

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТРУБЧАТОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ЦИЛИНДРОМ

Ю. О. Аверков^{a,b*}, Ю. В. Прокопенко^{a,c**}, В. М. Яковенко^{a***}

^a Институт радиофизики и электроники им. А. Я. Усикова Национальной академии наук Украины
61085, Харьков, Украина

^b Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
61022, Харьков, Украина

^c Харьковский национальный университет радиоэлектроники
61166, Харьков, Украина

Поступила в редакцию 4 июля 2019 г.,
после переработки 3 ноября 2019 г.
Принята к публикации 8 ноября 2019 г.

Теоретически исследован эффект нелинейной стабилизации неустойчивости трубчатого электронного пучка при его движении вдоль поверхности твердотельного диэлектрического цилиндра. Предполагалось, что пучок нерелятивистский, в радиальном направлении является бесконечно тонким и движется вдоль поверхности цилиндра параллельно силовым линиям внешнего постоянного магнитного поля, препятствующего поперечным движениям электронов пучка. Методом медленно изменяющихся во времени амплитуд и фаз исследован механизм нелинейной стабилизации азимутально-симметричных электромагнитных волн E -типа с различными значениями радиальных модовых индексов. Физической причиной возбуждения таких волн является резонанс Вавилова – Черенкова, а в основе механизма нелинейной стабилизации лежит эффект захвата частиц пучка полем возбуждаемой волны. Показано, что с увеличением радиального модового индекса возбуждаемой волны время насыщения неустойчивости, максимальные значения и «период» осцилляций амплитуд на нелинейной стадии насыщения неустойчивости уменьшаются. Показано, что на нелинейной стадии неустойчивости возбуждаемые пучком волны имеют эллиптическую поляризацию. При этом в области вакуума направления вращения векторов электрических полей E_{01} - и E_{02} -волн оказываются противоположными.

DOI: 10.31857/S0044451020050119

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие большое внимание уделяется вопросам создания генераторов излучения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн. Это связано с активным применением такого излучения в биологии [1], медицине [2], для передачи субмиллиметровых сигналов в земной атмосфере [3], для осуществления широкополосной беспроводной связи [4], субмиллиметровой спектроскопии [5] и в других приложениях науки и техники.

Однако использование традиционных подходов к проектированию и построению соответствующих электронно-вакуумных устройств испытывает значительные трудности, обусловленные малыми геометрическими размерами основных элементов таких устройств, генерирующих и стабилизирующих электромагнитное излучение. Одним из наиболее перспективных решений данной проблемы является использование сверхразмерных (по отношению к длине волны) электродинамических структур, работающих в многомодовом режиме. В этой связи особое внимание уделяется цилиндрическим системам, в которых осуществляется взаимодействие электронов трубчатого потока [6, 7] или многоструйного потока кругового сечения [8–12] с обдуваемым ими твердотельным цилиндром.

* E-mail: yuriyaverkov@gmail.com

** E-mail: prokopen@ire.kharkov.ua

*** E-mail: yavm@ire.kharkov.ua

Следует отметить, что в работах [6–12] электронный пучок взаимодействовал со стержнем, изготовленным из немагнитной диэлектрической среды. Возникавшая при этом неустойчивость имела конвективный характер. В то же время, в работах [13–15] в линейном приближении было показано, что наличие частотной дисперсии диэлектрической и магнитной проницаемостей среды, из которой изготовлен цилиндр, делает возможным возникновение абсолютной неустойчивости. Именно, в работе [13] в электростатическом приближении рассмотрено взаимодействие нерелятивистского трубчатого электронного пучка с твердотельным цилиндром, изготовленным из искусственной среды, диэлектрическая проницаемость которой зависит от частоты и может становиться отрицательной в некоторой области частот. Установлено, что именно в этой области частот может возникать абсолютная неустойчивость собственных поверхностных мод цилиндра. В работе [14] с учетом эффекта запаздывания рассмотрено взаимодействие нерелятивистского трубчатого электронного пучка с твердотельным цилиндром, изготовленным из искусственной среды, у которой частотной дисперсией обладают как диэлектрическая, так и магнитная проницаемость. Показано, что в области частот, где обе проницаемости становятся отрицательными, собственный спектр цилиндра допускает существование объемно-поверхностных волн E -типа с отрицательной групповой скоростью. Отметим, что в работе [14] под объемно-поверхностными понимались такие волны, у которых зависимости амплитуд полей от радиальной координаты имеют осциллирующий характер в области цилиндра и монотонно убывающий в области вакуума (при удалении от цилиндра в направлении внешней нормали к поверхности).

Взаимодействие электронного пучка с такими волнами делает возможным возникновение абсолютной неустойчивости. В работе [15] с учетом эффекта запаздывания было рассмотрено взаимодействие трубчатого электронного пучка с анизотропным диспергирующим твердотельным цилиндром. Среда цилиндра предполагалась немагнитной, а тензор диэлектрической проницаемости — анизотропным, негиротропным. Спектр колебаний такого цилиндра, как было показано в работе [16], допускает существование объемно-поверхностных волн E -типа с отрицательной групповой скоростью. При этом становится возможным возникновение абсолютной неустойчивости. Из работ [13–15] следует, в частности, что использование рассмотренных в них искусственных сред для изготовления твердотель-

ных цилиндров делает возможным их применение для создания генераторов электромагнитного излучения в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах длин волн, обладающих «естественной» обратной связью.

Для возможности практической реализации эффектов пучковой неустойчивости важно изучить поведение исследуемой электродинамической системы на нелинейной стадии неустойчивости. Теоретические методы описания установления нелинейной стадии пучковой неустойчивости были развиты в работах по изучению взаимодействия пучков с плазменными средами. К числу первых таких работ можно отнести работы [17–31], в которых в качестве основного эффекта, приводящего к стабилизации неустойчивости, рассматривался эффект захвата электронов пучка плазменной волной. В них рассматривались модулированные и немодулированные релятивистские пучки, взаимодействующие с плазмой, которая предполагалась холодной и бесстолкновительной или слабостолкновительной. Особо отметим работы [27–30], в которых с помощью метода медленно изменяющихся амплитуд и фаз была построена нелинейная теория неустойчивости размытого и моноэнергетического электронных пучков в неограниченной (объемной) плазме как в отсутствие, так и при наличии столкновений.

В работах [32–37] построена нелинейная теория неустойчивости прямолинейных релятивистских электронных пучков в пространственно-ограниченной плазме. В частности, в работах [32–34] рассмотрена общая теория различных механизмов вынужденного излучения релятивистских электронных пучков: черенковского, циклотронного, ондуляторного в условиях эффекта Вавилова – Черенкова и аномального эффекта Доплера. В работе [36] рассмотрен случай тонких в поперечном сечении пучка и плазмы, полностью замагниченных и находящихся в металлическом волноводе. При этом рассмотрен случай плотной плазмы, когда возбуждаемую пучком неустойчивую плазменную волну можно считать потенциальной. Установлено, в частности, что нелинейные процессы, обусловленные релятивизмом пучка, препятствуют хаотизации системы на развитой нелинейной стадии неустойчивости. Напротив, в случае нерелятивистского пучка наблюдается его значительная аномальная нелинейная хаотизация.

Следует отметить теоретическую работу [38], в которой частично построена самосогласованная нелинейная теория возбуждения электромагнитного излучения в электродинамической системе, состоя-

щей из металлического цилиндрического волновода с помещенным в него диэлектрическим цилиндром, вдоль которого распространяется азимутально-периодический сильнооточный релятивистский электронный пучок. Численно определены частоты возбуждаемых пучком азимутально-несимметричных волн с большими значениями азимутальных модовых индексов, построены временная зависимость энергии возбуждаемых волн и фазовые портреты электронных слустков пучка в различные моменты времени развития неустойчивости.

В настоящей работе теоретически изучен эффект нелинейной стабилизации неустойчивости бесконечно тонкого в радиальном направлении трубчатого электронного пучка при его движении вдоль поверхности твердотельного диэлектрического цилиндра. В отличие от работы [38], рассматриваемая нами электродинамическая система является открытой, а возбуждаемые пучком волны — азимутально-симметричными. Кроме того, в отличие от работы [38], построены и проанализированы временные зависимости медленно изменяющихся амплитуд и фаз компонент электрического и магнитного полей возбуждаемых волн с различными значениями радиальных модовых индексов, а также рассмотрен вопрос о поляризации волн.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть диэлектрический цилиндр радиусом ρ_0 занимает область пространства $0 \leq \rho \leq \rho_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $|z| < \infty$ (ось z направлена вдоль оси цилиндра). Цилиндр изготовлен из изотропного немагнитного материала, диэлектрическая проницаемость которого является действительной величиной и равна ε . Вдоль его поверхности движется пучок заряженных частиц (электронов) с равновесной плотностью n_0 и скоростью $v_0 \ll c$ (где c — скорость света в вакууме). Такая электродинамическая система легко реализуема при расположении цилиндра в пространстве дрейфа прямолинейно движущегося трубчатого пучка с радиусом $\rho_b = \rho_0 + a/2$. Толщину пучка a будем считать бесконечно малой, а среду за пучком ($\rho > \rho_0$) — вакуумом. Непосредственный контакт между пучком и поверхностью цилиндра отсутствует. Предполагается, что пространство дрейфа находится в сильном продольном (в направлении движения пучка) внешнем постоянном магнитном поле, препятствующем поперечным движениям электронов пучка. Пороговое значение внешнего магнитно-

го поля, ограничивающего движение электронов по радиусу и азимуту, находим из условия $\omega_H \gg \omega_b$, где $\omega_H = |e|H_0/m_0c$ — электронная циклотронная частота, $\omega_b = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m_0}$ — плазменная частота электронов пучка, e и m_0 — заряд и масса свободного электрона; n_0 — равновесная объемная плотность электронов пучка; H_0 — величина внешнего магнитного поля. Для пучка с характерной плотностью $n_0 \propto 10^{10}$ см $^{-3}$ получаем $H_0 \gg 336$ Э (или $H_0 \gg 26.7$ кА/м).

Система уравнений, описывающая взаимодействие электронного пучка с собственными волнами (колебаниями) диэлектрического цилиндра имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 4\pi e n(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (4)$$

Здесь $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — напряженности магнитного и электрического полей; $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — вектор индукции электрического поля; $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = (0, 0, j_z(\mathbf{r}, t))$ и $n(\mathbf{r}, t)$ — объемная плотность тока и плотность электронов пучка соответственно, удовлетворяющие уравнению непрерывности

$$e \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (5)$$

Величины $j_z(\mathbf{r}, t)$, $n(\mathbf{r}, t)$ определяются выражениями $j_z(\mathbf{r}, t) = j_z(z, t)\delta(\rho - \rho_0)$ и $n(\mathbf{r}, t) = n(z, t)\delta(\rho - \rho_0)$, где $j_z(z, t)$ и $n(z, t)$ — поверхностные плотности соответствующих величин, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Заметим, что в линейной теории поверхностная плотность тока пучка $j_z(z, t)$ задается в линейном приближении, где малые возмущения скорости электронов связаны с электрическим полем соответствующим уравнением движения.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением азимутально-симметричных электромагнитных волн электрического типа (E -типа) с компонентами полей $E_\rho(\rho, z, t)$, $H_\varphi(\rho, z, t)$, $E_z(\rho, z, t)$. В отсутствие пучка однородные волновые уравнения, описывающие собственные поля в цилиндре, получаются из соответствующей системы однородных уравнений Максвелла (1)–(4) и имеют вид

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E_z(\rho, z, t) - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_z(\rho, z, t) = 0, \quad (6)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E_\rho(\rho, z, t) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \rho} E_z(\rho, z, t), \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) H_\varphi(\rho, z, t) = \\ = -\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \rho} E_z(\rho, z, t). \end{aligned} \quad (8)$$

Соответствующие уравнения для вакуума получаются из уравнений (6)–(8), если положить $\varepsilon = 1$. Решения уравнения (6) для областей цилиндра и вакуума для объемно-поверхностной волны с частотой ω и продольным волновым числом q_z имеют вид

$$E_z^{cyl}(\rho, z, t) = A_{cyl} J_0(\kappa \rho) \exp[i(q_z z - \omega t)], \quad (9)$$

$$E_z^{vac}(\rho, z, t) = A_{vac} K_0(q \rho) \exp[i(q_z z - \omega t)], \quad (10)$$

где $J_0(u)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода, $K_0(u)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка второго рода (функция Макдональда) [39]; A_{cyl} , A_{vac} — произвольные постоянные. Выбор решений в виде (9) и (10) обусловлен выполнением условий конечности величин полей при $\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow \infty$. Величина $\kappa^2 = \varepsilon \omega^2 / c^2 - q_z^2$ представляет собой квадрат поперечного волнового числа в области цилиндра, а $q^2 = q_z^2 - \omega^2 / c^2$ — квадрат волнового числа в вакууме, взятого с противоположным знаком. Из вида решений (9), (10) следует, что поля объемно-поверхностных волн имеют осциллирующий характер внутри цилиндра и убывающий в направлении нормали к поверхности цилиндра — в области вакуума.

Напомним, что в отсутствие пучка граничные условия при $\rho = \rho_0$ для компонент полей представляют собой условия непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей, а также условие непрерывности нормальной (радиальной) составляющей вектора электрической индукции. При наличии пучка и его движении вдоль поверхности цилиндра (при $\rho_b = \rho_0$) граничные условия при $\rho = \rho_0$ представляют собой условия непрерывности компоненты поля $E_z(\rho, z, t)$ и скачок компоненты $D_\rho(\rho, z, t)$, связанный с наличием возмущенного заряда пучка:

$$E_z(\rho, z, t)|_{\rho=\rho_0+0} = E_z(\rho, z, t)|_{\rho=\rho_0-0}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, z, t)|_{\rho=\rho_0+0} - \varepsilon E_\rho(\rho, z, t)|_{\rho=\rho_0-0} = \\ = \frac{4\pi e}{\rho_0} \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \int_{\rho_0-\Delta\rho}^{\rho_0+\Delta\rho} n(z, t) \delta(\rho - \rho_0) \rho d\rho, \end{aligned} \quad (12)$$

где интегрирование проводится по толщине пучка. В дальнейшем мы будем использовать лишь граничные условия (11) и (12). Компоненты полей $H_\varphi(\rho, z, t)$ будем находить, используя уравнение (8). Нам понадобится уравнение, связывающее компоненты полей $E_\rho(\rho, z, t)$ и $E_z(\rho, z, t)$ с поверхностной плотностью электронов пучка $n(z, t)$ при $\rho = \rho_0$. Для его получения запишем уравнение (7) для $\rho = \rho_0$, вычтем из него аналогичное ему уравнение для области вакуума и воспользуемся граничным условием (12), предварительно продифференцированным по времени. В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_\rho(\rho, z, t)}{\partial z^2} \Big|_{\rho=\rho_0+0} - \frac{\partial^2 E_\rho(\rho, z, t)}{\partial z^2} \Big|_{\rho=\rho_0-0} = \\ = \frac{\partial^2 E_z(\rho, z, t)}{\partial z \partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0+0} - \frac{\partial^2 E_z(\rho, z, t)}{\partial z \partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0-0} + \\ + \frac{4\pi e}{c^2} \frac{\partial^2 n(z, t)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Следуя работам [27–30], поверхностную плотность $n(z, t)$ представим в виде

$$n(z, t) = \frac{2\pi n_0 a}{q_z M} \sum_{p=1}^M \delta[z - z_p(z_{0p}, v_{0p}, t)]. \quad (14)$$

Выражение (14) означает тот факт, что непрерывный трубчатый поток электронов представляется в виде набора макрочастиц (заряженных колец), число которых равно M на длине $2\pi/q_z$. Координата $z_p(z_{0p}, v_{0p}, t)$ описывает положение отдельной p -й макрочастицы. Отметим, что координата $z_p(z_{0p}, v_{0p}, t)$ и скорость $v_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, t)$ p -й макрочастицы являются решениями уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{dz_p(z_{0p}, v_{0p}, t)}{dt} = v_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, t), \\ \frac{dv_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, t)}{dt} = \frac{e}{m_0} \operatorname{Re}\{E_z(\rho_0, z_p, t)\} \end{aligned} \quad (15)$$

с начальными условиями $z_p(z_{0p}, v_{0p}, 0) = z_{0p}$ и $v_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, 0) = v_{0p}$. В дальнейшем анализ временной эволюции амплитуды и фазы волны, а также координат и скоростей макрочастиц будем проводить в системе координат, связанной с пучком. Для этого выполним замену

$$\begin{aligned} z_p(z_{0p}, v_{0p}, t) = v_0 t + \tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t), \\ v_{zp}(z_{0p}, v_{0p}, t) = v_0 + \tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t), \end{aligned}$$

где $\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)$ и $\tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)$ — возмущения координаты и продольной скорости p -й макрочастицы. Тогда система уравнений (15) и соответствующие ей начальные условия примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)}{dt} &= \tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t), \\ \frac{d\tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)}{dt} &= \frac{e}{m_0} \operatorname{Re}\{E_z(\rho_0, \tilde{z}_p, t)\}, \end{aligned} \quad (16)$$

и $\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, 0) = \tilde{z}_{0p}$ и $\tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, 0) = \tilde{v}_{0p}$. В дальнейшем будем полагать пучок моноскоростным в начальный момент времени развития неустойчивости. Поэтому в системе координат, связанной с пучком, начальные возмущения скорости макрочастиц полагаем равными нулю, т. е. $\tilde{v}_{0p} = 0$.

Уравнения (7), (8), аналогичные им уравнения для области вакуума и уравнения (13), (16) совместно с граничным условием (11) представляют собой замкнутую систему самосогласованных нелинейных уравнений, описывающих временную эволюцию возбуждаемых пучком полей. Для ее решения будем полагать, что величины A_{cyl} и A_{vac} зависят от времени и удовлетворяют следующим условиям:

$$\left| \frac{1}{A_{cyl, vac}} \frac{\partial A_{cyl, vac}}{\partial t} \right| \ll \omega. \quad (17)$$

Остальные компоненты полей $E_\rho(\rho, z, t)$, $H_\varphi(\rho, z, t)$ в области цилиндра и вакуума представим в виде

$$E_\rho^{cyl, vac}(\rho, z, t) = B_{cyl, vac}(\rho, t) \exp[i(q_z z - \omega t)], \quad (18)$$

$$H_\varphi^{cyl, vac}(\rho, z, t) = C_{cyl, vac}(\rho, t) \exp[i(q_z z - \omega t)], \quad (19)$$

где первый индекс «cyl» в обозначениях поля и его амплитуды соответствует области цилиндра, а второй «vac» — области вакуума; амплитуды $B_{cyl}(\rho, t)$, $C_{cyl}(\rho, t)$, $B_{vac}(\rho, t)$, $C_{vac}(\rho, t)$ удовлетворяют условиям аналогичным (17). Подставив выражения (9), (10), (18) и (19) в уравнения (7), (8) и аналогичные им уравнения для области вакуума, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{cyl}(\rho, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial B_{cyl}(\rho, t)}{\partial t} - \frac{c^2 \kappa^2}{\varepsilon} B_{cyl}(\rho, t) &= \\ &= -\frac{ic^2 q_z \kappa}{\varepsilon} J'_0(\kappa \rho) A_{cyl}(t), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 B_{vac}(\rho, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial B_{vac}(\rho, t)}{\partial t} + c^2 q^2 B_{vac}(\rho, t) &= \\ &= -ic^2 q_z q K'_0(q\rho) A_{vac}(t), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_{cyl}(\rho, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial C_{cyl}(\rho, t)}{\partial t} - \frac{c^2 \kappa^2}{\varepsilon} C_{cyl}(\rho, t) &= \\ &= c\kappa J'_0(\kappa \rho) \left(\frac{\partial A_{cyl}(t)}{\partial t} - i\omega A_{cyl}(t) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_{vac}(\rho, t)}{\partial t^2} - 2i\omega \frac{\partial C_{vac}(\rho, t)}{\partial t} + c^2 q^2 C_{vac}(\rho, t) &= \\ &= cqK'_0(q\rho) \left(\frac{\partial A_{vac}(t)}{\partial t} - i\omega A_{vac}(t) \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где штрих у специальных функций означает производную по аргументу. Подставив в (13) выражения для полей (9), (10) и (18), (19), умножив затем обе части равенства на $\exp[-i(q_z z - \omega t)]$ и выполнив усреднение по периоду $2\pi/\omega$, получим

$$\begin{aligned} B_{vac}(\rho_0, t) - B_{cyl}(\rho_0, t) &= \frac{1}{iq_z} \times \\ &\times [qK'_0(q\rho_0)A_{vac}(t) - \kappa J'_0(\kappa\rho_0)A_{cyl}(t)] - \frac{4\pi e}{c^2 q_z^2} \Gamma, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\Gamma = \frac{\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \frac{\partial^2 n(z, t)}{\partial t^2} \exp[-i(q_z z - \omega t)] dt. \quad (25)$$

Подстановка (14) в (25) при выполнении резонанса Вавилова – Черенкова $\omega = q_z v_0$ дает

$$\Gamma = -\frac{\omega^2 n_0 a}{M} \sum_{p=1}^M \exp \left[-i \frac{\omega}{v_0} \tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t) \right]. \quad (26)$$

Из выражений (9), (10) и граничного условия (11) найдем следующую связь между амплитудами $A_{cyl}(t)$ и $A_{vac}(t)$:

$$A_{cyl}(t) J_0(\kappa \rho_0) = A_{vac}(t) K_0(q \rho_0). \quad (27)$$

Тогда, воспользовавшись выражением (27), из (24) получим

$$\begin{aligned} A_{cyl}(t) &= \frac{iq_z \rho_0}{\Delta_0 J_0(\kappa \rho_0)} [B_{vac}(\rho_0, t) - B_{cyl}(\rho_0, t)] - \\ &- \frac{4\pi i e \rho_0}{c^2 q_z \Delta_0 K_0(q \rho_0)} \Gamma \end{aligned} \quad (28)$$

и

$$\begin{aligned} A_{vac}(t) &= A_{cyl}(t) J_0(\kappa \rho_0) / K_0(q \rho_0), \\ \Delta_0 &= q \rho_0 Y_K - \kappa \rho_0 Y_J, \end{aligned}$$

где $Y_K = K'_0(q \rho_0) / K_0(q \rho_0)$ и $Y_J = J'_0(\kappa \rho_0) / J_0(\kappa \rho_0)$. Подставив (28) в уравнения (20)–(23), получим замкнутую систему уравнений, связывающую между собой амплитуды $B_{cyl}(\rho_0, t)$, $B_{vac}(\rho_0, t)$, $C_{cyl}(\rho_0, t)$, $C_{vac}(\rho_0, t)$ и поверхностную плотность пучка $n(z, t)$.

Представим рассмотренные выше комплексные амплитуды полей в следующем виде:

$$A_{cyl, vac}(t) = F_{cyl, vac}(t) \exp[i\alpha_{cyl, vac}(t)], \quad (29)$$

$$B_{cyl,vac}(\rho_0, t) = G_{cyl,vac}(\rho_0, t) \exp[i\chi_{cyl,vac}(t)], \quad (30)$$

$$C_{cyl,vac}(\rho_0, t) = P_{cyl,vac}(\rho_0, t) \exp[i\psi_{cyl,vac}(t)], \quad (31)$$

где $\alpha_{cyl}(t)$, $\alpha_{vac}(t)$, $\chi_{cyl}(t)$, $\chi_{vac}(t)$, $\psi_{cyl}(t)$, $\psi_{vac}(t)$ представляют собой медленно меняющиеся во времени фазы, удовлетворяющие условиям аналогичным (17). Подставив в граничное условие (27) представление комплексных амплитуд (29), получим

$$F_{cyl}(t)J_0(\kappa\rho_0) = F_{vac}(t)K_0(q\rho_0),$$

$$\alpha_{cyl}(t) = \alpha_{vac}(t) + 2\pi k, \quad \forall k \in Z.$$

В дальнейшем примем $F_{vac}(t) = F(t)$ и $\alpha_{cyl}(t) = \alpha_{vac}(t) = \alpha(t)$ (для $k = 0$).

Система уравнений (16) с учетом выражений (26), (28), (30), (31) переписывается в виде

$$\frac{d\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)}{dt} = \tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t),$$

$$\frac{d\tilde{v}_{zp}(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)}{dt} = \frac{eq_z\rho_0}{m_0\Delta_0 K_0(q\rho_0)} \times$$

$$\times \left[-G_{cyl}(\rho_0, t) \sin\left(\frac{\omega}{v_0}\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t) + \chi_{cyl}(t)\right) + \right. \quad (32)$$

$$+ G_{vac}(\rho_0, t) \sin\left(\frac{\omega}{v_0}\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t) + \chi_{vac}(t)\right) -$$

$$- \frac{4\pi ev_0^2 n_0 a}{c^2 M} \left(\sigma_1(t) \cos\left(\frac{\omega}{v_0}\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)\right) - \right.$$

$$\left. \left. - \sigma_2(t) \sin\left(\frac{\omega}{v_0}\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)\right) \right) \right],$$

где

$$\sigma_1(t) = \sum_{p=1}^M \cos\left(\frac{\omega}{v_0}\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)\right),$$

$$\sigma_2(t) = \sum_{p=1}^M \sin\left(\frac{\omega}{v_0}\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t)\right).$$

Система уравнений (20)–(23) с учетом выражений (26), (28), (30), (31) переписывается в виде

$$\frac{\partial^2 G_{cyl}(\rho_0, t)}{\partial t^2} = \left[\left(\omega - \frac{\partial \chi_{cyl}(t)}{\partial t} \right)^2 + \right.$$

$$+ \left. \frac{c^2 \kappa \Delta_1}{\varepsilon \rho_0 \Delta_0} - \omega^2 \right] G_{cyl}(\rho_0, t) + \frac{c^2 q_z^2 \kappa \rho_0}{\varepsilon \Delta_0} Y_J G_{vac}(\rho_0, t) \times$$

$$\times \cos(\chi_{vac}(t) - \chi_{cyl}(t)) - \frac{A_0 Y_J S_{cyl}(t)}{\varepsilon M}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_{cyl}(t)}{\partial t^2} = 2 \left(\omega - \frac{\partial \chi_{cyl}(t)}{\partial t} \right) \frac{1}{G_{cyl}(\rho_0, t)} \times$$

$$\times \frac{\partial G_{cyl}(\rho_0, t)}{\partial t} + \frac{c^2 q_z^2 \kappa \rho_0}{\varepsilon \Delta_0} Y_J \frac{G_{vac}(\rho_0, t)}{G_{cyl}(\rho_0, t)} \times$$

$$\times \sin(\chi_{vac}(t) - \chi_{cyl}(t)) + \frac{A_0 Y_J U_{cyl}(t)}{\varepsilon M G_{cyl}(\rho_0, t)}, \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 G_{vac}(\rho_0, t)}{\partial t^2} = \left[\left(\omega - \frac{\partial \chi_{cyl}(t)}{\partial t} \right)^2 + \right.$$

$$+ \left. \frac{c^2 q \Delta_2}{\rho_0 \Delta_0} - \omega^2 \right] G_{vac}(\rho_0, t) - \frac{c^2 q_z^2 q \rho_0}{\Delta_0} Y_K G_{cyl}(\rho_0, t) \times$$

$$\times \cos(\chi_{vac}(t) - \chi_{cyl}(t)) - \frac{A_0 Y_K S_{vac}(t)}{M}, \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \chi_{vac}(t)}{\partial t^2} = 2 \left(\omega - \frac{\partial \chi_{vac}(t)}{\partial t} \right) \frac{1}{G_{vac}(\rho_0, t)} \times$$

$$\times \frac{\partial G_{vac}(\rho_0, t)}{\partial t} + \frac{c^2 q_z^2 q \rho_0}{\Delta_0} Y_K \frac{G_{cyl}(\rho_0, t)}{G_{vac}(\rho_0, t)} \times$$

$$\times \sin(\chi_{vac}(t) - \chi_{cyl}(t)) + \frac{A_0 Y_K U_{vac}(t)}{M G_{vac}(\rho_0, t)}, \quad (36)$$

где

$$A_0 = \frac{4\pi e \kappa \omega^3 n_0 a \rho_0}{\Delta_0 v_0 q_z},$$

$$\Delta_1 = q \kappa \rho_0^2 Y_K - \varepsilon \rho_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} Y_J,$$

$$\Delta_2 = \rho_0^2 \frac{\omega^2}{c^2} Y_K + q \kappa \rho_0^2 Y_J,$$

$$S_{cyl,vac}(t) = \sum_{p=1}^M \cos\left(\frac{\omega}{v_0}\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t) + \chi_{cyl,vac}(t)\right),$$

$$U_{cyl,vac}(t) = \sum_{p=1}^M \sin\left(\frac{\omega}{v_0}\tilde{z}_p(\tilde{z}_{0p}, \tilde{v}_{0p}, t) + \chi_{cyl,vac}(t)\right).$$

Решив систему уравнений (33)–(36) и воспользовавшись соотношением (28), можно найти временную зависимость амплитуды $F(t)$ продольной компоненты электрического поля на границе цилиндра. Уравнения (22) и (23) записываются в виде, аналогичном системе уравнений (33)–(36), чтобы описывать временную эволюцию амплитуд $P_{cyl}(\rho_0, t)$, $P_{vac}(\rho_0, t)$ и фаз $\psi_{cyl}(t)$, $\psi_{vac}(t)$ магнитного поля волн. Соответствующие уравнения мы приводить не будем ввиду их громоздкости. В результате мы имеем систему уравнений, из решения которой находим медленно изменяющиеся амплитуды полей $E_\rho^{cyl}(\rho_0, z, t)$, $E_\rho^{vac}(\rho_0, z, t)$, $H_\varphi^{vac}(\rho_0, z, t)$, $H_\varphi^{cyl}(\rho_0, z, t)$ и $E_z^{cyl}(\rho_0, z, t) = E_z^{vac}(\rho_0, z, t)$.

Для численного решения указанной выше системы уравнений удобно ввести в рассмотрение безразмерные амплитуды полей. Для этого амплитуды всех полей будем нормировать на некоторую величину, имеющую смысл некоторого характерного максимального значения. Эту величину находим из условия, что средняя за период волны энергия электромагнитных волн, возбуждаемых пучком на нелинейной стадии неустойчивости, является величиной порядка кинетической энергии пучка в системе отсчета, связанной с волной. Это условие соответствует захвату частиц пучка полем возбуждаемой волны. Оценим по порядку величины среднюю энергию электромагнитных волн в вакууме при условии, что $\rho = \rho_0$, и в пренебрежении медленной зависимостью амплитуд полей от времени:

$$W^{vac}(\rho_0) = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E}^{vac}(\rho_0, z, t) \mathbf{E}^{*vac}(\rho_0, z, t) + \mathbf{H}^{vac}(\rho_0, z, t) \mathbf{H}^{*vac}(\rho_0, z, t) \},$$

где «*» обозначает комплексное сопряжение. Согласно сказанному выше имеем

$$W^{vac}(\rho_0) \propto m_0 n_0 (v_0 - v_{ph})^2,$$

где v_{ph} — фазовая скорость возбуждаемой пучком волны. Воспользовавшись уравнениями Максвелла (7), (8) при $\varepsilon = 1$ и определениями полей (9), (10), (18), (19) и (29)–(31) для $W^{vac}(\rho_0)$ получим

$$W^{vac}(\rho_0) = \frac{\kappa^2}{8\pi q^2} \left(\frac{Y_K}{Y_J} \right)^2 \times \left[1 + \left(\frac{\omega}{cq_z} \right)^2 + \left(\frac{q}{q_z Y_K} \right)^2 \right] (G_{cyl}^{max})^2,$$

где G_{cyl}^{max} — максимальное (по порядку величины) значение амплитуды $G_{cyl}(\rho_0, t)$.

Найдем выражение для фазовой скорости волны v_{ph} . Используя результаты работы [40], дисперсионное уравнение связанных волн пучка и диэлектрического цилиндра для рассматриваемого случая аксиально-симметричных волн можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{q\rho_0} Y_K + \frac{\varepsilon}{\kappa\rho_0} Y_J \right) (\omega - q_z v_0)^2 = -\frac{a}{\rho_0} \omega_b^2.$$

Заметим, что выражение в первых скобках в левой части этого уравнения, приравненное к нулю, представляет собой дисперсионное уравнение собственной аксиально-симметричной волны E -типа диэлектрического цилиндра. Следуя методике работы [41]

для нахождения инкремента возникающей неустойчивости γ , получим

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} (a\omega_R \omega_b^2)^{1/3} \times \left[\rho_0 (\varepsilon - 1) \left(1 + \frac{\varepsilon}{\beta^2 \varepsilon - 1} \frac{J_1^2(\kappa\rho_0)}{J_0^2(\kappa\rho_0)} \right) \right]^{-1/3},$$

где $\beta = v_0/c$, $\kappa \equiv \kappa(q_z, \omega_R) = \omega_R \sqrt{\beta^2 \varepsilon - 1}/v_0$, $\omega_R = q_z v_0$. Тогда для v_{ph} имеем $v_{ph} = v_0 - \gamma/\sqrt{3} q_z$, что соответствует медленной связанной волне. В результате получаем следующее выражение для G_{cyl}^{max} :

$$G_{cyl}^{max} = \frac{2\gamma q \sqrt{2\pi m_0 n_0}}{\kappa \sqrt{3} q_z} \left| \frac{Y_J}{Y_K} \right| \times \left[1 + \left(\frac{\omega}{cq_z} \right)^2 + \left(\frac{q}{q_z Y_K} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (37)$$

Ниже будет приведен численный анализ временной зависимости медленно изменяющихся амплитуд полей электромагнитных волн, приведенных к безразмерному виду относительно величины (37), взятой для фиксированных значений v_0, q_z (при выполнении условия $\omega = q_z v_0$) и радиального модового индекса s , соответствующего количеству вариаций поля вдоль радиальной координаты ρ .

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Численный анализ системы уравнений (32)–(36) и соответствующих уравнений для амплитуд $P_{cyl}(\rho_0, t)$, $P_{vac}(\rho_0, t)$ и фаз $\psi_{cyl}(t)$, $\psi_{vac}(t)$ магнитного поля волны будем проводить, используя следующие безразмерные величины: $\tau = \omega_0 t$, $\bar{\omega} = \omega/\omega_0$, $\bar{\omega}_b = \omega_b/\omega_0$, $\bar{\gamma} = \gamma/\omega_0$, $\bar{q}_z = q_z \rho_0$, $\bar{\kappa} = \kappa \rho_0$, $\bar{z}_p = q_z \tilde{z}_p$, $\bar{v}_p = q_z \tilde{v}_p/\omega$,

$$\left| \bar{E}_z^{vac}(\rho_0, \tau) \right| = \left| \bar{E}_z^{cyl}(\rho_0, \tau) \right| = \frac{F(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{max}} K_0(q\rho_0), \quad (38)$$

$$\left| \bar{E}_\rho^{cyl}(\rho_0, \tau) \right| = \frac{G_{cyl}(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{max}}, \quad (39)$$

$$\left| \bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau) \right| = \frac{G_{vac}(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{max}},$$

$$\left| \bar{H}_\varphi^{cyl}(\rho_0, \tau) \right| = \frac{P_{cyl}(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{max}}, \quad (40)$$

$$\left| \bar{H}_\varphi^{vac}(\rho_0, \tau) \right| = \frac{P_{vac}(\rho_0, \tau)}{G_{cyl}^{max}},$$

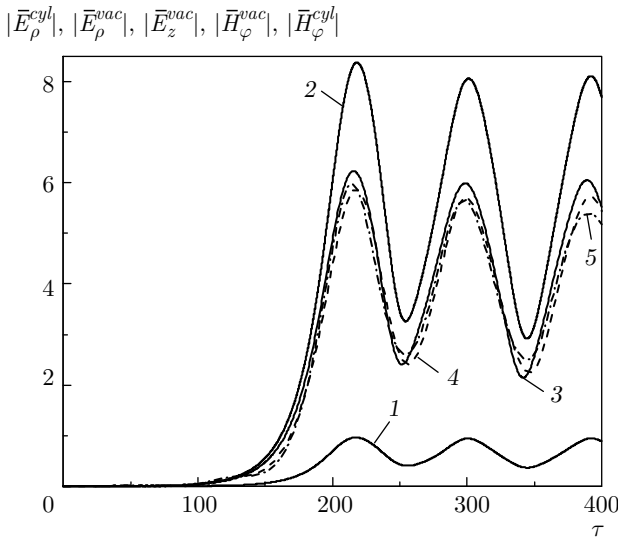


Рис. 1. Зависимости медленно изменяющихся амплитуд электрического и магнитного полей волны E_{01} от безразмерного времени

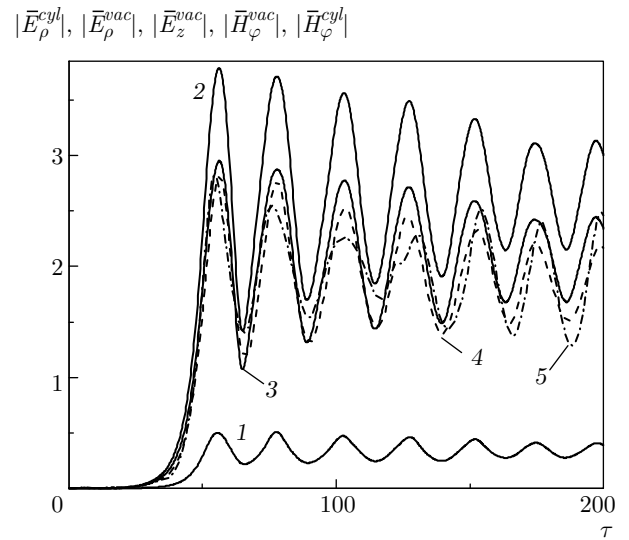


Рис. 2. Зависимости медленно изменяющихся амплитуд электрического и магнитного полей волны E_{02} от безразмерного времени

где $\omega_0 = c/\rho_0$. В качестве материала диэлектрического цилиндра выберем поликор с $\epsilon = 9.6$, радиус цилиндра $\rho_0 = 0.5$ см. Значения равновесной концентрации электронов пучка n_0 , толщины стенки пучка a и скорости направленного движения электронов пучка v_0 выберем следующими: $n_0 = 10^{10}$ см $^{-3}$, $a = 10^{-3}$ см и $v_0 = 0.48c$. Для выбранных параметров системы имеем $\omega_0 = 6 \cdot 10^{10}$ с $^{-1}$, $\omega_b/\omega_0 \approx 0.1$. Анализ временной зависимости безразмерных амплитуд полей (38)–(40) проведем для трех значений радиального модового индекса $s = 1, 2, 3$. Резонансные значения q_z и ω , соответствующие точкам пересечения дисперсионных кривых собственных азимутально-симметричных мод рассматриваемого цилиндра и зависимости $\omega = q_z v_0$, равны (см. [40]) $\bar{q}_z \approx 3.3$, $\bar{\omega} \approx 1.6$, $\bar{\gamma} \approx 1.2 \cdot 10^{-2}$ ($\omega \approx 9.56 \cdot 10^{10}$ с $^{-1}$, $\lambda \approx 0.95$ см) для $s = 1$; $\bar{q}_z \approx 6.15$, $\bar{\omega} \approx 2.98$, $\bar{\gamma} \approx 1.5 \cdot 10^{-2}$ ($\omega \approx 1.79 \cdot 10^{11}$ с $^{-1}$, $\lambda \approx 0.5$ см) для $s = 2$; $\bar{q}_z \approx 8.97$, $\bar{\omega} \approx 4.35$, $\bar{\gamma} \approx 1.7 \cdot 10^{-2}$ ($\omega \approx 2.6 \cdot 10^{11}$ с $^{-1}$, $\lambda \approx 0.35$ см) для $s = 3$; где $\lambda = 2\pi/q_z$ — длина волны. Величину G_{cyl}^{max} вычислим для значений \bar{q}_z и $\bar{\omega}$, соответствующих $s = 1$: $G_{cyl}^{max} \approx 5.3 \cdot 10^{-2}$ СГС (или $G_{cyl}^{max} \approx 1.6 \cdot 10^{-3}$ В/см).

На рис. 1–3 приведены зависимости $|\bar{E}_\rho^{cyl}(\rho_0, \tau)|$, $|\bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau)|$, $|\bar{E}_z^{vac}(\rho_0, \tau)|$, $|\bar{H}_\varphi^{vac}(\rho_0, \tau)|$, $|\bar{H}_\varphi^{cyl}(\rho_0, \tau)|$ от безразмерного времени τ для волн со значением радиального модового индекса $s = 1$ (волны E_{01}), $s = 2$ (волны E_{02}) и $s = 3$ (волны E_{03}) соответственно. Здесь мы используем обозначения для собственных мод цилиндра E_{ns} , принятые в работе [42]. Первый индекс n соответствует половине количества ва-

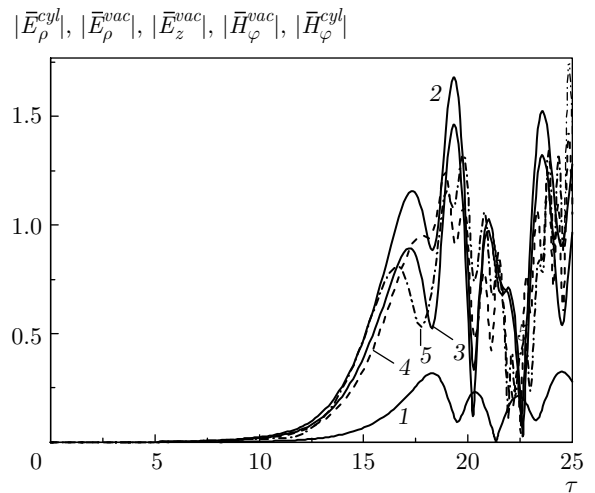


Рис. 3. Зависимости медленно изменяющихся амплитуд электрического и магнитного полей волны E_{03} от безразмерного времени

риаций поля по азимутальному углу φ ($n = 0$ для азимутально-симметричной волны), а второй индекс s — радиальный модовый индекс.

На рис. 1–3 кривые 1 соответствуют зависимости $|\bar{E}_\rho^{cyl}(\rho_0, \tau)|$, кривые 2 — зависимости $|\bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau)|$, кривые 3 — зависимости $|\bar{E}_z^{vac}(\rho_0, \tau)|$, кривые 4 — зависимости $|\bar{H}_\varphi^{vac}(\rho_0, \tau)|$, кривые 5 — зависимости $|\bar{H}_\varphi^{cyl}(\rho_0, \tau)|$. Решение рассматриваемой системы уравнений для медленно изменяющихся во времени амплитуд и фаз полей было выполнено чис-

ленно методом Рунге – Кутты. Пучок электронов моделировался отдельными макрочастицами (в форме колец), равномерно распределенными в начальный момент времени в интервале $0 \leq \bar{z}_\rho \leq 2\pi$. Число макрочастиц M было равно 8000. Отметим, что использовавшаяся программа вычислений позволяла проводить интегрирование с переменным шагом путем задания относительной погрешности на каждом шаге. Начальные значения безразмерных амплитуд полей (38)–(40) полагались равными 10^{-12} , а их производных по времени — произведению их начальных значений на соответствующий каждому типу волны безразмерный инкремент $\bar{\gamma}$. Начальные значения медленных фаз и их производных полагались равными нулю.

Из рис. 1–3 видно, что для волны E_{01} время насыщения неустойчивости $\tau_1 \approx 217$ (или $t_1 = \tau_1/\omega_0 \approx 3.6$ нс) приблизительно в 3.8 раза больше, чем для волны E_{02} ($\tau_2 \approx 56$ или $t_2 = \tau_2/\omega_0 \approx 0.94$ нс), и приблизительно в 12.5 раза больше, чем для волны E_{03} ($\tau_3 \approx 17.3$ или $t_3 = \tau_3/\omega_0 \approx 0.07$ нс). К этому моменту времени происходит захват частиц пучка полем возбуждаемой волны и прекращается дальнейший рост амплитуды поля, соответствующий линейной стадии развития неустойчивости. Анализ приведенных на рис. 1–3 зависимостей показывает, что амплитуды насыщения неустойчивости электрического и магнитного полей для волны E_{01} приблизительно в 2.2 раза больше соответствующих значений для волны E_{02} и приблизительно в 7.3 раза больше, чем для волны E_{03} . При этом «период» осцилляций этих амплитуд на нелинейной стадии насыщения неустойчивости для волны E_{01} приблизительно в 3.8 раза больше, чем для волны E_{02} и приблизительно в 40 раз больше, чем для волны E_{03} . Так, для волны E_{01} этот период приблизительно равен $T_1 \approx 1.38$ нс, для волны E_{02} — $T_2 \approx 0.36$ нс, а для волны E_{03} — $T_3 \approx 0.033$ нс. Следовательно, можно сделать вывод о том, что с ростом радиального модового индекса s времена насыщения неустойчивости, соответствующие им значения медленных амплитуд и «периоды» осцилляций этих амплитуд на нелинейной стадии насыщения неустойчивости уменьшаются. Заметим, что с увеличением радиального модового индекса s время насыщения неустойчивости и «период» нелинейных осцилляций медленных амплитуд уменьшаются приблизительно в одинаковое число раз.

Из рис. 1–3 видно также, что наибольшей оказывается амплитуда осцилляций величины $|\bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau)|$ (кривые 2). Отношение максимальных

амплитуд насыщения неустойчивости величин $|\bar{E}_\rho^{vac}(\rho_0, \tau)|$ и $|\bar{E}_\rho^{cyl}(\rho_0, \tau)|$ для волны E_{01} приблизительно равно 8.7, для волны E_{02} — приблизительно равно 7.6, а для волны E_{03} — приблизительно равно 3.6. Применительно к граничному условию (12) это означает, что «вклад пучка» в величину скачка радиальной компоненты электрического поля волны растет с увеличением значения радиального модового индекса s . Анализ скачков зависимостей $|\bar{H}_\varphi^{vac}(\rho_0, \tau)|$ и $|\bar{H}_\varphi^{cyl}(\rho_0, \tau)|$ для волн E_{01} , E_{02} и E_{03} приводит к аналогичному выводу.

Из сравнения рис. 1, 2 с рис. 3 видно, что осцилляции медленных амплитуд на рис. 3 носят нерегулярный характер. Вероятной причиной этого является то, что «период» нелинейных осцилляций для $s = 3$ оказывается сравнимым с периодом возбуждаемой волны: $\omega_0 T_3 \approx 2$ и $\omega_0(2\pi/\omega) \approx 1.44$, где частота ω соответствует волне E_{03} . Это означает нарушение условия (17), являющегося фактически условием «медленности» изменения амплитуд полей во времени. Это может свидетельствовать о том, что используемый в настоящей работе метод медленно изменяющихся амплитуд и фаз перестает быть применимым для волн со значениями радиального модового индекса, превышающими некоторое «критическое» значение. Для выбранных параметров цилиндра и пучка это значение равно $s_{cr} = 2$. Действительно, для $s = 2$ имеем $\omega_0 T_2 \approx 21$, что в 7 раз превышает величину $\omega_0(2\pi/\omega) \approx 3$, где частота ω соответствует волне E_{02} , а для $s = 1$ имеем $\omega_0 T_1 \approx 83$, что почти в 52 раза превышает величину $\omega_0(2\pi/\omega) \approx 1.6$, где частота ω соответствует волне E_{01} . Здесь величина $\omega_0(2\pi/\omega)$ представляет собой безразмерный период «быстрых» осцилляций полей возбуждаемой волны с резонансной частотой ω .

Рассмотрим вопрос о поляризации возбуждаемых пучком волн. Для этого, используя подход, развитый в [43], запишем уравнение эллипса для безразмерных компонент полей $\Lambda_z = \text{Re } E_z(\rho_0, \tau)/\Phi(\rho_0, \tau)$ и $\Lambda_\rho = \text{Re } E_\rho(\rho_0, \tau)/\Phi(\rho_0, \tau)$:

$$\begin{aligned} \Lambda_z^2 + \Lambda_\rho^2 - 2\Lambda_z\Lambda_\rho \cos(\alpha(\tau) - \chi(\tau)) = \\ = \sin^2(\alpha(\tau) - \chi(\tau)), \quad (41) \end{aligned}$$

где $\Phi(\rho_0, \tau) = F(\rho_0, \tau)K_0(q\rho_0)$ для области вакуума (в силу граничного условия (11) эта же величина $\Phi(\rho_0, \tau)$ соответствует и области цилиндра) и для области цилиндра, компонента $E_\rho(\rho_0, \tau)$ и соответствующие ей амплитуда $G(\rho_0, \tau)$ и фаза $\chi(\tau)$ могут относиться как к области цилиндра, так и к области вакуума. Кроме того, выпишем выражение для коэффициента поляризации:

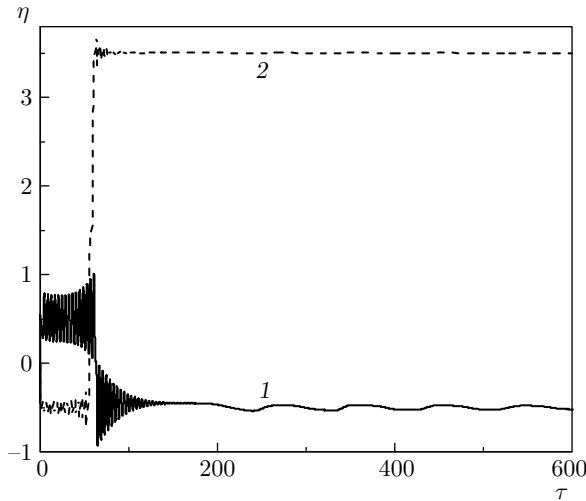


Рис. 4. Зависимости разности фаз $\eta(\tau)$ компонент электрического поля $E_{\rho}^{cyl}(\rho_0, \tau)$ и $E_z^{vac}(\rho_0, \tau)$ волны E_{01} для областей цилиндра (кривая 1) и вакуума (кривая 2) от безразмерного времени

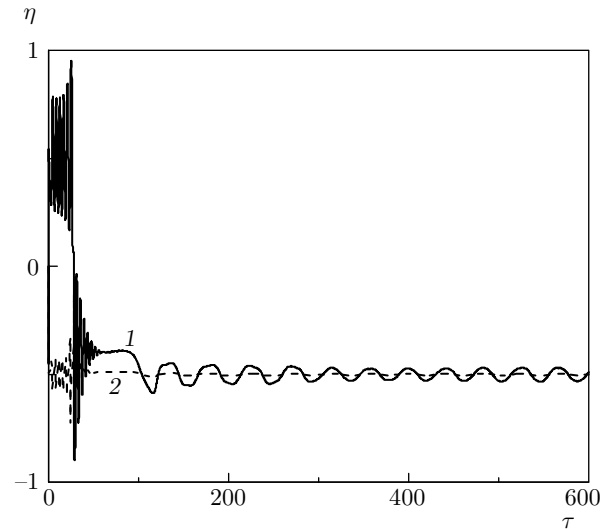


Рис. 5. Зависимости разности фаз $\eta(\tau)$ компонент электрического поля $E_{\rho}^{cyl}(\rho_0, \tau)$ и $E_z^{vac}(\rho_0, \tau)$ волны E_{02} для областей цилиндра (кривая 1) и вакуума (кривая 2) от безразмерного времени

$$\mathcal{J}(\tau) = \frac{E_z(\rho_0, \tau)}{E_{\rho}(\rho_0, \tau)} = \frac{\Phi(\rho_0, \tau)}{G(\rho_0, \tau)} \exp\{i\pi\eta(\tau)\},$$

где $\eta(\tau) = [\alpha(\tau) - \chi(\tau)]/\pi$. Напомним, что в области цилиндра $\chi(\tau) = \chi_{cyl}(\tau)$ и мы рассматриваем величину $\eta_{cyl}(\tau)$, в области вакуума $\chi(\tau) = \chi_{vac}(\tau)$ и рассматриваем величину $\eta_{vac}(\tau)$. Заметим, что, как следует из (41), поляризация волны может изменяться со временем. Кроме того, из рис. 1, 2 видно, что $\Phi(\rho_0, \tau)/G(\rho_0, \tau) > 1$ (т.е. $|\mathcal{J}(\tau)| > 1$) для области цилиндра и $\Phi(\rho_0, \tau)/G(\rho_0, \tau) < 1$ (т.е. $|\mathcal{J}(\tau)| < 1$) для области вакуума.

На рис. 4 представлены зависимости $\eta_{cyl}(\tau)$ (кривая 1) и $\eta_{vac}(\tau)$ (кривая 2) для волны E_{01} . Из рис. 4 видно, что разность фаз $\eta_{cyl}(\tau)$ для электрического поля в цилиндре осциллирует со временем и изменяется в пределах $-1 < \eta_{cyl}(\tau) \leq 1.011$. Это означает, что поляризация электрического поля в цилиндре изменяется со временем и может быть как линейной при $\eta_{cyl}(\tau) = 0$ и $\eta_{cyl}(\tau) = 1$, так и эллиптической при прочих значениях $\eta_{cyl}(\tau)$ (с учетом того, что в цилиндре $|\mathcal{J}(\tau)| > 1$). Изменение знака $\eta_{cyl}(\tau)$ означает изменение направления вращения вектора электрического поля волны в плоскости (ρ, z) . Так, при $\eta_{cyl}(\tau) > 0$ вектор электрического поля волны вращается против часовой стрелки, если смотреть с конца единичного вектора, определяющего положительное направление оси φ .

Подобным образом ведет себя зависимость $\eta_{vac}(\tau)$. В моменты времени, когда $\eta_{vac}(\tau)$ равна 0, 1, 2, 3, поляризация волны линейная, а в остальные моменты времени — эллиптическая. Интересно от-

метить, что на нелинейной стадии неустойчивости, при $\tau > \tau_1 \approx 217$, разность фаз $\eta_{vac}(\tau)$ с хорошей точностью (погрешность приблизительно равна 0.1%) совпадает со значением 3.5, оставаясь при этом осциллирующей зависимостью времени. Это свидетельствует о том, что поляризация волны в вакууме является эллиптической ($|\mathcal{J}(\tau)| < 1$), а оси эллипса практически совпадают с осями координат ρ и z . Действительно, при $\eta_{vac}(\tau) = 3.5$ уравнение (41) переходит в уравнение эллипса. Обращает на себя внимание также то, что на нелинейной стадии неустойчивости (при $\tau > \tau_1 \approx 217$) знаки $\eta_{cyl}(\tau)$ и $\eta_{vac}(\tau)$ противоположны. Физически это означает, что в цилиндре и в вакууме в волне E_{01} направления вращения вектора электрического поля противоположны.

На рис. 5 представлены зависимости $\eta_{cyl}(\tau)$ (кривая 1) и $\eta_{vac}(\tau)$ (кривая 2) для волны E_{02} . Из рис. 5 видно, что качественное поведение этих зависимостей аналогично приведенным выше зависимостям для волны E_{01} . Сравнение зависимостей $\eta_{cyl}(\tau)$ и $\eta_{vac}(\tau)$ на рис. 4, 5 приводит к выводу о том, что для волн с разными значениями радиального модового индекса s на нелинейной стадии неустойчивости направления вращения вектора электрического поля в области цилиндра совпадают ($\eta_{cyl}(\tau) < 0$ для волн E_{01} и E_{02}), а в области вакуума оказываются противоположными ($\eta_{vac}(\tau) > 0$ для волны E_{01} и $\eta_{vac}(\tau) < 0$ для E_{02}). Кроме того, в области вакуума главные оси эллипса поляризации практически совпадают с осями координат ρ и z .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе решена задача о нелинейной стабилизации неустойчивости трубчатого электронного пучка при его движении вдоль поверхности твердотельного диэлектрического цилиндра. Пучок полагался нерелятивистским, бесконечно тонким в радиальном направлении, движущимся вдоль силовых линий бесконечно сильного постоянного магнитного поля на малых (по сравнению с длиной возбуждаемой волны) прицельных расстояниях от поверхности цилиндра. Рассмотрено возбуждение азимутально-симметричных объемно-поверхностных электромагнитных волн E -типа при выполнении условия резонанса Вавилова – Черенкова. Расчет выполнен с использованием медленно меняющихся во времени амплитуд и фаз электрического и магнитного полей волны. Для этих величин из уравнений Максвелла, материальных уравнений и граничных условий была получена соответствующая система дифференциальных уравнений, которая решалась методом Рунге – Кутты с переменным шагом. При этом пучок представлялся в виде набора макрочастиц — заряженных колец. Показано, что в результате нелинейных процессов происходит уменьшение частоты возбуждаемых электромагнитных волн. Анализ зависимостей медленно меняющихся амплитуд полей от времени показал, что с увеличением радиального модового индекса s время насыщения неустойчивости, максимальные значения и «период» осцилляций амплитуд на нелинейной стадии насыщения неустойчивости уменьшаются. Установлено, что использованный в работе метод медленно изменяющихся амплитуд и фаз перестает быть применимым для волн со значениями радиального модового индекса, превышающими некоторое «критическое» значение, для которого характерный «период» осцилляций амплитуд полей на нелинейной стадии неустойчивости становится соизмеримым с периодом «быстрых» осцилляций возбуждаемой волны.

Анализ зависимостей разностей медленных фаз радиальной и аксиальной компонент электрического поля волн E_{01} и E_{02} от безразмерного времени τ показал, что на нелинейной стадии неустойчивости поляризация волн — эллиптическая. Направления вращения векторов электрических полей E_{01} - и E_{02} -волн в области цилиндра совпадают, а в области вакуума оказываются противоположными. Кроме того, в области вакуума главные оси эллипса поляризации с хорошей точностью совпадают с осями координат ρ и z .

Благодарности. Авторы выражают благодарность В. И. Карасю за плодотворное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Pickwell, B. E. Cole, A. J. Fitzgerald et al., *Appl. Phys. Lett.* **84**, 2190 (2004).
2. P. C. Ashwort, E. Pickwell-MacPherson, E. Provenzano et al., *Opt. Express* **17**, 12444 (2009).
3. Y. Yang, A. Shutler, and D. Grischkowsky, *Opt. Express* **19**, 8830 (2011).
4. T. Nagatsuma, S. Horiguchi, Y. Minamikata et al., *Opt. Express* **21**, 23736 (2013).
5. M. C. Kemp, *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* **1**, 282 (2011).
6. A. S. Shlapakovski, S. N. Artemenko, V. A. Avgustinovich et al., *The 14th Symposium on High Current Electronics, Tomsk* (2006), p. 359.
7. В. А. Августинович, С. Н. Артеменко, А. И. Мащенко и др., *Письма в ЖТФ* **36**, 103 (2010).
8. А. Я. Кириченко, Ю. Ф. Лонин, В. Г. Папкович и др., *Вопросы атомн. науки и техники, сер. Ядерно-физические исследования* № 2 (66), 135 (2010).
9. K. V. Galaydych, Yu. F. Lonin, A. G. Ponomarev et al., *Probl. Atom. Sci. Technol., Ser.: Plasma Phys.* **6**, 123 (2010).
10. А. В. Дормидонтов, А. Я. Кириченко, Ю. Ф. Лонин и др., *Письма в ЖТФ* **38**, 65 (2012).
11. K. V. Galaydych, Yu. F. Lonin, A. G. Ponomarev et al., *Probl. Atom. Sci. Technol., Ser.: Plasma Phys.* № 6(82), 158 (2012).
12. К. В. Галайдыч, Ю. Ф. Лонин, А. Г. Пономарев и др., *ВАНТ, сер. Ядерно-физические исследования* № 3(79), 174 (2012).
13. Yu. O. Averkov, Yu. V. Prokopenko, and V. M. Yakovenko, *Telecomm. Radio Engin.* **75**, 1467 (2016).
14. Yu. O. Averkov, Yu. V. Prokopenko, and V. M. Yakovenko, *Phys. Rev. E* **96**, 013205 (2017).
15. Yu. O. Averkov, Yu. V. Prokopenko, and V. M. Yakovenko, *Probl. Atom. Sci. Technol., Ser.: Plasma Electronics and New Methods of Acceleration* № 4(116), 3 (2018).
16. Ю. О. Аверков, Ю. В. Прокопенко, В. М. Яковенко, *ЖТФ* **89**, 9 (2019).
17. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, *ЖЭТФ* **47**, 1389 (1965).

18. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, *4-я конф. по физике плазмы и проблемам управляемого термоядерного синтеза*, Киев (1963), с. 92.
19. Р. К. Мазитов, *Прикладная механика и техническая физика* **1**, 27 (1965).
20. Т. О'Neil, *Phys. Fluids* **8**, 2255 (1965).
21. Ya. B. Fainberg, *Czechoslovak J. Phys.* **18B**, 652 (1968).
22. Я. Б. Файнберг, В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, *ЖЭТФ* **57**, 966 (1970).
23. В. И. Курилко, *ЖЭТФ* **57**, 885 (1970).
24. W. E. Drummond, J. H. Malmberg, T. M. O'Neil et al., *Phys. Fluids* **13**, 2422 (1970).
25. Р. И. Ковтун, А. А. Рухадзе, *ЖЭТФ* **58**, 1709 (1970).
26. Б. Н. Брейзман, Д. Д. Рютов, *ЖЭТФ* **60**, 408 (1971).
27. И. Н. Онищенко, А. Р. Линецкий, Н. Г. Мациборко и др., *Письма в ЖЭТФ* **12**, 407 (1970).
28. I. N. Onishchenko, V. D. Shapiro, and V. I. Shevchenko, *Plasma Phys.* **14**, 591 (1972).
29. А. А. Иванов, В. В. Параил, Т. К. Соболева, *ЖЭТФ* **63**, 1678 (1973).
30. А. А. Иванов, *Физика сильнонеравновесной плазмы*, Атомиздат, Москва (1977), с. 352.
31. Б. А. Альтеркоп, С. Е. Росинский, В. П. Тараканов, *Физика плазмы* **5**, 291 (1979).
32. *Энциклопедия низкотемпературной плазмы*, Вводный том, кн. 4, под ред. В. Е. Фортова, Наука, Москва (2000), с. 516.
33. М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, П. С. Стрелков, *Плазменная релятивистская СВЧ-электроника*, Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва (2002), с. 544.
34. Ю. В. Бобылёв, М. В. Кузелев, *Нелинейные явления при электромагнитных взаимодействиях электронных пучков с плазмой*, Физматлит, Москва (2009), с. 456.
35. А. В. Кукушкин, А. А. Рухадзе, *Физика плазмы* **43**, 776 (2017).
36. Ю. В. Бобылев, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Физика плазмы* **30**, 419 (2004).
37. Ю. В. Бобылев, М. В. Кузелев, А. А. Рухадзе, *Физика плазмы* **34**, 122 (2008).
38. K. V. Galaydych, Yu. F. Lonin, A. G. Ponomarev et al., *Probl. Atom. Sci. Technol., Ser.: Plasma Phys.* № 6(82), 158 (2012).
39. М. Абрамовица, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва (1979), с. 832.
40. Yu. O. Averkov, Yu. V. Prokopenko, and V. M. Yakovenko, *Telecomm. Radio Engin.* **76**, 1595 (2017).
41. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин и др., *Электродинамика плазмы*, Наука, Москва (1974), с. 720.
42. М. Е. Ильченко, В. Ф. Взятыхшев, Л. Г. Гасанов и др., *Диэлектрические резонаторы*, под ред. М. Е. Ильченко, Радио и связь, Москва (1989), с. 328.
43. М. Б. Виноградова, О. В. Руденко, А. В. Сухорук, *Теория волн*, Наука, Москва (1990), с. 432.