h$  — толщина пленки;  $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_s$  и  $\mu_c$ ,  $\mu_s$  — относительные диэлектрические и магнитные проницаемости покровной среды ( $c$ ), подложки ( $s$ ) соответственно;  $c$  — скорость света в вакууме. На рис. 2 сплошной кривой представлен фрагмент зависимости  $\beta(\omega)$  быстрой  $TE_2$ -моды, рассчитанной вблизи частоты  $\omega_0$ , при которой групповая скорость равна нулю, для параметров таких же, как и в работе [24]:  $h = 330$  нм,  $\varepsilon_c = \mu_c = \mu_s = 1$ ,  $\varepsilon_s = 2$ ,  $\omega_p = 3.46 \cdot 10^{15}$  рад/с,  $\omega_m = 1.63 \cdot 10^{15}$  рад/с,  $F = 0.5$ .

Из рис. 2 следует, что в частотном диапазоне от частоты отсечки ( $\omega_{cut}$ ) до частоты нуля групповой скорости ( $\omega_0$ ) могут распространяться только четыре быстрые  $TE_2$ -моды (см. рис. 1). Фазовые скорости двух мод, распространяющихся вперед, с волновыми векторами  $\beta_+$  и  $\beta_-$  направлены вдоль положительного направления оси  $z$ , а фазовые скорости двух мод, распространяющихся назад, с волновыми векторами  $-\beta_+$  и  $-\beta_-$  направлены вдоль ее отрицательного направления. При этом групповые скорости (положительные) мод с волновыми векторами  $\pm\beta_+$  противоположны групповым скоростям (отрицательным) мод  $\pm\beta_-$ . Зависимость компоненты  $y$  электрической напряженности быстрых  $TE$ -мод от координаты  $x$  может быть описана следующей безразмерной функцией с максимумом равным единице:

$$\begin{aligned} \psi(x, \beta) &= (-1)^\eta \left(1 + \mu_f^2 \chi_c^2 \mu_c^{-2} k_f^{-2}\right)^{-1/2} \times \\ &\quad \times \exp[\chi_c(h-x)], \quad x > h, \\ \psi(x, \beta) &= \left[1 + \mu_f^2 \chi_s^2 \mu_s^{-2} k_f^{-2}\right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \left[\cos(k_f x) + \mu_f \chi_s \mu_s^{-1} k_f^{-1} \sin(k_f x)\right], \quad (5) \\ &\quad \quad \quad 0 \leq x \leq h, \\ \psi(x, \beta) &= \left[1 + \mu_f^2 \chi_s^2 \mu_s^{-2} k_f^{-2}\right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \exp(\chi_s x), \quad x < 0, \end{aligned}$$

где  $\eta$  — модовый индекс, равный числу нулей этой функции, а зависимость параметров  $\mu_f$ ,  $\chi_{s,c}$  и  $k_f$  от постоянной распространения  $\beta$  опущена.

Рассмотрим самовоздействие светового поля, образованного  $TE_2$ -модами с волновыми векторами  $\pm\beta_+$  и  $\pm\beta_-$ , в тонкой левоориентированной пленке (см. рис. 1 и 2) на подложке с нелинейным оптическим откликом керровского типа, считая, что возмущения относительной диэлектрической проницаемости подложки  $\Delta\varepsilon_s$  пропорциональны интенсивности светового поля ( $\Delta\varepsilon_s \propto |E_\omega|^2$ ) [5, 6, 34, 36]. В этом случае компонента  $y$  электрической напряженности суммарного электромагнитного поля мод может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{I_0} \left[ C_+^f(z) \psi_+(x) \exp(-i\beta_+ z) + \right. \\ &+ C_-^f(z) \psi_-(x) \exp(-i\beta_- z) + C_+^b(z) \psi_+(x) \exp(i\beta_+ z) + \\ &\quad \left. + C_-^b(z) \psi_-(x) \exp(i\beta_- z) \right] \exp(i\omega t) + \text{c.c.} = \\ &= (E_\omega/2) \exp(i\omega t) + \text{c.c.}, \quad (6) \end{aligned}$$

где  $I_0$  — максимальная интенсивность светового поля в волноводе;  $C_+^{f,b}(z)$  и  $C_-^{f,b}(z)$  — безразмерные амплитудные функции, описывающие медленные изменения полей вперед ( $f$ ) и назад ( $b$ ) распространяющихся мод за счет их взаимодействия и нормированные так, что  $|C_+^f|^2 + |C_+^b|^2 + |C_-^f|^2 + |C_-^b|^2 = 1$ ,  $\psi_+(x) = \psi(x, \beta_+)$  и  $\psi_-(x) = \psi(x, \beta_-)$ . При этом пространственное распределение электрической напряженности  $E_\omega$  должно подчиняться нелинейному уравнению Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_\omega}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_\omega}{\partial x^2} + \varepsilon(x) \mu(x) \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \times \\ \times \left(1 + \frac{3}{4} n_2(x) |E_\omega|^2\right) E_\omega = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

где зависимость относительных диэлектрической  $\varepsilon(x)$ , магнитной  $\mu(x)$  проницаемостей и нелинейного оптического коэффициента  $n_2(x)$  от поперечной координаты является кусочно-постоянной (см. рис. 1).

Пара мод одного типа, распространяющихся вперед и назад, в обычных волноводах на основе правоориентированных материалов с эффектом Керра приводит к формированию локального пространственного возмущения диэлектрической проницаемости, пропорционального интенсивности суммарного светового поля мод. При этом внутримодовое взаимодействие приводит только к фазовой само- и кросс-модуляции [5, 6, 34, 36]. Отсутствие внутримодового энергообмена при таком взаимодействии связано с тем, что кроссоставляющие возмущения диэлектрической проницаемости оказывают обратное влияние только на моды, их же и сформировавшие.

В рассматриваемом случае самовоздействие четырех мод тонкой левоориентированной пленки на керровской подложке приводит к формированию пространственного возмущения ее диэлектрической проницаемости, кроссоставляющие которого, сформированные под действием какой-либо пары мод, например, с волновыми векторами  $\beta_+$  и  $-\beta_-$  (см. рис. 1), оказывают обратное влияние не только на моды этой исходной пары, но и на две другие моды, например, с волновыми векторами  $-\beta_+$  и  $\beta_-$ . Пространственно-параметрическое смешение этих мод, обусловленное такими составляющими суммарного возмущения диэлектрической проницаемости, может привести к энергообмену между ними, аналогично энергообмену при вырожденном четырехволновом взаимодействии [5, 6, 35].

### 3. УРАВНЕНИЯ СВЯЗАННЫХ МОД И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

В общем случае эффект Керра приводит к самовоздействию  $TE_2$ -мод тонкой левоориентированной пленки с волновыми векторами  $\beta_+$ ,  $-\beta_+$ ,  $\beta_-$  и  $-\beta_-$  и формированию в подложке пространственных решеток диэлектрической проницаемости с волновыми векторами  $\mathbf{K}_+ = 2\beta_+$ ,  $\mathbf{K} = \beta_+ - \beta_-$  и  $\mathbf{K}_- = 2\beta_-$  (см. рис. 1) с неоднородными амплитудами. Все три элементарные решетки дают вклад во взаимодействие между модами. Однако не все элементарные процессы удовлетворяют условию фазового синхронизма [5, 6, 34–36]. Например, такому условию не удовлетворяет взаимодействие мод с волновыми векторами  $\beta_+$  и  $-\beta_+$  на решетке с вектором  $\mathbf{K}_-$ . Величина векторной расстройки для несинхронных процессов кратна межмодовому расстоянию  $\Delta\beta = \beta_- + \beta_+$  (см. рис. 2). Вклад таких процессов пренебрежимо мал, если обратная величина  $\Delta\beta^{-1}$  много меньше эффективной длины нелиней-

ного взаимодействия [35]. В рассматриваемом случае, если частота взаимодействия отличается от частоты нуля групповой скорости моды более чем на  $10^9$  рад/с, то  $\Delta\beta^{-1} \ll 1$  мм, что значительно меньше эффективной длины взаимодействия для волноводов с эффектом Керра [34, 36]. Ниже мы пренебрегаем вкладом элементарных процессов, не удовлетворяющих условию фазового синхронизма.

Следующие уравнения связанных мод относительно медленноменяющихся на длине световой волны функций  $C_{\pm}^{f,b}(z)$  и  $C_{\pm}^{f,b*}(z)$  можно получить из уравнения Гельмгольца (7) с помощью условия ортогональности электромагнитных полей мод [1–3, 34, 36, 37]:

$$\frac{dC_+^f}{dz} = -i\frac{\gamma}{2} \left\{ (|C_+^f|^2 + 2|C_+^b|^2) C_+^f + 2g \left[ (|C_-^f|^2 + |C_-^b|^2) C_+^f + C_+^{b*} C_-^f C_-^b \right] \right\}, \quad (8)$$

$$\frac{dC_{\pm}^b}{dz} = i\frac{\gamma}{2} \left\{ (2|C_+^f|^2 + |C_+^b|^2) C_{\pm}^b + 2g \left[ (|C_-^f|^2 + |C_-^b|^2) C_{\pm}^b + C_+^{f*} C_-^f C_-^b \right] \right\}, \quad (9)$$

$$\frac{dC_-^f}{dz} = i\frac{\gamma}{2} \left\{ g_1 (|C_-^f|^2 + 2|C_-^b|^2) C_-^f + 2g \left[ (|C_+^f|^2 + |C_+^b|^2) C_-^f + C_+^f C_+^b C_-^{b*} \right] \right\}, \quad (10)$$

$$\frac{dC_-^b}{dz} = -i\frac{\gamma}{2} \left\{ g_1 (2|C_-^f|^2 + |C_-^b|^2) C_-^b + 2g \left[ (|C_+^f|^2 + |C_+^b|^2) C_-^b + C_+^f C_+^b C_-^{f*} \right] \right\}, \quad (11)$$

где звездочка «\*» в верхнем индексе означает комплексное сопряжение и введены следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{3\pi n_{2s} I_0 J_+}{2\lambda n_+ N_+}, \quad (12)$$

$$g = \frac{J_-}{J_+} \frac{n_+ N_+}{n_- N_-}, \quad g_1 = \frac{J_-}{J_+} \left( \frac{n_+ N_+}{n_- N_-} \right)^2, \quad (13)$$

$$N_+ = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{-1}(x) \psi_+^2(x) dx, \quad (14)$$

$$N_- = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^{-1}(x) \psi_-^2(x) dx,$$

$$\begin{aligned}
 J_+ &= \int_{-\infty}^0 \psi_+^4(x) dx, \\
 J &= \int_{-\infty}^0 \psi_+^2(x)\psi_-^2(x) dx, \\
 J_- &= \int_{-\infty}^0 \psi_-^4(x) dx,
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

где  $n_{\pm} = \beta_{\pm}c/\omega$  — эффективные показатели преломления мод,  $\lambda$  — длина световой волны в вакууме. Точные аналитические выражения для нормировочных интегралов ( $N_+$ ,  $N_-$ ) и интегралов перекрытия ( $J_+$ ,  $J$ ,  $J_-$ ) здесь опущены, их нетрудно получить, используя соотношение (5). Заметим, что знак исходного нормировочного интеграла для мод с отрицательной групповой скоростью противоположен знаку нормировочного интеграла для мод с положительной групповой скоростью. Это различие знаков учтено непосредственно в уравнениях (8)–(11).

Члены в правой части каждого уравнения связанных мод, содержащие в качестве множителя функцию, производная от которой образует левую часть этого же уравнения, описывают вклады само- и кросс-модуляции. Оставшиеся члены в правых частях каждого уравнения, например член  $C_+^{b*}C_-^fC_-^b$  в уравнении (8), описывают изменение комплексной амплитуды моды в процессе ее смешения с другими модами за счет составляющих возмущения диэлектрической проницаемости подложки, в формировании которых исходная мода непосредственного вклада не дает. Отметим, что эффективность этих последних элементарных пространственно-параметрических процессов пропорциональна коэффициенту  $g$ , величина которого определяется перекрытием полей мод с противоположным направлением групповых скоростей (см. (13)–(15)). В случае взаимодействия только двух мод, распространяющихся вперед и назад, как, например, в обычных правоориентированных волноводах [5,6,34], такое пространственно-параметрическое смешение отсутствует.

Уравнения связанных мод (8)–(11) представлены в форме, в которой эффективность взаимодействия пропорциональна постоянной связи  $\gamma$  и коэффициентам 1,  $g$ ,  $g_1$ . Эти коэффициенты описывают относительные вклады само- и кросс-модуляции мод с положительной групповой скоростью (коэффициент равен 1), кросс-модуляции мод с противоположными групповыми скоростями ( $g$ ) и само- и кросс-модуляции мод с отрицательной групповой

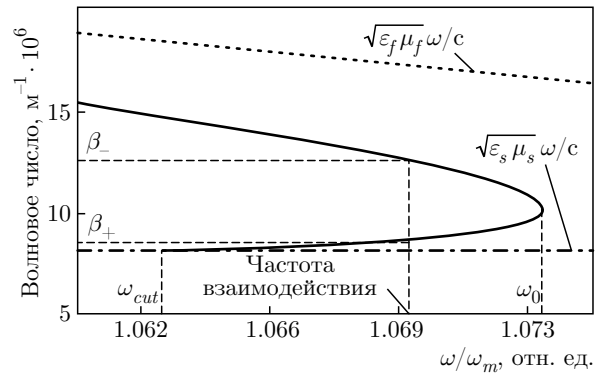


Рис. 2. Дисперсионные зависимости постоянной распространения  $TE_2$ -моды (сплошная кривая) и волновых чисел электромагнитных волн в объемных материалах пленки (штриховая линия) и невозмущенной подложки (штрих-пунктир)

скоростью ( $g_1$ ). Вследствие неравенства  $\beta_+ < \beta_-$  (см. рис. 2) поперечное затухание в подложке (и в покровной среде) мод с отрицательной групповой скоростью большей, чем затухание мод с положительной групповой скоростью (см. (5)). Поэтому интегралы перекрытия удовлетворяют условию  $J_- < J < J_+$ , которое совместно с неравенством  $n_+ < n_-$  приводит к соотношению  $1 < g < g_1$ . Отметим, что отклонение коэффициентов  $g$  и  $g_1$  от единицы в окрестности частоты нуля групповой скорости, мало [38].

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ МОД

Система нелинейных уравнений (8)–(11) может быть использована для анализа перераспределения фаз между взаимодействующими  $TE_2$ -модами и энергообмена между ними. На основе этих уравнений можно показать, что нормированные интенсивности взаимодействующих мод ( $I_+^{f,b} = |C_+^{f,b}|^2$  и  $I_-^{f,b} = |C_-^{f,b}|^2$ ) удовлетворяют следующим элементарным законам сохранения:

$$I_+^f(z) + I_+^b(z) = I_+, \quad I_-^f(z) + I_-^b(z) = I_-, \tag{16}$$

$$I_+^f(z) + I_-^b(z) - I_+^b(z) - I_-^f(z) = S. \tag{17}$$

Формулы (16) соответствуют сохранению энергии мод, распространяющихся вперед (инвариант  $I_+$ ) и назад (инвариант  $I_-$ ). Условие  $I_+ + I_- = 1$  соответствует фундаментальному закону сохранения энергии светового поля в непоглощающей среде. Инвариант (17) означает сохранение суммарной мощно-

сти, переносимой модами волновода. Действительно, нормированная мощность, переносимая вдоль положительного направления оси  $z$  (см. рис. 1), равна сумме  $I_+^f + I_-^b$ , а мощность, переносимая вдоль отрицательного направления, равна сумме  $I_+^b + I_-^f$ . Тогда общая нормированная мощность, переносимая вдоль волновода, определяется формулой (17).

Интенсивности четырех мод можно выразить через три независимых инварианта, определяемых формулами (16), (17), и одну функцию

$$G(z) = I_+^f(z) + I_-^f(z) - I_+^b(z) - I_-^b(z) \quad (18)$$

следующим образом:

$$I_{\pm}^f(z) = \pm \frac{S}{4} + \frac{I_{\pm}}{2} + \frac{G(z)}{4}, \quad (19)$$

$$I_{\pm}^b(z) = \mp \frac{S}{4} + \frac{I_{\pm}}{2} - \frac{G(z)}{4}. \quad (20)$$

Функция  $G(z)$  может быть интерпретирована как разность нормированных мощностей  $S_+ = I_+^f(z) - I_+^b(z)$  и  $S_- = I_-^b(z) - I_-^f(z)$ , переносимых модами соответственно с положительной и отрицательной групповой скоростью. Ее модуль не может быть больше единицы.

Уравнения связанных мод (8)–(11) могут быть редуцированы к следующим двум уравнениям относительно функции  $G(z)$  и фазы  $\Phi(z)$  произведения комплексных амплитуд  $C_+^{f*} C_+^{b*} C_-^f C_-^b = M \exp(i\Phi)$ :

$$\frac{dG}{dz} = -8g\gamma M(G) \sin \Phi, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \Phi = \frac{\gamma}{2} \left\{ \left[ \frac{1+g_1}{4} G + \frac{1-g_1}{4} S \right] - \right. \\ \left. - 2g \left[ \frac{G^3}{16} - \left( \frac{1}{8} - \frac{\delta}{4(1+\delta)^2} + \frac{S^2}{16} \right) G - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1-\delta}{8(1+\delta)} S \right] \frac{\cos \Phi}{M(G)} \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

где  $\delta = I_+/I_-$  и модуль произведения  $M(G)$  выражается через функцию  $G(z)$  следующим образом:

$$\begin{aligned} M(G) = \frac{1}{4} \left\{ \left[ \frac{\delta^2}{(1+\delta)^2} - \frac{(G+S)^2}{4} \right] \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{(1+\delta)^2} - \frac{(G-S)^2}{4} \right] \right\}^{1/2}. \quad (23) \end{aligned}$$

Величина  $M \exp(i\Phi)$  описывает самосогласованное влияние друг на друга возмущений диэлектрической проницаемости подложки, сформированных под действием интенсивностей двух составляющих светового поля, каждая из которых образована модами с противоположным направлением групповых

скоростей и пропорциональна одному из произведений комплексных амплитуд  $C_+^{f*} C_-^b$  или  $C_+^b C_-^{f*}$ . Если фазовое рассогласование  $\Phi(z)$  этих возмущений изменяется по длине взаимодействия ( $\Phi(z) \neq \text{const}$ ), то такое влияние приводит к изменению за счет взаимодействия не только фаз взаимодействующих мод, но и их интенсивностей.

Уравнения (21) и (22) с учетом соотношения (23) описывают нелинейную колебательную систему второго порядка, образованную величинами  $G(z)$  и  $\Phi(z)$  [39, 40]. Первый интеграл  $W$ , являющийся аналогом закона сохранения энергии нелинейного маятника, для такой системы может быть получен в следующем виде:

$$\begin{aligned} W = M(G(z)) \cos \Phi(z) - \\ - \frac{1+g_1}{64g} G^2(z) - \frac{1-g_1}{32g} S G(z). \quad (24) \end{aligned}$$

Инвариант  $W$  позволяет представить решение этих уравнений относительно функции  $G(z)$  в виде квадратуры:

$$\gamma z = \pm \int_{G_0}^G \frac{dq}{\sqrt{H(q)}}, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} H(q) = 64g^2 M^2(q) - \left[ 8gM(G_0) \cos \Phi_0 + \right. \\ \left. + \frac{1+g_1}{8} (q^2 - G_0^2) + \frac{1-g_1}{4} (q - G_0) \right]^2 \quad (26) \end{aligned}$$

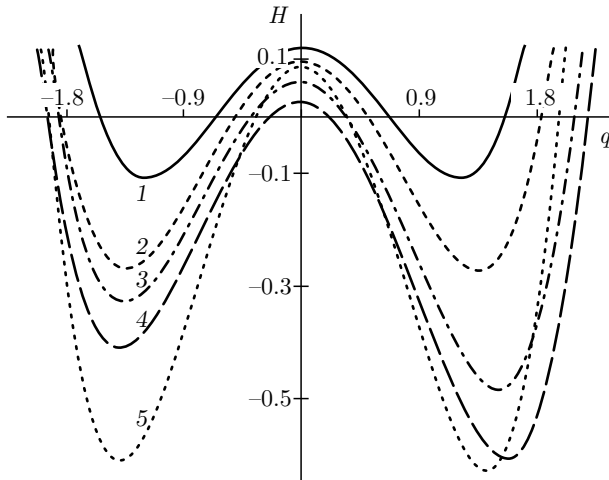
и введены обозначения  $G_0 = G(0)$  и  $\Phi_0 = \Phi(0)$ .

Соотношения (16)–(26) описывают изменение интенсивностей взаимодействующих мод по координате  $z$ . Решения относительно фаз  $\phi_{+,-}^{f,b}$  комплексных амплитуд

$$C_{+,-}^{f,b} = (I_{+,-}^{f,b})^{1/2} \exp(i\phi_{+,-}^{f,b}),$$

которые могут быть получены из уравнений связанных мод (8)–(11) с учетом найденных инвариантов  $I_{\pm}$ ,  $S$  и  $W$  (см. (16), (17) и (24)) и функции  $G(z)$ , здесь опущены.

Очевидно, что формула (25) дает вещественную зависимость  $G(z)$  при положительных значениях полинома четвертой степени  $H(q)$ , который имеет четыре вещественных корня  $q_j$  ( $j = 1, \dots, 4$ ) для физически реализуемых параметров  $\delta$ ,  $S$ ,  $G_0$ ,  $\Phi_0$ . Если эти корни упорядочить в порядке возрастания  $q_1 \leq q_2 \leq q_3 \leq q_4$ , то величины  $q_2$  и  $q_3$  всегда будут удовлетворять неравенствам  $-1 \leq q_2$  и  $q_3 \leq 1$ . Тогда величина  $q$ , при которой  $H(q) \geq 0$  и  $|G(z)| \leq 1$ , лежит в интервале  $q_2 \leq q \leq q_3$ .



**Рис. 3.** Зависимости  $H(q)$  для отстроек по частоте от нуля групповой скорости моды  $\Delta\omega \approx 2.075 \cdot 10^{11}$  рад/с (кривые 1–4) и  $\Delta\omega \approx 10^9$  рад/с (5) при различных условиях взаимодействия: 1 –  $S = 0, \delta = 2, \Phi_0 = 0, G_0 = 0.5$ ; 2 –  $S = 0, \delta = 2, \Phi_0 = \pi/2, G_0 = 0.5$ ; 3 –  $S = 0.5, \delta = 1, \Phi_0 = 0, G_0 = 0.2$ ; 4, 5 –  $S = 0.5, \delta = 1, \Phi_0 = \pi/4, G_0 = 0.2$

Рисунок 3 дает представление о трансформации характера зависимости  $H(q)$  при изменении параметров взаимодействия. Кривые 1–4 на этом рисунке рассчитаны для взаимодействия, которому отвечает отстройка по частоте от нуля групповой скорости моды  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega \approx 2.075 \cdot 10^{11}$  рад/с. В этом случае коэффициенты  $g = 0.78, g_1 = 0.62$  заметно отличаются от единицы. Кривая 5 рассчитана для взаимодействия со значительно меньшей отстройкой  $\Delta\omega \approx 10^9$  рад/с, при которой коэффициенты  $g = 0.98, g_1 = 0.96$  близки к единице.

Зависимость  $H(q)$  может быть как симметричной, так и асимметричной. Симметричные зависимости  $H(q)$  отвечают случаю нулевой переносимой мощности ( $S = 0$ ). При этом, если  $\sin \Phi_0 = 0$ , то  $q_2 = -|G_0|$  и  $q_3 = |G_0|$  (см. кривую 1). Если  $\sin \Phi_0 \neq 0$ , то  $|q_{2,3}| > |G_0|$  (см. кривую 2).

При  $S \neq 0$  зависимость полинома четвертой степени  $H(G)$  общего вида является асимметричной (см. кривые 3–5). При этом, если  $\sin \Phi_0 = 0$ , то один из корней  $q_{2,3}$  равен  $G_0$  (см. кривую 3).

Следует отметить, что на частоте взаимодействия вблизи нуля групповой скорости моды, когда  $g \approx g_1 \approx 1$ , при  $\delta = 1$  зависимость  $H(q)$  практически симметрична независимо от значения  $S$  (см. кривую 5).

В общем случае, с увеличением абсолютного значения координаты  $z$  от нуля до бесконечности функция  $G(z)$ , задаваемая формулой (25), изменяется с периодом равным

$$\Lambda = \frac{2}{\gamma} \int_{q_2}^{q_3} 1/\sqrt{H(q)} dq. \tag{27}$$

Расчет зависимости  $G(z)$  по формуле (25) в пределах периода  $\Lambda$  требует согласования знака перед интегралом и пути интегрирования. Существуют два противоположных пути интегрирования. Первый из них соответствует интегрированию, при котором величина  $G$  непрерывно меняется в соответствии с переходами  $G_0 \rightarrow q_3 \rightarrow q_2 \rightarrow G_0$ , второй соответствует противоположному направлению,  $G_0 \rightarrow q_2 \rightarrow q_3 \rightarrow G_0$ . Если  $\sin \Phi_0 < 0$  ( $\sin \Phi_0 > 0$ ), то должен быть выбран первый (второй) путь интегрирования (см. (19)). Если  $\sin \Phi_0 = 0$ , то производная  $dG(z)/dz$  равна нулю в точке  $z = 0$  (см. (21)), а сама функция  $G(z)$  в этой точке достигает либо минимума, и тогда интегрирование необходимо выполнять вдоль первого пути, либо максимума, и тогда выбирается второй путь интегрирования. Знак в правой части формулы (25) выбирается так, чтобы при изменении верхнего предела интеграла абсолютное значение координаты  $z$  нарастало в каждом из переходов пути интегрирования.

### 5. ЭНЕРГООБМЕН МЕЖДУ МОДАМИ

Из формул (18)–(20) следует, что описание обмена энергией между модами, следствием которого является изменение интенсивностей мод по координате  $z$ , может быть выполнено с использованием единственной периодической функции  $G(z)$ , равной разности мощностей  $S_+$  и  $S_-$  (см. экспликацию к формуле (18)), переносимых модами с положительной и отрицательной групповыми скоростями. При этом рост (спад) величины  $G$  с увеличением координаты  $z$  свидетельствует об усилении (ослаблении) интенсивностей мод, распространяющихся вперед, и ослаблении (усилении) интенсивностей мод, распространяющихся назад. Чем больше амплитуда у функции  $G(z)$ , тем эффективнее энергообмен. Если  $G(z) = \text{const}$ , то энергообмен между модами отсутствует, взаимодействие приводит только к фазовой само- и кросс-модуляции мод. Из уравнения (21) следует, что эффективность энергообмена пропорциональна коэффициенту  $g$ , который уменьшается при удалении частоты взаимодействия от частоты нуля групповой скорости из-за увеличения разницы постоянных распространения мод и, как следствие, уменьшения перекрытия полей мод в подложке (см. (13)–(15)). Для параметров, использованных при расчете дисперсионных за-

висимостей на рис. 2, коэффициент  $g$  на частоте отсечки ( $\omega_0 - \omega_{cut} \approx 1.8 \cdot 10^{13}$  рад/с) падает до величины примерно 0.05, что соответствует пренебрежимо низкой эффективности энергообмена. Значительная эффективность энергообмена достигается только при небольших частотных отстройках от нуля групповой скорости. Ниже результаты численных расчетов, демонстрирующих основные особенности обмена энергией между взаимодействующими модами, представлены для небольшой отстройки по частоте  $\Delta\omega \approx 1.008 \cdot 10^9$  рад/с от частоты нуля групповой скорости моды ( $g = 0.98$  и  $g_1 = 0.96$ ).

Форма, период  $\Lambda$  и амплитуда функции  $G(z)$  сильно зависят от четырех параметров  $\delta = I_+/I_-$ ,  $S$ ,  $\Phi_0$ ,  $G_0$ . Отметим, что величина  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq \infty$ ) совместно с равенством  $I_+ + I_- = 1$  задает величины инвариантов  $I_+ = \delta/(1 + \delta)$  и  $I_- = 1/(1 + \delta)$ . Параметры  $\delta$ ,  $S$  ( $-1 \leq S \leq 1$ ) и  $\Phi_0$  независимы. При этом минимум ( $G_{0min} = \max(-S - 2I_+; S - 2I_-)$ ) и максимум ( $G_{0max} = \min(-S + 2I_+; S + 2I_-)$ ) начальной величины  $G_0 = G(0)$  определяются численными значениями  $\delta$  и  $S$ . Для каждой пары параметров  $\delta$  и  $S$  существует такое начальное значение  $G_{0c}$ , при котором  $G(z) = G_{0c}$  (энергообмен отсутствует), а фазовое рассогласование  $\Phi(z) \equiv \Phi_0 = \pi n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$  (см. (21)). Алгебраическое уравнение относительно величины  $G_{0c}$  нетрудно получить из уравнения (22) с учетом соотношения (23). Если  $\delta = 1$  и  $S = 0$ , то это уравнение имеет три корня  $G_{0c} = 0, \pm 1$ . Величина  $G_{0c} = 0$  отвечает одинаковым нормированным интенсивностям всех четырех мод,  $I_{\pm}^{f,b} = 1/4$ . Величина  $G_{0c} = 1(-1)$  отвечает случаю

$$I_+^f = I_-^b = 1/2 \quad (I_+^b = I_-^f = 0)$$

и

$$I_-^f = I_+^b = 0 \quad (I_-^b = I_+^f = 1/2).$$

Для любого другого набора параметров  $\delta \neq 1$  или  $S \neq 0$  существует только одно отличное от нуля значение  $G_{0c}$ , в общем случае зависящее от знака  $\cos(\pi n)$ . Значение  $G_{0c} = 0$ , отвечающее параметрам  $\delta \neq 1$ ,  $S = 0$  или  $\delta = 1$ ,  $S = \pm 1$ , не зависит от этого знака. Для  $\delta = 1$ ,  $S \neq 0$  и  $S \neq \pm 1$  величина  $G_{0c}$  стремится к нулю ( $G_{0c} \rightarrow 0$ ) при стремлении к единице коэффициента  $g_1$  ( $g_1 \rightarrow 1$ ), определенно формулой (13). Если  $G_0 > G_{0c}$  ( $G_0 < G_{0c}$ ), то при условии  $\Phi_0 = \pi n$  функция  $G(z)$  достигает максимума (минимума) в начальной точке  $z = 0$ . При условии  $G_0 \neq G_{0c}$  величина  $G_{0c}$  равна среднему за период значению функции  $G(z)$ .

Функция  $G(z)$  рассчитанная для параметров  $\delta = 5$ ,  $\Phi_0 = 0$  и различных величин переносимой

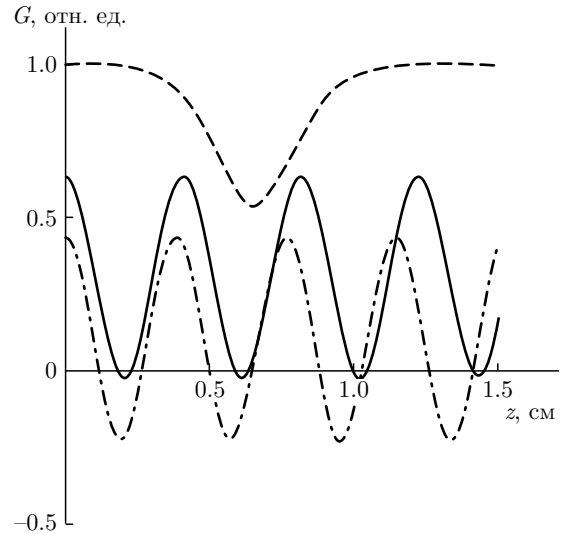


Рис. 4. Функции  $G(z)$ , рассчитанные для  $\delta = 5$ : сплошная кривая —  $S = 0.3$ ,  $G_0 \approx 0.633$ ; штриховая —  $S = 0.67$ ,  $G_0 \approx 0.999$ ; штрихпунктирная —  $S = 0.1$ ,  $G_0 \approx 0.433$

мощности  $S$  и начальных значений  $G_0$ , показана на рис. 4. В расчетах использовались следующие параметры:  $n_{2s} = 10^{-19}$  м<sup>2</sup>/В<sup>2</sup>,  $I_0 = 10^{15}$  В<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>,  $\lambda = 2\pi/\omega \approx 1.076$  мкм. Для принятых параметров величина постоянной связи приблизительно равна  $\gamma \approx 20.5$  см<sup>-1</sup>. Отметим, что величины  $G_0$ , использованные в расчетах, приблизительно равны максимально возможному для каждого из трех значений  $S$ . Из этого рисунка следует, что с ростом переносимой мощности растет и среднее за период значение этой функции, равное  $G_{0c}$ , а размах колебаний уменьшается. При этом гармонические колебания изменяются на колебания релаксационного типа [40].

На рис. 5 представлены зависимости нормированных интенсивностей мод от координаты  $z$ , соответствующие функции  $G(z)$ , показанной сплошной кривой на рис. 4. Участки усиления (ослабления) интенсивностей  $I_{\pm}^b$  и ослабления (усиления) интенсивностей  $I_{\pm}^f$  соответствуют участкам спада (роста) функции  $G(z)$ . Поэтому ослабление составляющей  $I_f = I_+^f + I_-^f = (1 + G)/2$  интенсивности общего светового поля, образованной модами с положительной фазовой скоростью, сопровождается усилением составляющей  $I_b = I_+^b + I_-^b = (1 - G)/2$  и наоборот. Эффективность перекачки энергии из одной составляющей  $I_f$  в составляющую  $I_b$  с ростом координаты  $z$  удобно оценивать величиной коэффициента

$$K(z) = \frac{(1 + G_0)(1 - G(z))}{(1 - G_0)(1 + G(z))}, \quad (28)$$



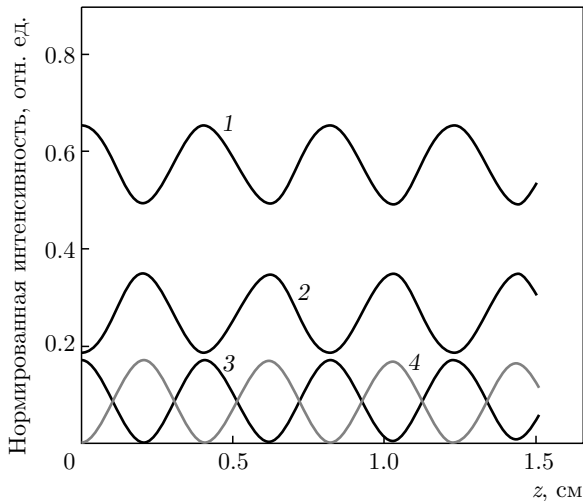


Рис. 5. Зависимости нормированных интенсивностей мод от координаты  $z$ , соответствующие сплошной кривой на рис. 4: 1 —  $I_+^f$ , 2 —  $I_+^b$ , 3 —  $I_-^f$ , 4 —  $I_-^b$

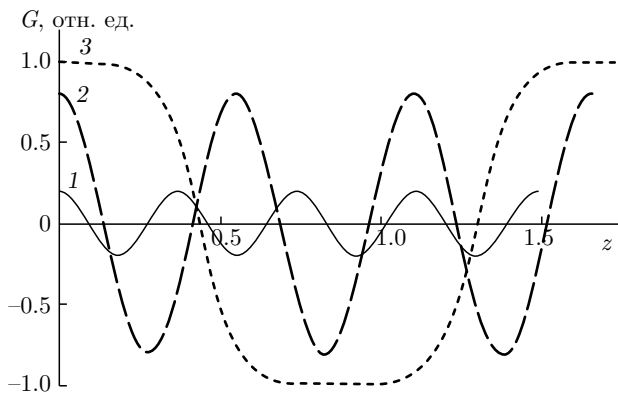


Рис. 6. Зависимости  $G(z)$ , рассчитанные для  $S = 0$ ,  $\delta = 1$ ,  $\Phi_0 = 0$  и различных  $G_0$ : 1 —  $G_0 = 0.2$ , 2 —  $0.8$ , 3 —  $0.999$

который достигает максимума при  $z = \Lambda/2$ . Для случаев взаимодействия, соответствующих кривым на рис. 4, максимальный энергообмен достигается для взаимодействия, соответствующего штриховой кривой ( $K(\Lambda/2) \approx 590$ ).

Условия взаимодействия, отвечающие кривым на рис. 4, не являются оптимальными для энергообмена. При нулевой начальной фазе  $\Phi_0 = 0$  значительно большее усиление слабой составляющей  $I_b$  и ослабление сильной  $I_f$  достигается для параметров  $S = 0$  и  $\delta = 1$ . Кривые 1, 2, 3 на рис. 6 показывают зависимости  $G(z)$ , рассчитанные для этих параметров и различных начальных значений  $G_0 = 0.2, 0.8, 0.999$  соответственно. В этом случае постоянная составляющая у периодической зависимости  $G(z)$  отсутствует ( $G_{0c} = 0$ ), амплитуда колебаний функции

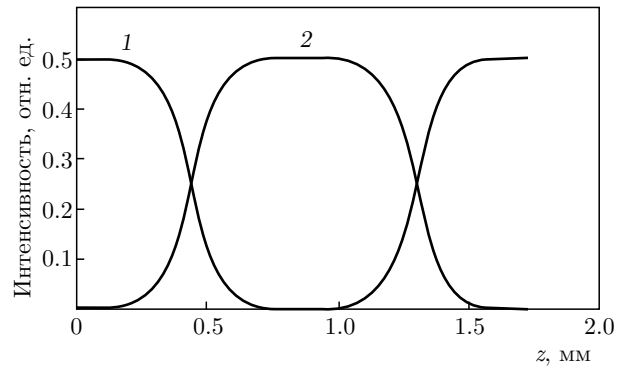


Рис. 7. Зависимости интенсивностей мод  $I_+^f = I_-^f$  (кривая 1) и  $I_+^b = I_-^b$  (кривая 2) от координаты  $z$ , соответствующие кривой 3 на рис. 6

$G(z)$  равна модулю ее начального значения ( $|G_0|$ ). При увеличении  $G_0$  ее период и форма заметно изменяются.

При малой амплитуде  $|G_0| \ll 1$  (см. кривую 1 на рис. 6) справедливы следующие приближенные формулы:

$$G(z) \approx G_0 \cos(2\pi z / \Lambda_{min}), \quad (29)$$

$$\Lambda_{min} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\gamma\sqrt{g(4g + g_1 + 1)}}. \quad (30)$$

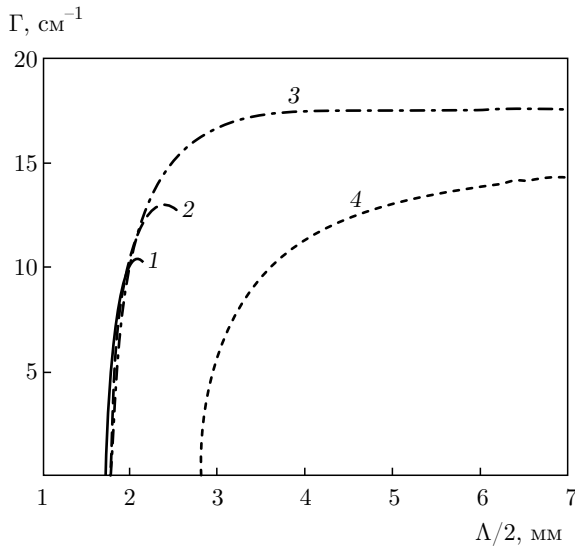
Для большой амплитуды  $|G_0| \approx 1$  (см. кривую 3 на рис. 6), приближенное соотношение для функции  $G(z)$  в пределах полупериода  $j\Lambda/2 \leq z < (j+1)\Lambda/2$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) может быть получено в виде

$$G(z) \approx (-1)^j G_0 \text{th} \left\{ \gamma \left( \frac{g^2}{4} - \frac{(g_1 + 1)^2}{64} \right)^{1/2} \times \left[ (2j + 1) \frac{\Lambda}{4} - z \right] \right\}. \quad (31)$$

В этом случае формула для периода функции может быть упрощена до следующего приближенного вида:

$$\Lambda \approx \frac{2}{\gamma} \left( \frac{g^2}{4} - \frac{(g_1 + 1)^2}{64} \right)^{-1/2} \times \left[ \ln \left( \frac{4g - g_1 - 1}{4g(1 - |G_0|)} \right) + 1 \right]. \quad (32)$$

Для параметров взаимодействия, отвечающих рис. 6, интенсивности мод, распространяющихся вперед, равны ( $I_+^f = I_-^f$ ), так же как интенсивности мод, распространяющихся назад ( $I_+^b = I_-^b$ ).



**Рис. 8.** Зависимости логарифмического коэффициента усиления  $\Gamma$  от полупериода взаимодействия: 1 —  $S = 0.5$ ,  $\delta = 1$  и  $\Phi_0 = 0$ ; 2 —  $S = 0$ ,  $\delta = 2$  и  $\Phi_0 = 0$ ; 3 —  $S = 0$ ,  $\delta = 1$  и  $\Phi_0 = 0$ ; 4 —  $S = 0$ ,  $\delta = 1$  и  $\Phi_0 = \pi/2$

На рис. 7 представлены зависимости этих интенсивностей от координаты  $z$  для случая взаимодействия, соответствующего кривой 3 на рис. 6. Такое взаимодействие при  $z = \Lambda/2 \approx 17.2$  мм инвертирует начальное отношение интенсивностей сильных и слабых мод, приблизительно равное 2000, в обратное. При этом максимальный коэффициент  $K$ , равный в этом случае  $K = (1 + G_0)^2 / (1 - G_0)^2$  (см. (28)), и характеризующий эффективность обмена энергией между модами, равен приблизительно  $4 \cdot 10^6$ . Это на три порядка больше, чем при взаимодействии, отвечающем штриховой кривой на рис. 4 с таким же начальным значением  $G_0 = 0.999$ .

Увеличение эффективности энергообмена при  $|G_0| \rightarrow 1$  сопровождается ростом периода взаимодействия ( $\Lambda \rightarrow \infty$ , см. (32)), что снижает значимость эффекта усиления (ослабления) слабой (сильной) составляющей светового поля. Комплексная оценка эффективности взаимодействия, учитывающая негативное влияние роста периода взаимодействия при увеличении эффективности перераспределения энергии между модами пленки, может быть выполнена на основе логарифмического коэффициента  $\Gamma = (2/\Lambda) \ln K(\Lambda/2)$ , аналогичного коэффициенту двухволнового усиления при попутном [41] и встречном [42] взаимодействии в объемных средах. На рис. 8 показаны зависимости коэффициента  $\Gamma$  от полупериода взаимодействия, полученные при варьировании начального значения  $G_0$  от 0 до

величины, равной  $(2/(1 + \delta)) + S$ . Характерно, что максимальное значение  $\Gamma$  у трех представленных зависимостей, рассчитанных для нулевого начального фазового рассогласования ( $\Phi_0 = 0$ ), достигается при полупериоде взаимодействия меньшем, чем максимальный полупериод, соответствующий максимальной величине  $G_0$ . Для случаев взаимодействия, соответствующих кривым 1 и 2, это различие не так существенно, как в случае взаимодействия при  $S = 0$  и  $\delta = 1$  (см. кривую 3). В последнем случае  $\Lambda \rightarrow \infty$  и  $\Gamma \rightarrow 0$  при  $G_0 \rightarrow 1$ , а максимальное значение  $\Gamma \approx 17.5 \text{ см}^{-1}$  достигается при периоде  $\Lambda \approx 4.5$  мм, соответствующем начальному значению  $G_0 \approx 0.963$ , которому, в свою очередь, отвечает начальное отношение интенсивности сильной составляющей светового поля к слабой ( $I_+^f/I_+^b = I_-^f/I_-^b$ ), приблизительно равное 53.

Отметим, что в общем случае начальное фазовое рассогласование  $\Phi_0$ , кратное  $\pi$ , может оказаться не оптимальным для усиления (ослабления) слабой (сильной) составляющей светового поля. Так, при фазовом рассогласовании кратном  $\pi/2$  ( $\Phi_0 = \pi n/2$ ) коэффициент усиления  $K$  (см. (28)) при прочих равных условиях может оказаться выше, чем при  $\Phi_0 = \pi n$  (см. (21)). Однако при  $\Phi_0 = \pi n/2$  (см. кривую 4 на рис. 8) период энергообмена  $\Lambda$  оказывается также выше, чем при  $\Phi_0 = \pi n$ , что снижает логарифмический коэффициент  $\Gamma$ .

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в планарном оптическом волноводе на основе оптически линейных правоориентированной покровной среды и тонкой левоориентированной пленки на правоориентированной подложке, обладающей нелинейным оптическим откликом за счет эффекта Керра, вблизи частоты нуля групповой скорости в двух противоположных направлениях могут распространяться четыре направляемые  $TE_2$ -моды одной частоты. Одинаковые по направлению фазовые скорости двух мод, распространяющихся вперед, или двух мод, распространяющихся назад, различны. Одна из двух мод, распространяющихся вперед или назад, имеет положительную групповую скорость, совпадающую по направлению с фазовой, что типично для плоских электромагнитных волн в обычных объемных правоориентированных средах, а другая — имеет отрицательную групповую скорость, противоположную фазовой, что характерно для электромагнитных волн в левоориентированных метаматериалах. Самовоздействие четырех мод тонкой левоориентированной

пленки на керровской подложке приводит к формированию пространственного возмущения ее диэлектрической проницаемости, кросссоставляющие которого, сформированные под действием какой-либо пары мод, оказывают обратное влияние не только на моды этой исходной пары, но и на две другие моды, что и приводит к внутримодовому энергообмену.

Аналитическое решение уравнений связанных мод получено относительно их интенсивностей с использованием четырех найденных независимых инвариантов. Элементарными инвариантами взаимодействия являются мощность  $S$ , переносимая модами, а также интенсивности  $I_+$  и  $I_-$  двух составляющих общего светового поля, образованных парой мод с положительными групповыми скоростями и парой мод с отрицательными групповыми скоростями соответственно. Изменения интенсивностей мод по длине взаимодействия могут быть представлены в виде линейных комбинаций инвариантов  $I_+$ ,  $I_-$ ,  $S$  и одной функции  $G(z)$ , равной разности мощностей, переносимых модами с положительной и отрицательной групповыми скоростями. Четвертый инвариант  $W$  есть энергия динамической системы на плоскости, образованной величиной  $G(z)$  и фазовым рассогласованием  $\Phi(z)$  возмущений диэлектрической проницаемости подложки, сформированных под действием интенсивностей двух составляющих светового поля, каждая из которых образована модами с противоположным направлением групповых скоростей.

Эффективность энергообмена периодически меняется вдоль направления взаимодействия и зависит от инвариантов  $I_+$ ,  $I_-$ ,  $S$ , начального фазового рассогласования  $\Phi_0 = \Phi(0)$  и начальной разности мощностей  $G_0 = G(0)$ . Следствием периодичности энергообмена является инвертирование начальных интенсивностей мод, распространяющихся вперед (назад), с положительной и отрицательной групповыми скоростями в интенсивности мод, распространяющихся назад (вперед), на полупериоде взаимодействия. Такое инвертирование при выполнении условий  $I_+ = I_-$ ,  $S = 0$ ,  $\Phi_0 = n\pi$  и  $|G_0| \rightarrow 1$  соответствует значительному усилению (ослаблению) слабых (сильных) составляющих светового поля. Однако при выполнении этих же условий период взаимодействия увеличивается до бесконечности, что снижает значимость большой эффективности энергообмена. Комплексная оценка эффективности энергообмена между вперед и назад распространяющимися полями на основе коэффициента двухволнового усиления показывает на то, что при любых значениях  $I_+$ ,  $I_-$ ,  $S$  и  $G_0$  этот коэффициент достигает

максимального значения на конечном полупериоде взаимодействия.

## ЛИТЕРАТУРА

1. М. Барноски, П. Тьен, Дж. Гоелл и др., *Введение в интегральную оптику*, Мир, Москва (1977).
2. Т. Тамир, *Интегральная оптика*, Мир, Москва (1978).
3. Р. Хансперджер, *Интегральная оптика*, Мир, Москва (1985).
4. L. A. Coldren, S. W. Corzine, and M. L. Masanovic, *Diode Lasers and Photonic Integrated Circuits*, Wiley, Hoboken (2012).
5. G. I. Stegeman, E. M. Wright, N. Finlayson, R. Zano, and C. T. Seaton, *J. Light. Technol.* **6**, 953 (1988).
6. G. I. Stegeman and C. T. Seaton, *J. Appl. Phys.* **58**, R57 (1985).
7. A. Boardman and P. Egan, *IEEE J. Quantum Electron.* **22**, 319 (1986).
8. M. Fontaine, *J. Appl. Phys.* **69**, 2826 (1991).
9. Л. И. Мандельштам, *ЖЭТФ* **15**, 475 (1945).
10. В. Г. Веселаго, *УФН* **92**, 517 (1967).
11. B. A. Munk, *Metamaterials*, Wiley, Hoboken (2009).
12. R. C. McPhedran, I. V. Shadrivov, B. T. Kuhlmey, and Y. S. Kivshar, *NPG Asia Mater.* **3**, 100 (2011).
13. M. Lapine, I. V. Shadrivov, and Y. S. Kivshar, *Rev. Mod. Phys.* **86**, 1093 (2014).
14. I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov, and Y. S. Kivshar, *Phys. Rev. E* **67**, 057602 (2003).
15. A. C. Peacock and N. G. R. Broderick, *Opt. Express* **11**, 2502 (2003).
16. Y. He, Z. Cao, and Q. Shen, *Opt. Commun.* **245**, 125 (2005).
17. A. V. Novitsky and L. M. Barkovsky, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **7**, S51 (2005).
18. А. В. Новицкий, Л. М. Барковский, *Оптич. ж.* **73**, 8 (2006).
19. H. Cory and T. Blum, *Microwave Opt. Technol. Lett.* **44**, 31 (2005).
20. Z. H. Wang, Z. Y. Xiao, and S. P. Li, *Opt. Commun.* **281**, 607 (2008).

21. L. F. Shen and Z. H. Wang, *J. Opt. Soc. Amer. A* **26**, 754 (2009).
22. Z. H. Wang, Z. Y. Xiao, and W. Y. Luo, *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* **11**, 015101 (2009).
23. S. Atakaramians, A. Arguros, S. C. Fleming, and B. T. Kuhlmey, *J. Opt. Soc. Amer. B* **30**, 851 (2013).
24. Д. А. Конкин, Р. В. Литвинов, Е. С. Парфенова, Р. А. А. Рахим, О. В. Стукач, *КЭ* **46**, 1040 (2016).
25. D. A. Konkin, R. V. Litvinov, and A. A. Shibelgut, *Progr. Electromagn. Res. Symp.* **2015**, 1825 (2015).
26. Д. А. Конкин, А. А. Шибельгут, Р. В. Литвинов, *Изв. Самарского научн. центра РАН* **17**, 83 (2015).
27. S. A. Taqa, H. M. Kullab, and I. M. Qadoura, *J. Opt. Soc. Amer. B* **30**, 2008 (2013).
28. A. Boardman and P. Egan, *J. Opt. A* **11**, 114032 (2009).
29. S. Hou, S. Zhang, Y. Liu, D. Wang, and J. Lei, *Optik* **125**, 6127 (2014).
30. K. Y. Kim, J.-H. Lee, Y. K. Cho, and H.-S. Tae, *Opt. Express* **13**, 3653 (2005).
31. L. F. Shen and Z. H. Wang, *J. Opt. Soc. Amer. B* **24**, 1847 (2007).
32. I. V. Shadrivov, R. W. Ziolkowski, A. A. Zharov, and Y. S. Kivshar, *Opt. Express* **13**, 481 (2005).
33. J. A. Ferrari and E. Frins, *Opt. Express* **19**, 13358 (2011).
34. Г. Агравал, *Нелинейная волоконная оптика*, Мир, Москва (1996).
35. С. Г. Одулов, М. С. Соскин, А. И. Хижняк, *Лазеры на динамических решетках*, Наука, Москва (1990).
36. V. Crosignani, A. Cutolo, and P. D. Porto, *J. Opt. Soc. Amer.* **72**, 1136 (1982).
37. Х.-Г. Унгер, *Планарные и волоконные оптические волноводы*, Мир, Москва (1980).
38. N. Litvinova, A. Buller, and R. Litvinov, *MicDAT* **2019**, 55 (2019).
39. Л. И. Мандельштам, *Полное собрание трудов*, АН СССР, Москва (1955).
40. М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, НИЦ «РХД», Ижевск (2000).
41. В. Л. Винецкий, Н. В. Кухтарев, С. Г. Одулов, М. С. Соскин, *УФН* **129**, 113 (1979).
42. Е. Ю. Агеев, Р. В. Литвинов, Н. Д. Хатьков, Л. В. Загребин, С. С. Шестов, *КЭ* **39**, 435 (2009).