

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОПОЛОГИИ МЕТРИКИ КЕРРА

*А. А. Шацкий**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 июля 2019 г.,
после переработки 17 сентября 2019 г.
Принята к публикации 17 сентября 2019 г.

Уравнения движения пробной частицы проинтегрированы для поля вращающейся черной дыры Керра (в соответствии с работой [1]). Ввиду отсутствия аналитических преобразований для диаграмм Картера–Пенроуза для метрики Керра, исследование топологии черной дыры Керра было выполнено путем аналитического исследования уравнений движения. Выполнен анализ преобразований для диаграмм Картера–Пенроуза для метрики Рейснера–Нордстрема. Исследована проблема граничных условий для топологии Рейснера–Нордстрема. Предложено решение этой проблемы граничных условий. Доказано, что в топологии Рейснера–Нордстрема возможен только единственный вариант перехода в другую вселенную. Для топологии Керра найдена возможность существования альтернативного перехода в другую вселенную, не совпадающую со вселенной для обычного перехода. Этот альтернативный переход осуществляется через поверхность с нулевой радиальной координатой (нулевой радиус). Найдены начальные условия для падающей частицы, соответствующие альтернативному переходу в другую вселенную. Оценены приливные силы, действующие на падающее тело в метрике Керра, и доказана возможность прохождения тела в другие вселенные без разрушения приливными силами.

DOI: 10.31857/S0044451020030098

1. ВВЕДЕНИЕ

Давно известно, что реальные черные дыры, существующие вечно (с самого рождения Вселенной¹⁾), находятся в пространстве со сложной топологией (см., например, [2]). Под реальными черными дырами (ЧД) здесь и далее будем подразумевать ЧД, обладающие либо угловым моментом (решение Керра), либо электрическим зарядом (решение Рейснера–Нордстрема), либо и тем и другим (решение Керра–Ньюмана).

Для заряженных (но не вращающихся) ЧД существует аналитическая (и графическая) диаграмма Картера–Пенроуза (см. ниже рис. 1), которая показывает, что такие ЧД существуют в пространстве со сложной топологией, объединяющей разные вселенные (разные части одной большой Вселенной).

* E-mail: shatskiyalex@gmail.com

¹⁾ С маленькой буквы будем писать слово «вселенная», подразумевая под этим разные части одной большой Вселенной, объединяющие разные участки в сложной топологии Вселенной.

Кроме того, заряженные ЧД могут быть аналитически исследованы до конца, т. е. можно, например, построить траектории пробных частиц в гравитационном поле этих ЧД. Более того, эти траектории могут быть продолжены под горизонт ЧД, потом далее под горизонт Коши этой ЧД вплоть до точки поворота траектории. При этом слабая сингулярность на горизонте Коши не является препятствием для продолжения этих траекторий через него (см. ниже). После точки поворота решение для траектории пробной частицы переходит на новый лист (в другой вселенной) и гладко сшивается в точке поворота.

При этом аналитическим признаком точки поворота траектории является обращение в нуль знаменателя в подынтегральном выражении квадратуры траектории (см. ниже). Разумеется, эта же точка совпадает с точкой поворота на диаграмме Картера–Пенроуза (ДКП) при построении на ней данной траектории.

К сожалению, аналитических преобразований для двумерных ДКП вращающихся ЧД не существует, что сильно затрудняет аналитическое исследование сложной топологии таких ЧД. Тем не менее есть все основания считать, что топология вращаю-

щихся ЧД также будет сложной, в отличие, например, от топологии незаряженных и невращающихся (шварцшильдовских) ЧД.

Основаниями для таких предположений являются несколько фактов, об исследовании которых и пойдет речь в данной работе.

2. ПРИЗНАКИ СЛОЖНОЙ ТОПОЛОГИИ

Первым признаком того, что топология ЧД будет сложной является наличие R -области внутри ЧД, т.е. существование горизонта Коши в решении. Ранее неоднократно было показано (см., например, работу [3]), что сингулярность, возникающая на горизонте Коши, является слабой по классификации Типлера [4], т.е. интегрируемой²⁾. В отличие от сильной (по Типлеру) сингулярности (которая также обязательно существует внутри любой черной дыры), материальные тела не успевают разрушиться приливными силами при прохождении через слабую сингулярность, так как время воздействия слабой сингулярности на пролетающее тело стремится к нулю.

Вторым признаком того, что топология ЧД будет сложной, является «отталкивание» сильной сингулярностью пробных частиц от себя. Что касается не пробных частиц, а тех, которые настолько массивны, что сами оказывают обратное влияние на гравитацию ЧД, то скорее всего они также будут отталкиваться сильной сингулярностью ЧД, но математического (или численного) подтверждения этому пока нет. При этом под «отталкиванием» подразумевается отсутствие реальных траекторий частиц, которые заканчивались бы на сильной сингулярности.

Для заряженных ЧД это было доказано аналитически (см., например, работу [5]).

3. ОСОБЕННОСТИ МЕТРИКИ КЕРРА

Решение для вращающейся ЧД (метрика Керра) в координатах (t, r, θ, φ) имеет вид

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} [dt - a \sin^2 \theta d\varphi]^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \times \\ \times [(r^2 + a^2)d\varphi - a dt]^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (1)$$

²⁾ Речь идет о сходимости интеграла $\int \sqrt{K} ds$, где K — скаляр Кречмана, а s — собственное время свободно падающей частицы [3].

$$f(r) := (1 - r_h^-/r)(1 - r_h^+/r), \quad (2)$$

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (3)$$

Здесь $\Delta := r^2 f$, a — угловой момент L вращения ЧД, выраженный в единицах ее массы M ($a := L/M$); используются безразмерные единицы $G = 1$ (гравитационная постоянная) и $c = 1$ (скорость света).

По асимптотике метрики (1) на бесконечности получаем

$$r_h^- + r_h^+ = 2M, \quad (4)$$

$$r_h^- r_h^+ = a^2, \quad (5)$$

$$r_h^+ := M + \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (6)$$

$$r_h^- := M - \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (7)$$

Отсюда получаем

$$\Delta := r^2 f = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (8)$$

Максимально возможное значение параметра a может быть равно массе M ЧД, и тогда внутренний горизонт Коши касается внешнего горизонта в такой вырожденной ЧД. Быстрее чем при $a = M$ черная дыра вращаться просто не может, иначе центробежные силы не дали бы возможности гравитации сформировать такую ЧД. Реально даже этот предел (когда $a = M$) не достижим — максимальной может быть величина a , примерно равная $0.998M$ [6].

Как известно, сильная сингулярность в решении Шварцшильда и в решении Рейснера – Нордстрема сосредоточена в одной точке, которая является центром симметрии решения. Что же касается решения Керра (вращающейся ЧД), то здесь сильная сингулярность сосредоточена на кольце. Геометрическое место точек этого сингулярного кольца соответствует радиальной координате r решения, которая оказывается равна нулю на сингулярности. Под сильной сингулярностью подразумевается обращение в бесконечность скаляра Кречмана K .

При вычислении K оказывается, что сингулярность в метрике Керра возникает не просто при $r = 0$ (как было для невращающейся ЧД), но также еще необходимо условие $\theta = \pi/2$, т.е. сингулярность лежит на экваториальной плоскости геометрии при $\rho = 0$ [7]:

$$K := R_{ijkl} R^{ijkl} = \\ = \frac{48M^2(r^6 - 15a^2r^4 \cos^2 \theta + 15a^4r^2 \cos^4 \theta - a^6 \cos^6 \theta)}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^6}. \quad (9)$$

Здесь R_{ijkl} — тензор Римана, который вычисляется на основе компонент метрики g_{ik} , см. (1).

Вблизи кольцевой сингулярности (при $\theta = \pi/2$ и $r \rightarrow 0$), согласно (9), имеем асимптотику $K \rightarrow 48M^2/\rho^6$. Следовательно, максимум приливных сил приходится на минимум величины ρ на траектории, т. е. на кольцевой сингулярности.

При этом, согласно правилам римановой геометрии, длина окружности такого сингулярного кольца оказывается равной $2\pi a$, поскольку длина окружности вычисляется из (1) по формуле

$$O = \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{|g_{\varphi\varphi}|} = 2\pi \sin \theta \sqrt{\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}}. \quad (10)$$

Поэтому при $r = 0$ получаем

$$O_{(r=0)} = 2\pi a \sin \theta, \quad (11)$$

т. е. окружность при $r = 0$ оказывается обычной окружностью на сфере радиуса a . Но это связано исключительно с особенностью выбранных координат в метрике (1).

Кроме определения длины окружности можно также определить еще поверхность при $r = \text{const}$. Площадь этой поверхности вычисляется из (1) как интеграл:

$$S = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{|g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}|} = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta \sqrt{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (12)$$

Поэтому при $r = 0$ получаем

$$S_{(r=0)} = 2\pi a^2. \quad (13)$$

Величина $S_0 := 2\pi a^2$ соответствует площади круглой двусторонней мембраны радиуса a , т. е. в определении поверхности величина a ведет себя как радиус плоской мембраны. Различие в определении радиуса при $r = 0$ для окружности O и для площади поверхности S связано с сильным искривлением пространства-времени вблизи кольцевой сингулярности.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕДОСТИЖИМОСТИ ПРобНОЙ ЧАСТИЦЕЙ КОЛЬЦЕВОЙ СИНГУЛЯРНОСТИ

Движение пробной частицы в поле вращающейся ЧД описывается с помощью четырех интегралов движения (см. [8], § 33.5): массы μ частицы, ее энергии ε , проекции l_z ее углового момента на ось вращения ЧД и четвертого (картеровского) интеграла движения Ω . Полученные в этом разделе уравнения будут использованы в разд. 6 для построения траектории свободно падающей частицы.

Для упрощения вычислений удобнее записать уравнения через удельные интегралы движения (деленные на μ): $\epsilon := \varepsilon/\mu$ (удельная энергия частицы), $h := l_z/\mu$ (прицельный параметр на ось вращения ЧД), $\omega := \Omega/\mu^2$ (удельный картеровский интеграл движения).

Введем необходимые для записи уравнений обозначения:

$$\Theta := \omega - \cos^2 \theta [a^2(1 - \epsilon^2) + h^2/\sin^2 \theta], \quad (14)$$

$$P := \epsilon(r^2 + a^2) - ha, \quad (15)$$

$$\mathfrak{R} := P^2 - \Delta [r^2 + (h - a\epsilon)^2 + \omega]. \quad (16)$$

Запишем уравнения движения пробных частиц в метрике Керра:

$$\rho^2 \frac{dt}{d\lambda} = a(h - a\epsilon \sin^2 \theta) + \frac{(r^2 + a^2)P}{\Delta}, \quad (17)$$

$$\rho^2 \frac{dr}{d\lambda} = \pm \sqrt{\mathfrak{R}}, \quad (18)$$

$$\rho^2 \frac{d\theta}{d\lambda} = \pm \sqrt{\Theta}, \quad (19)$$

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{h - a\epsilon \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{aP}{\Delta}. \quad (20)$$

Здесь λ — аффинный параметр траектории частицы, знаки « \pm » перед $\sqrt{\mathfrak{R}}$ и $\sqrt{\Theta}$ выбираются в конце с учетом направления движения частицы. Далее для упрощения выражений убираем знаки перед $\sqrt{\mathfrak{R}}$ и $\sqrt{\Theta}$, подразумевая существование этих знаков.

При определении азимутальной координаты φ согласно метрике (1), на горизонте ЧД появляется сингулярность при ее вычислении. Из-за этой координатной сингулярности иногда возникает заблуждение, будто любая пробная частица в метрике Керра совершает бесконечное число оборотов вокруг ЧД, прежде чем пересечет горизонт. На самом деле бесконечное число оборотов совершит не свободно падающая во вращающуюся ЧД частица, а фотоны, которые частица испускает на бесконечность с

горизонта. Сама частица до пересечения горизонта ЧД успевает совершить поворот только на конечный угол. Это противоречие связано с тем, что фотону, для того чтобы «вырваться» от самого горизонта ЧД на бесконечность, нужно бесконечное время. За это бесконечное время гравимагнитные силы (увлекающие локально-инерциальную систему отсчета во вращение) успевают повернуть фотон вокруг ЧД на бесконечный угол. Для устранения этих временной и азимутальной координатных сингулярностей введем перенормированные временную T и азимутальную Φ координаты (Бойера – Линдквиста), согласно определениям

$$\frac{dT}{d\lambda} := \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} \left(\frac{dt}{d\lambda} - a \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\lambda} \right) = \frac{(r^2 + a^2)P}{\rho^2 \Delta}, \quad (21)$$

$$\frac{d\Phi}{d\lambda} := \frac{r^2 + a^2}{\rho^2} \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} - \frac{a}{r^2 + a^2} \cdot \frac{dt}{d\lambda} \right) = \frac{h - a\epsilon \sin^2 \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta}. \quad (22)$$

Тогда с учетом

$$\frac{d\lambda}{\rho^2} = \frac{dr}{\sqrt{\mathfrak{R}}} = \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}$$

интегралы для вычисления траектории частицы можно записать в виде

$$\int_{\theta}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}} = \int_r^r \frac{dr}{\sqrt{\mathfrak{R}}}, \quad (23)$$

$$T = \int_r^r \frac{(r^2 + a^2)P dr}{\Delta \sqrt{\mathfrak{R}}}, \quad (24)$$

$$\Phi = \int_{\theta}^{\theta} \frac{(h - a\epsilon \sin^2 \theta) d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\Theta}}. \quad (25)$$

Уравнение (23) эквивалентно уравнению (33.37а) из книги [8], а уравнения (24) и (25) являются комбинацией уравнений (33.37в) и (33.37г) в соответствии с определениями (21) и (22).

Из уравнений (23)–(25) видно, что условием достижения частицей кольцевой сингулярности с координатами $r = 0$, $\theta = \pi/2$ является неотрицательность величин \mathfrak{R} и Θ в окрестности сингулярности. Согласно выражениям (8), (15), (16), получаем

$$\mathfrak{R}_{(r=0)} = -a^2 \omega. \quad (26)$$

Выполним доказательство недостижимости пробной частицей кольцевой сингулярности методом от противного. Рассмотрим сначала случай $\mathfrak{R} > 0$ в окрестности сингулярности. В этом случае величина ω согласно (26) должна быть отрицательной, но тогда из (14) на кольцевой сингулярности получаем, что $\Theta_{(\theta=\pi/2)} = \omega < 0$, что противоречит уравнениям (23) и (25).

Отдельно рассмотрим случай $\mathfrak{R}_{(r=0)} = 0$: в этом случае $\omega = 0$ и, согласно (14), получаем $\Theta_{(\theta=\pi/2)} = 0$. Этот вырожденный случай соответствует траекториям только в экваториальной плоскости, так как в пределе $\theta \rightarrow \pi/2$ интегралы по θ от $\theta = \pi/2$ логарифмически расходятся. Это означает, что при $\mathfrak{R}_{(r=0)} = 0$ для всей траектории должно выполняться условие $\theta = \pi/2$, или $\Theta = 0$.

Мера возможных начальных условий для таких траекторий (только в экваториальной плоскости и только при $\omega = 0$) есть нуль на множестве всех возможных начальных условий. Эта ситуация аналогична той, которая существует в случае траекторий для пробных частиц в поле заряженной ЧД Рейснера – Нордстрема. Там центральной сингулярности могут достигать только радиальные фотоны, а мера начальных условий для радиальных фотонов также есть нуль на множестве всех возможных начальных условий (в том числе и нерадиальных фотонов).

Таким образом, было доказано, что пробные частицы в метрике Керра не достигают сильной кольцевой сингулярности, т. е. сильная сингулярность как бы «отталкивает» частицы.

5. ДИАГРАММА КАРТЕРА – ПЕНРОУЗА ДЛЯ ЧД РЕЙСНЕРА – НОРДСТРЕМА

Как уже было сказано, ввиду отсутствия центральной симметрии в решении для вращающейся ЧД, невозможно построить двумерную аналитическую ДКП для решения Керра³⁾. Однако из графической ДКП рис. 1а очевидно, что для ЧД Рейснера – Нордстрема могут существовать траектории, проходящие из одной и той же вселенной в разные вселенные. При этом неясно, все ли такие траектории физичны, и если да, то каким начальным условиям для траекторий соответствует граница пере-

³⁾ Однако для любого метрического тензора (в том числе и метрики Керра) возможно построить графическое представление ДКП (см., например, рис. 3). При этом такое графическое представление ДКП не всегда будет подкреплено аналитическими преобразованиями этого раздела, которые найдены только для центрально-симметричных решений.

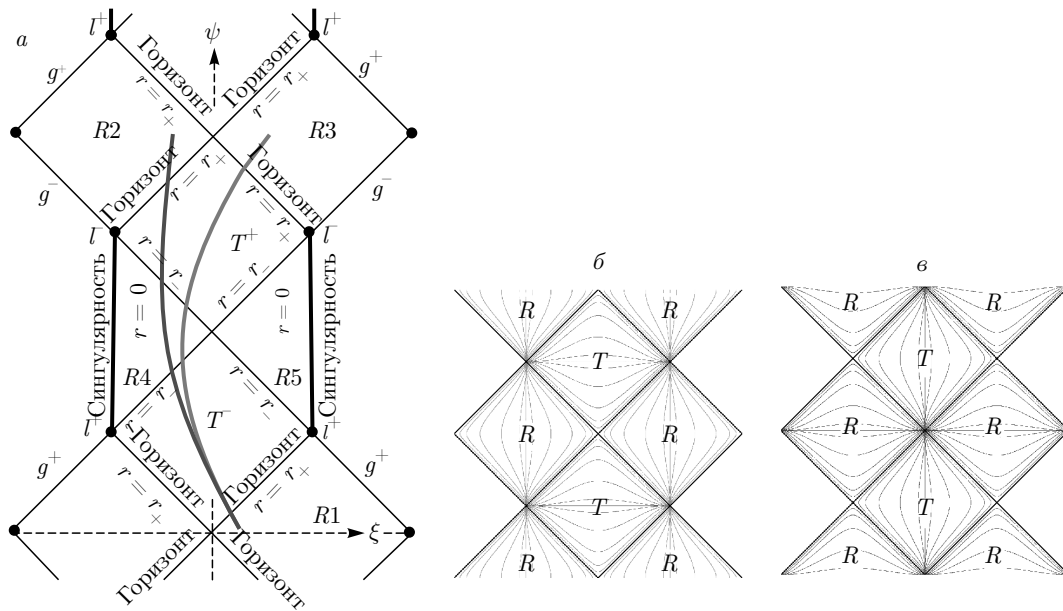


Рис. 1. (В цвете онлайн) *а*) Диаграмма Картера–Пенроуза для заряженной ЧД Рейснера–Нордстрема. Сингулярность при $r = 0$ отмечена жирными вертикальными линиями. Жирные кривые линии — возможные мировые линии частиц. Они входят в ЧД из области $R1$, затем проходят области T^- , $R4$, T^+ и выходят в области $R2$ или $R3$ через разные белые дыры в разные вселенные. *б*) Линии $r = \text{const}$ на соответствующих R - и T -областях диаграммы. *в*) Линии $t = \text{const}$ на соответствующих R - и T -областях диаграммы

хода в разные вселенные. Эти вопросы и будут рассмотрены в данном разделе.

Запишем метрику ЧД Рейснера–Нордстрема:

$$ds^2 = f(r) dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (27)$$

$$r_h^\pm := M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}. \quad (28)$$

Здесь функция $f(r)$ также определяется формулой (2), M и Q — соответственно масса и заряд ЧД, а r_h^\pm — радиусы горизонтов.

Запишем теперь преобразование от координат (t, r) к «черепашьям» координатам (τ, ℓ) , соответствующим ЧД Рейснера–Нордстрема:

$$\begin{aligned} f dt^2 - \frac{dr^2}{f} &= fg^2 (d\tau^2 - d\ell^2), \\ g(r) &:= \pm \frac{dt}{d\tau}, \quad d\ell := \frac{dr}{|f| \cdot |g|}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь учтено, что $dt > 0$ и $d\tau > 0$ всегда, а $\text{sign } d\ell = \text{sign } dr$ по определению. В соответствии с работой [9] получаем

$$g := \text{sign } f = \pm 1. \quad (30)$$

Теперь запишем уравнение для траектории в ЧД Рейснера–Нордстрема [5]:

$$U^r := \frac{dr}{ds} = \mp \epsilon \sqrt{1 - f(\epsilon^{-2} + h^2/r^2)}, \quad (31)$$

$$\frac{dr}{dt} = \mp |f| \sqrt{1 - f(\epsilon^{-2} + h^2/r^2)}. \quad (32)$$

Знак в (32) выбирается в соответствии с $\text{sign } dr$ у знака радиальной компоненты 4-скорости U^r — «минус» в $R1$ - и T^- -областях, а «плюс» в T^+ -, $R2$ - и $R3$ -областях. В области $R4$ величина U^r обращается в нуль, а затем меняет знак, и в этот момент также необходимо сменить знак в выражении (32). Этой точке (точке поворота) соответствует выражение для радиуса поворота r_{turn} :

$$\sqrt{1 - f(r_{turn})(\epsilon^{-2} + h^2/r_{turn}^2)} = 0. \quad (33)$$

Из (29) и (32) получаем

$$d\ell = \frac{dr}{|f|}, \quad (34)$$

$$d\tau = dt = \frac{\mp dr}{|f| \sqrt{1 - f(\epsilon^{-2} + h^2/r^2)}}. \quad (35)$$

Преобразования для ДКП из «черепаших» координат (τ, ℓ) в координаты ДКП (ψ, ξ) в соответствии с работой [9] имеют вид

$$\tau + \ell = \operatorname{ctg} \frac{\psi + \xi}{2}, \quad \tau - \ell = \operatorname{tg} \frac{\psi - \xi}{2}, \quad (36)$$

$$f(d\tau^2 - d\ell^2) = F(\psi, \xi)(d\psi^2 - d\xi^2). \quad (37)$$

Обозначим $u^\pm := 0.5(\psi \pm \xi)$. Согласно ДКП на рис. 1а видно, что координата u^+ соответствует направлению в квадратах диаграммы вправо-вверх, а координата u^- — направлению влево-вверх. При движении по траектории частицы на ДКП в T^- -области координата u^- пробегает значения⁴⁾ от $-\pi/2$ до $+\pi/2$, а координата u^+ пробегает значения от константы c_1 до константы c_2 .

При движении до точки поворота в T^- -области диапазону изменения координат τ и ℓ соответствует диапазон изменения для разности координат $\tau - \ell$ от минус до плюс бесконечности, а для суммы $\tau + \ell$ в пределах конечного диапазона. Так получилось потому, что при движении в этой области интеграл от комбинации $d\tau - d\ell$ стремится к бесконечности, если пределы интегрирования (по координате r) приближаются к горизонтам. В то же время интеграл от комбинации $d\tau + d\ell$ оказывается конечен, даже если пределы интегрирования лежат на горизонтах.

При движении после точки поворота в T^+ -области все оказывается наоборот: интеграл от комбинации $d\tau + d\ell$ стремится к бесконечности, если пределы интегрирования (по координате r) приближаются к горизонтам, а интеграл от комбинации $d\tau - d\ell$ оказывается конечен, даже если пределы интегрирования лежат на горизонтах.

В соответствии с этим величина u^+ меняется в диапазонах⁵⁾ $[c_1, c_2]$ для T^- -области, $[c_2, \pi]$ для $R4$ -области и $[\pi, 2\pi]$ для T^+ -области.

Величина u^- меняется в диапазонах $[-\pi/2, \pi/2]$ для T^- -области, $[\pi/2, c_3]$ для $R4$ -области и $[c_3, c_4]$ для T^+ -области.

Этими диапазонами определяются граничные условия для преобразования (36). На рис. 1 видно, что в ДКП ЧД Рейснера – Нордстрема траектория свободно падающего тела проходит через T^- и R -области, которые на графическом изображении ДКП являются квадратами. Из граничных условий для преобразований (36) становится понятно, что в квадратах T^- -областей траектория может проходить

только через противоположные стороны этих квадратов и не может проходить через их смежные стороны. Поэтому для ЧД Рейснера – Нордстрема путь (траектория на ДКП) в другую вселенную может быть только один. Этот единственный путь соответствует линии, ведущей во вселенную $R3$ на ДКП рис. 1а, а путь во вселенную $R2$ из вселенной $R1$ невозможен.

Далее будет доказано, что в решении Керра для вращающейся ЧД возможен еще один (альтернативный) путь в другую вселенную на графической ДКП для ЧД Керра.

6. ПРИЛИВНЫЕ СИЛЫ НА ТРАЕКТОРИИ

Для графического отображения траектории падающего тела (рис. 2) удобно ввести понятие эффективного радиуса r_{eff} :

$$r_{eff} = \sqrt{r^2 + a^2}, \quad (38)$$

причем величина $4\pi r_{eff}^2$ совпадает на обоих горизонтах с величинами площадей их поверхностей, вычисленных по формуле (12).

Несмотря на то что сама кольцевая сингулярность недостижима для падающих во вращающуюся ЧД частиц, поверхность $r = 0$ достижима для частиц, имеющих определенные начальные условия. Эта поверхность является множеством точек поворота ($r_{turn} = 0$) для достигающих ее траекторий. Аналогично формуле (33) для ЧД Рейснера – Нордстрема, можно записать формулу для определения точки поворота для ЧД Керра:

$$\mathfrak{R}(r_{turn}) = 0. \quad (39)$$

Здесь функция $\mathfrak{R}(r)$ определяется выражением (16). После точки поворота траектория переходит на новый лист решения (в другую вселенную).

При $\omega = 0$, согласно (26), $r_{turn} = 0$, поэтому в линейном приближении по малым величинам $|\omega| \ll \ll M^2$ и $|r_{turn}| \ll |M|$ можно записать

$$r_{turn} \approx -\mathfrak{R}(r=0) : \left. \frac{d\mathfrak{R}}{dr} \right|_{r=0} = \frac{a^2 \omega}{2M(h - a\epsilon)^2}. \quad (40)$$

Известно, что в ЧД приливные силы пропорциональны \sqrt{K} — см. (9), [10]. Поскольку траектория не достигает сингулярности, приливные силы, действующие на падающее тело, всегда остаются конечными. Таким образом, при достаточной удаленности траектории от кольцевой сингулярности тело

⁴⁾ Величины u^+ и u^- определены с точностью до πn , где n — целое число, так как период функций tg и ctg равен π .

⁵⁾ Здесь $\{0 < c_1 < c_2 < \pi\}$ и $\{\pi/2 < c_3 < c_4 < 3\pi/2\}$.

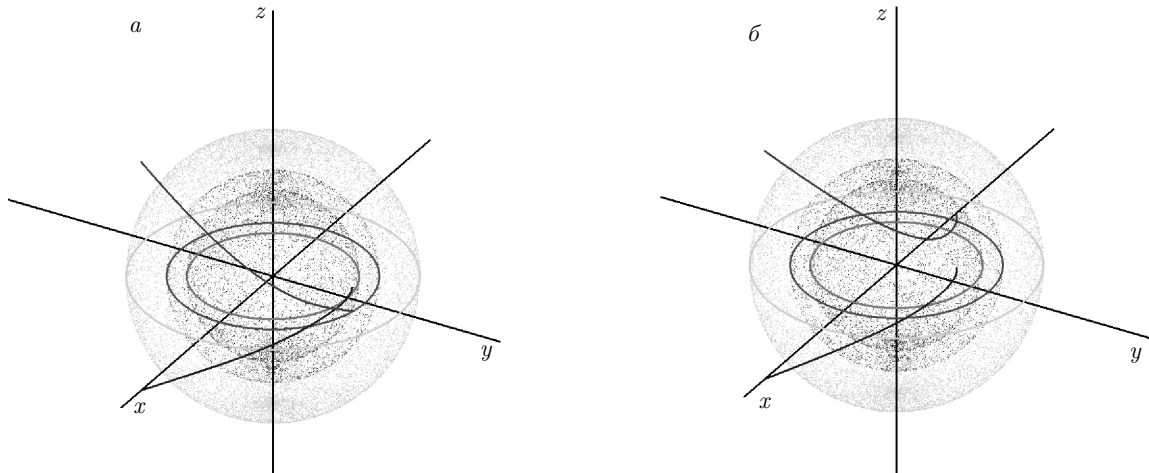


Рис. 2. (В цвете онлайн) Схематичное изображение траектории падающей частицы в ЧД Керра в декартовых координатах. Координаты (x, y, z) определяются стандартным образом — через сферические координаты (r_{eff}, θ, Φ) , см. (23), (25), (38). Красная (внутренняя) сфера с площадью $4\pi r_{eff}^2 = 4\pi a^2$ соответствует координате $r = 0$ — на этой сфере лежит кольцевая сингулярность (красная окружность); голубая (промежуточная) сфера с площадью $4\pi[a^2 + (r_h^-)^2]$ соответствует внутреннему горизонту Коши; желтая (внешняя) сфера с площадью $4\pi[a^2 + (r_h^+)^2]$ соответствует внешнему горизонту ЧД, см. (12), (38). Синяя кривая — траектория частицы, а серая кривая — проекция траектории на экваториальную плоскость. Начальные условия для траекторий: $a = 0.95M$, $\epsilon = 2$, $h = -0.5M$, $\theta_0 = \pi/4$; $\omega = 2M^2$, $r_{turn} > 0$ для варианта *a*) и $\omega = -M^2$, $r_{turn} < 0$ для варианта *б*); траектория построена до $r = 0$

способно попасть в другую вселенную через черную дыру без разрушения. Это будет зависеть от массы ЧД и от начальных условий для траектории.

Пролет частицы через вращающуюся черную дыру возможен как с достижением нулевой мембраны с радиальной координатой $r = 0$ (точка поворота $r_{turn} < 0$, рис. 2б), так и без достижения (точка поворота $r_{turn} > 0$, рис. 2а). Реальная точка поворота не может быть отрицательной, так как в другой вселенной для частицы применимы уже новые начальные условия.

7. ПРОБЛЕМА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ДИАГРАММ КАРТЕРА – ПЕНРОУЗА

Как видно из ДКП для ЧД Рейснера – Нордстрема, радиус r_h^- внутреннего горизонта Коши для ЧД, в которую падает частица, должен быть таким же, как и радиус горизонта Коши белой дыры, из которой эта частица потом вылетает в другую вселенную, см. (6). При этом радиусы r_h^+ внешних горизонтов для черной и белой дыр не обязаны быть одинаковыми, а равенство радиусов внутренних горизонтов должно сохраняться и до, и после пролета частицы. Поскольку частица обладает массой (энергией) $\mu > 0$, масса ЧД после попадания в нее частицы должна увеличиться, а масса белой дыры долж-

на уменьшиться после вылета из нее частицы. В соответствии с этим изменяются и радиусы горизонтов для черной и белой дыр.

При попадании в ЧД частицы с положительной массой радиус r_h^- ее горизонта Коши всегда уменьшается; соответственно, при вылете этой частицы из белой дыры радиус r_h^- ее внутреннего горизонта тоже должен уменьшиться, см. (6):

$$\frac{dr_h^-}{dM} = 1 - \frac{M}{\sqrt{M^2 - a^2}} - \frac{a^2}{M\sqrt{M^2 - a^2}} < 0, \quad (41)$$

$$\frac{dr_h^-}{dL} = \frac{a}{M\sqrt{M^2 - a^2}}. \quad (42)$$

В формуле (42) учтено возможное изменение r_h^- , связанное с изменением углового момента $L = aM$ ЧД. Из этих формул видно, что практически всегда изменение r_h^- , связанное с пролетом частицы, отлично от нуля. При вылете частицы в другую вселенную изменение r_h^- для белой дыры должно быть таким же по модулю и знаку, чего очень сложно добиться подбором начальных условий для частицы.

Поэтому для положительных масс условия равенства радиусов внутренних горизонтов до и после пролета частицы оказываются практически несоместимыми. Это обстоятельство послужило глав-

ным препятствием в развитии теории черно-белых дыр.

В § 34.6 [8] Мизнер, Торн и Уилер рассмотрели три разные возможности для частицы, попадающей в реальную ЧД. Вылет этой частицы из черно-белой дыры был там третьей возможностью. Однако по указанной выше причине эта третья возможность была отвергнута авторами так же, как и остальные возможности (отвергнутые ими по другим причинам). Комбинации этих трех возможностей также не дали искомого ответа на вопрос о судьбе частицы, участвующей в гравитационном коллапсе.

Однако если предположить, что частица в другой вселенной вылетает из черно-белой дыры с отрицательной массой, то это сразу решило бы проблему для третьей возможности (проблему равенства радиусов внутренних горизонтов до и после пролета частицы).

Действительно, после вылета частицы с массой $\mu > 0$ из белой дыры с отрицательной массой $M_{wh} < 0$, масса белой дыры уменьшается на величину μ , т. е. $\delta M_{wh} < 0$, но M_{wh} увеличивается при этом по модулю. Это увеличение (по модулю) будет соответствовать увеличению радиуса горизонта Коши на $\delta r_h^- > 0$ для белой дыры. И это увеличение уже можно будет без проблем согласовать с увеличением на $\delta r_h^- > 0$ для ЧД, в которую частица влетела.

Далее для краткости будем называть нашу вселенную положительной, а вселенную с отрицательными массами (в которую вылетает частица с положительной массой из нашей вселенной) — отрицательной. Поскольку величина радиусов горизонтов ЧД определяется в общей теории относительности по асимптотике метрики на бесконечности, для устранения противоречия в отрицательной вселенной у формул (4), (6), (8) и (28) достаточно будет поставить знак «минус» везде перед M . По этой же причине знак «меньше» в формуле (41) сохранится и для отрицательных M .

Мы все еще со школы привыкли к тому, что масса любого тела должна быть всегда неотрицательной. Однако достаточно очевидно, что знак перед массой в любых уравнениях может быть выбран произвольно — это не приведет к нарушению физических законов и уравнений при условии, что и во всех остальных уравнениях знаки перед массами также будут изменены на противоположные. Эта ситуация полностью аналогична ситуации со знаками зарядов в электромагнетизме: заменой всех знаков у электрических зарядов на противоположные мы ничего не нарушим, это будет просто переобозначение. Более подробно на эту тему было проведено исследова-

ние в работе [11] — там было показано, что движение частицы с отрицательной массой в нашей вселенной не приводит ни к каким аномалиям. А вообще знак и величина массы во вселенной определяется степенью инерции, т. е. принципом Маха. Хокинг в подтверждение принципа Маха написал: «Наблюдаемая изотропия микроволнового фона указывает на то, что вращение Вселенной очень мало, если оно вообще есть. . . Это можно считать экспериментальным подтверждением принципа Маха» [12].

Кроме решения проблемы согласования граничных условий для черно-белых дыр возможность использования отрицательных масс дает и дополнительные преимущества: без проблем можно будет объяснить гравитационное отталкивание белой дырой (с отрицательной массой) частицы с положительной массой, которая вылетает из нее, так как тела с разными по знаку массами гравитационно отталкиваются друг от друга.

Частица с положительной массой уже не сможет попасть в ЧД в отрицательной вселенной, поскольку она будет гравитационно отталкиваться ото всех массивных (отрицательных) тел в отрицательной вселенной. Но если эту положительную частицу как-то «привязать» к телу с отрицательной массой в отрицательной вселенной, то эта связанная пара сможет упасть в черно-белую дыру в отрицательной вселенной и вылететь уже в положительной вселенной⁶⁾ аналогично падению положительной частицы в ЧД нашей вселенной. В этом случае такая связанная пара вылетит из белой дыры не обязательно в ту же вселенную, в которой живем мы.

В этом разделе было сделано предположение о возможности пренебрежения гравитационными возмущениями, вызванными пролетом частицы через ЧД и связанным с этим пролетом излучением гравитационных волн. Такое предположение обосновывается тем, что относительное изменение радиусов всех горизонтов при пролете пробной частицы оказывается порядка μ/M , а относительное изменение этих радиусов, связанное с излучением гравитационных волн пробной частицей, оказывается порядка $10^{-2}\mu^2/M^2$ [13].

Как известно, массивные тела двигаются в пространстве по траекториям, притягиваясь к минимумам гравитационного потенциала. В главном приближении задачи двух тел эти траектории имеют форму кеплеровских орбит (эллипсов, гипербол и

⁶⁾ Однако вероятно, что любая такая связь будет разрушена бесконечными гравитационными силами внутри черно-белой дыры.

парабол). Для тел с отрицательной массой в таком же гравитационном поле принципиально ничего не меняется — тела также будут двигаться по кеплеровским орбитам, но уже не вокруг минимумов, а вокруг максимумов гравитационного потенциала. Эти максимумы гравитационного потенциала в далеком Космосе соответствуют центрам межгалактических пустот (войдов), а расстояния между войдами обычно составляют сотни мегапарсек. В этих войдах частицы с отрицательной массой могут накапливаться. Аналогичная ситуация должна быть для частиц с положительными массами в отрицательной вселенной. Накопление частиц с отрицательными массами в войдах может приводить к космологическим эффектам, аналогичным влиянию на космологию темной энергии.

Возможно, что отрицательные частицы будут накапливаться вблизи точек Лагранжа в звездных системах типа Солнечной, но скорее всего их скорости будут порядка или более средних галактических — порядка 300 км/с. Поэтому, вероятно, отрицательные частицы будут вылетать без задержек из родительских галактик и только «гравитационные холмы» войдов смогут их захватить. Более подробное и количественное исследование этих вопросов требует отдельного рассмотрения.

8. АЛЬТЕРНАТИВНЫЙ ВАРИАНТ

Решение Керра для вращающейся ЧД, в отличие от решения Рейснера – Нордстрема для заряженной ЧД, предоставляет еще одну уникальную возможность для перехода в другую вселенную. Эта возможность связана с тем, что в решении Керра (1) площадь поверхности, соответствующей нулевой радиальной координате, больше нуля: $S_0 = 2\pi a^2$ — см. (12), а также с тем, что тело может находиться на этой поверхности (мембране) без разрушения приливными силами, если это тело будет не у сингулярности. Поэтому возможен переход через нуль по радиальной координате в решении (1) и дальнейшее движение в том же направлении при условии отрицательности радиальной компоненты 4-скорости $U^r := dr/ds$ для падающего в ЧД тела при $r = 0$, рис. 3.

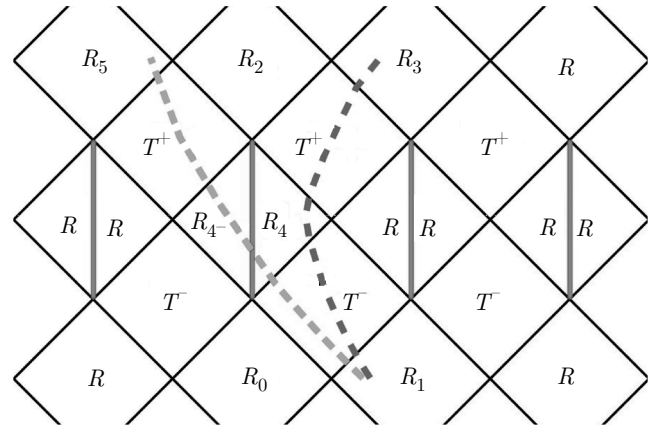


Рис. 3. (В цвете онлайн) Диаграмма типа Карттера – Пенроуза для ЧД Керра с альтернативным вариантом перехода в другую вселенную. Вертикальными жирными линиями отмечены поверхности $r = 0$. Стандартный переход в другую вселенную осуществляется через области $R_1-T^- - R_4-T^+ - R_3$ (в соответствии с ДКП рис. 1 для ЧД Рейснера – Нордстрема) — штриховая линия справа, а альтернативный переход осуществляется через области $R_1-T^- - R_4-R_{4-} - T^+ - R_5$ — штриховая линия слева

Можно доказать⁷⁾, что $ds^2 = d\lambda^2$. Тогда, согласно (18), (19), имеем

$$U^r = \frac{dr}{d\lambda} = \mp \frac{\sqrt{\mathfrak{R}}}{\rho^2}, \quad U^\theta = \frac{d\theta}{d\lambda} = \pm \frac{\sqrt{\Theta}}{\rho^2}. \quad (43)$$

Кроме того, согласно выражению (40), отрицательность величины r_{turn} возможна только при $\omega < 0$.

Отметим, что реально траекторию имеет смысл строить не далее чем до нулевого радиуса r , а отрицательность величины r_{turn} свидетельствует только о возможности альтернативного перехода в другую вселенную при данных начальных условиях для падающей частицы. Чтобы построить продолжение этой траектории в другой вселенной, нужно в другой вселенной построить новую траекторию обратно во времени и гладко сшить обе части траектории при $r = 0$.

Отсюда становится более понятен физический смысл удельного карттеровского интеграла ω . Согласно выражениям (14), (23), при $\omega < 0$ траектория не может пересекать экваториальную плоскость. Поскольку $U_\theta = \pm\sqrt{\Theta}$, при $\omega > 0$ и $\theta = \pi/2$ из (43) имеем $U_{\theta(\theta=\pi/2)} = \pm\sqrt{\overline{\omega}}$, т.е. при положительных ω корень из удельного карттеровского интеграла имеет смысл проекции, ортогональной оси z , для

⁷⁾ Это следует после подстановки в (1) значений для $dt, dr, d\theta$ и $d\varphi$, выраженных из формул (17)–(20) через $d\lambda$.

удельного углового момента частицы в момент пересечения ею экваториальной плоскости. Как видно из соотношения (14), эта проекция не является интегралом движения. В поле вращающейся ЧД эта величина не сохраняется, а сохраняется только проекция полного углового момента частицы на ось z — величина μh .

Если траектория переходит через $r = 0$ (в другую вселенную), то для устранения путаницы со знаками r можно переобозначить знак радиальной координаты, $r \rightarrow -r$, и проводить дальнейшие вычисления в другой вселенной так же, как и в нашей. Этот альтернативный вариант интересен еще и тем, что не требует гладкой сшивки граничных условий на горизонте, которая требовалась в разд. 7. Связано это с тем, что в другой вселенной аналогично будет вращающаяся ЧД с нулевой мембраной (при $r = 0$), площадь которой не обязательно должна быть равна площади мембраны в нашей вселенной. Поэтому провести сшивку на этой мембране не составит труда.

Обратим внимание, что решение (1) зависит от r линейно только в одном месте (член с $2Mr$ в Δ), в остальных местах зависимость от r квадратичная. Поэтому другая вселенная может быть как положительной, так и отрицательной. При отрицательном варианте даже не нужно будет переобозначать знак радиальной координаты, $r \rightarrow -r$, поскольку решение (1) и так сохранит свой вид.

Однако, возможно, что никакого альтернативного варианта для перехода во вселенную R_5 просто не существует, так как если рассматривать нулевую поверхность $r = 0$ именно как плоскую мембрану (13), а не как сферу (11), то пролет частицы через мембрану может просто означать выход в ту же R_4 -область на ДКП рис. 3 только с другой стороны мембраны. В этом случае частица как бы отразится от мембраны на ДКП рис. 3 и вылетит во вселенную R_3 по обычному варианту, рассмотренному в предыдущих разделах.

9. ОБСУЖДЕНИЕ

Пока еще теория гравитации не может дать однозначного ответа на вопрос о возможности существования в нашей Вселенной черно-белых дыр. Математически известно только «вечное» полное решение для черно-белых дыр (оно изображено на ДКП рис. 1а), т. е. это такое решение, которое существует вечно — с самого рождения Вселенной (с момента Большого Взрыва). И практически не понятно, ка-

кое должно быть полное решение (соответствующее какой-то диаграмме Картера–Пенроуза) для ЧД, образующейся в результате коллапса звезды (т. е. уже после Большого Взрыва). Понятно пока, что

- у любой реальной ЧД будет не только внешний горизонт, но и внутренний горизонт Коши;
- физические тела способны без разрушения преодолевать слабую сингулярность на горизонте Коши;
- сильная сингулярность внутри реальной ЧД будет отталкивать любую материю под внутренним горизонтом;
- приливные силы будут конечными, поскольку траектория падающего тела не касается сильной сингулярности;
- обратно из этой же ЧД эта материя вылететь уже не сможет.

Но вот что будет с этой материей, пока не понятно — полного решения для ЧД, родившихся уже после Большого Взрыва, пока не найдено, так же как и не найдено пока самосогласованных полных решений, учитывающих обратное влияние падающей материи на гравитацию всей системы.

В работе получены следующие результаты.

- Доказана недостижимость пробной падающей частицей сильной кольцевой сингулярности внутри черной дыры Керра.
- Найдено решение проблемы граничных условий для топологии Рейснера–Нордстрема.
- Доказано, что в топологии Рейснера–Нордстрема возможен только единственный вариант перехода в другую вселенную.
- Для топологии Керра найдена возможность существования альтернативного перехода в другую вселенную, не совпадающую со вселенной для обычного перехода.
- Найдены начальные условия для падающей частицы, соответствующие альтернативному переходу в другую вселенную.
- Оценены приливные силы, действующие на падающее тело в метрике Керра, и доказана возможность прохождения тела в другие вселенные без разрушения приливными силами.

Также была предложена гипотеза существования «отрицательных вселенных» и отрицательных масс, позволяющая состыковать граничные условия в черной и белой дырах.

Несмотря на привлекательность аргументов в пользу выдвинутой гипотезы о существовании альтернативного перехода в другую вселенную, окончательного математического доказательства такого перехода пока не получено.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Carter, *Comm. Math. Phys.* **10**, 280 (1968).
2. V. P. Frolov and I. D. Novikov, *Black Hole Physics. Basic Concepts and New Developments*, Kluwer Acad. Publ., Netherlands (1998).
3. Н. С. Кардашев, Л. Н. Липатова, И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, *Астрон. ж.* **107**, 92 (2015).
4. F. Tipler, *Phys. Lett. A* **64**, 8 (1977).
5. Н. С. Кардашев, Л. Н. Липатова, И. Д. Новиков, А. А. Шацкий, *ЖЭТФ* **146**, 75 (2014).
6. Kip S. Thorne, *Astrophys. J.* **191**, 507 (1974).
7. R. C. Henry, *Astrophys. J.* **535**, 350 (2000).
8. Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, *Гравитация*, т. 3, Мир, Москва (1977).
9. B. Carter, *Phys. Lett.* **21**, 423 (1966).
10. Kip S. Thorne, in *Abstracts of Ginzburg Conference on Physics*, Lebedev Institute, Moscow (2012), http://www.gc.lpi.ru/proceedings/thorne_pl.pdf.
11. А. А. Шацкий, И. Д. Новиков, Н. С. Кардашев, *УФН* **181**, 399 (2011).
12. S. W. Hawking, *Observatory* **89**, 38 (1969).
13. K. Martel and E. Poisson, arXiv:gr-qc/0107104 (2008).