

МАГНИТНАЯ КОНВЕКЦИЯ В НЕОДНОРОДНО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОДУЛЯЦИИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

М. И. Копн^a, А. В. Тур^{c}, В. В. Яновский^{a,b**}*

^a *Институт монокристаллов Национальной академии наук Украины
61001, Харьков, Украина*

^b *Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
61000, Харьков, Украина*

^c *Université de Toulouse [UPS], CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie
BP 44346, 31028 Toulouse Cedex 4, France*

Поступила в редакцию 1 октября 2019 г.,
после переработки 27 ноября 2019 г.
Принята к публикации 28 ноября 2019 г.

Исследуется колебательный режим магнитной конвекции (задача Рэлея–Бенара) в неоднородно вращающейся электропроводящей жидкости во внешнем периодическом магнитном поле. В линейной теории колебательной конвекции получено критическое значение числа Рэлея Ra_c в зависимости от профиля неоднородного вращения (числа Россби Ro). Показано, что кеплеровский профиль вращения с числом Россби $Ro = -3/4$ оказывает дестабилизирующий эффект. С помощью метода теории возмущений по малому параметру надкритичности числа Рэлея получено нелинейное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау. Численные решения этого уравнения позволили определить теплоперенос (по числу Нуссельта Nu) в слое жидкости для разных значений амплитуд δ и частот модуляции ω_B . С помощью метода Галеркина получена нелинейная динамическая система неавтономных уравнений типа Лоренца. Численный анализ этих уравнений показал возможность управления хаотическим поведением конвективных течений в неоднородно вращающейся ($Ro = -3/4$) жидкости при помощи изменения параметров модуляции внешнего магнитного поля.

DOI: 10.31857/S0044451020050132

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время свободная конвекция в слоях жидкости (конвекция Рэлея–Бенара) [1–3] интенсивно исследуется при решении ряда инженерно-технических, астро- и геофизических задач. Особый интерес вызывают задачи, связанные с влиянием вращения и магнитного поля на конвекцию Рэлея–Бенара, например, из-за их приложений к теории вихревого и магнитного динамо [4–6]. Линейная теория конвективной неустойчивости достаточно хорошо изложена в монографиях [1–3, 7] и частично в обзорах [8–11]. Линейная теория вращающейся магнитной конвекции для произвольного от-

клонения осей вращения и магнитного поля от вертикальной оси (поля тяжести) развита в работе [12].

Очевидно, что линейная теория дает информацию о начале конвекции и не дает информации о конечной амплитуде конвекции. Эта амплитуда возникает, когда происходит взаимодействие между несколькими модами возмущений. Поэтому важно понять физический механизм нелинейных эффектов и количественно оценить тепло- и массоперенос в терминах конечных амплитуд. В настоящее время для построения нелинейной теории конвекции широко используется метод возмущений, разработанный в работе [13]. В ней показано, что первоначальный перенос тепла конвекцией линейно зависит от числа Рэлея, а затем, при больших числах Рэлея, перенос тепла немного отличается от линейного случая. Авторы работы [13] называли этот процесс слабонелинейным.

* E-mail: Anatoly.Tour@irap.omp.eu

** E-mail: yanovsky@isc.kharkov.ua

Дальнейшее развитие слабонелинейная теория конвекции получила в работах [14–17]. В них слабонелинейный режим конвекции описывался автономным уравнением Гинзбурга–Ландау для конечной амплитуды. Следующий этап развития слабонелинейной теории конвекции включал в себя учет модуляции параметров, управляющих процессом конвекции, что очень важно для решения многих технологических проблем. Различные типы модуляции внешних полей, такие как вращение [18–21], гравитация [22–24], температура [25–27], магнитное поле [28, 29], исследовались для стационарной слабонелинейной конвекции в различных средах: в пористых средах, наножидкостях и т. д. В работах [18–29] выяснено влияние модуляции параметров (вращения, гравитации, температуры, магнитного поля) на тепло-массоперенос в конвективных средах.

В отличие от работ [18–29], существует большое количество работ (см., например, [30–36]), посвященных исследованию параметрического возбуждения конвекции в различных конвективных средах под действием внешних периодических полей произвольной амплитуды и частоты. Поиск границ линейной конвективной неустойчивости и анализ отклика системы в этих работах проводились с помощью теории Флоке. Согласно этой теории, в параметрически возбуждаемых конвективных средах могут нарастать возмущения синхронного, субгармонического или квазипериодического отклика. Нелинейные волновые режимы конвекции в горизонтальном слое несжимаемой бинарной смеси с аномальной термодиффузией под воздействием модулированного поля тяжести изучались в работах [33, 34, 36], а под действием вибраций теплового поля — в [35]. В этих работах были установлены нелинейные режимы, соответствующие стоячим волнам (режим субгармонического отклика), модулированным бегущим волнам (режим квазипериодического отклика), режиму модулированной конвекции (режим синхронного отклика). Вибрации поля тяжести, модуляции температуры, переменные электрические и магнитные поля могут эффективно использоваться для управления тепло-массопереносом в различных технологических процессах.

Кроме технологических задач учет модуляции, например магнитного поля, играет важную роль в моделировании конвективных процессов, происходящих на Солнце. Известно, что солнечные пятна являются областями выхода в фотосферу сильных магнитных полей, и потемнение фотосферы в пятнах обусловлено подавлением магнитным полем конвективных движений вещества. Это, в свою оче-

редь, вызывает уменьшение переноса тепловой энергии в этих областях [37]. Поскольку вращение солнечной плазмы в однородном (крупномасштабном) магнитном поле приводит к возбуждению различных спектров волн [38], они могут модулировать однородное магнитное поле. Как было показано в работах [28, 39], модуляция магнитного поля может приводить как к увеличению, так и к уменьшению теплопереноса в конвективной среде. Таким образом, время жизни и появление солнечных пятен может быть связано с влиянием осциллирующего магнитного поля на конвекцию. В работах [28, 39] исследовались стационарный и колебательный режимы нелинейной магнитоконвекции под влиянием магнитного поля, зависящего от времени. Магнитное поле в работах [28, 39] было представлено в виде суммы постоянной (стационарной) и осциллирующей частей. Причем осциллирующая часть имеет второй порядок малости по параметру разложения (параметру надкритичности числа Рэлея). В работах [28, 39] также был проведен анализ конвективной неустойчивости для стационарного и колебательно-го режимов численным методом решения неавтономного уравнения Гинзбурга–Ландау.

Однако в этих работах [28, 39] не учитывалось вращательное движение среды. Кроме того, влияние неоднородного (или дифференциального) вращения на конвективные процессы еще мало изучено. Интерес к этим исследованиям вызван прежде всего различными астрофизическими проблемами. Известно, что большинство различных космических объектов, состоящих из плотных газов или жидкости (Юпитер, Сатурн, Солнце и т. д.), вращается неоднородно, т. е. разные части объекта вращаются вокруг общей оси вращения с различной угловой скоростью. Дифференциальное вращение наблюдается также в галактиках, аккреционных дисках и кольцах планет. Крупномасштабные вихревые структуры, такие как тайфуны, циклоны и антициклоны, также вращаются неоднородно. Устойчивость неоднородного вращения идеально проводящей среды в магнитном поле была впервые рассмотрена в работах [40, 41]. Там же показано, что слабое осевое магнитное поле дестабилизирует азимутальное дифференциальное вращение плазмы, и при выполнении условия $d\Omega^2/dR < 0$ в бездиссипативной плазме возникает магнитовращательная неустойчивость (МВН) или стандартная МВН. Поскольку это условие выполняется и для кеплеровских течений $\Omega \sim R^{-3/2}$, МВН является наиболее вероятным источником турбулентности в аккреционных дисках. Открытие МВН послужило толчком к многочислен-

ным теоретическим исследованиям.

Первые теоретические исследования, которые касались проблемы аккреционных течений, проводились в приближении бездиссипативной плазмы с учетом радиальной тепловой стратификации [42], а также замагниченности тепловых потоков [43]. В работе [44] рассматривалась устойчивость дифференциально-вращающейся плазмы в аксиальном магнитном поле с одновременным учетом как диссипативных эффектов (вязкость и омическая диссипация), так и тепловой радиальной стратификации плазмы. МВН в спиральном магнитном поле или с нетривиальной топологией $\mathbf{B}_0 \text{rot} \mathbf{B}_0 \neq 0$ изучалась в работах [45, 46]. При исследовании МВН дифференциальное вращение среды моделируется течением Куэтта, заключенным между двумя вращающимися с разными угловыми скоростями цилиндрами, что оказывается удобным для реализации лабораторных экспериментов [47].

В работах [48, 49] была совместно рассмотрена задача об устойчивости электропроводящей жидкости между двумя вращающимися цилиндрами (течение Куэтта) и задача Рэлея – Бенара во внешнем постоянном магнитном поле. Там же было проведено исследование хаотического режима на основе уравнений нелинейной динамики шестимерного фазового пространства. Анализ этих уравнений показал существование сложной хаотической структуры — странного аттрактора. Кроме того, был найден режим конвекции, при котором возникает хаотическое изменение направления (инверсии) и амплитуды возмущенного магнитного поля с учетом неоднородного вращения среды. Ранее слабонелинейная стадия для вращающейся магнитоконвекции (при $\Omega = \text{const}$), в которой возникает хаотический режим, исследовалась во вращающихся слоях жидкости [50, 51], в проводящих средах с однородным магнитным полем [52–55], а также во вращающихся с магнитным полем проводящих средах [56]. Однако в этих работах не рассматривалась сама динамика магнитного поля, что соответствует безындукционному приближению. Такое приближение допустимо для некоторых технологических приложений: роста кристаллов, химических процессов затвердевания и центробежного литья металлов и т. д.

В отличие от работ [48, 49], здесь мы исследуем колебательную магнитную конвекцию для неоднородно вращающегося слоя электропроводящей среды (плазмы) во внешнем осциллирующем магнитном поле (рис. 1). Настоящая работа состоит из следующих разделов. В разд. 2 получены основные уравнения в приближении Буссинеска, которые опи-

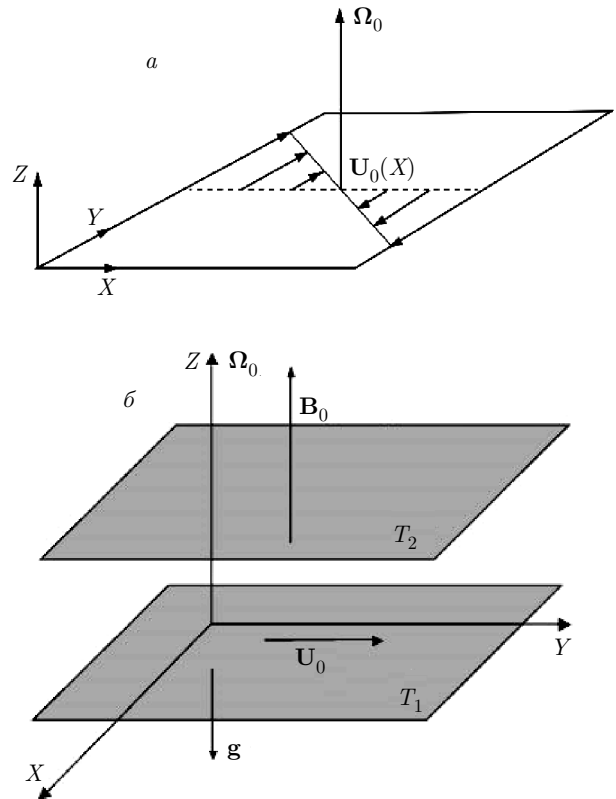


Рис. 1. а) Схема сдвигового течения во вращающихся потоках. В локальной декартовой системе координат этот поток аппроксимируется как линейный сдвиг со скоростью $U_0(x)$. б) Декартова аппроксимация задачи для неоднородно вращающейся магнитоконвекции. Неоднородное вращение в локальной декартовой системе координат состоит из вращения с постоянной угловой скоростью Ω_0 и сдвиговой скорости U_0 , направленной вдоль оси y

сывают неоднородно вращающуюся конвекцию во внешнем осциллирующем магнитном поле. В разд. 3 мы исследуем слабонелинейную стадию колебательной конвекции в неоднородно вращающемся слое электропроводящей жидкости в модулированном магнитном поле. Применяя метод теории возмущений по малому параметру надкритичности числа Рэлея, $\epsilon = \sqrt{(Ra - Ra_c)/Ra_c}$, мы получили нелинейное комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау с периодическими коэффициентами. Идентичное уравнение Гинзбурга – Ландау (см. Приложение В) получается из шестимерной модели уравнений Лоренца с периодическими коэффициентами, которое было получено при исследовании слабонелинейного режима конвекции с помощью галеркинской аппроксимации минимального порядка.

В разд. 4 приведены результаты численных решений неавтономного комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау, показывающих зависимость величины теплопереноса (числа Нуссельта Nu) от амплитуды δ , частоты ω_B модуляции и от профиля неоднородного вращения (числа Россби Ro). В разд. 5 проведен бифуркационный анализ полученного в разд. 3 комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау в двух случаях: когда нет внешней модуляции магнитного поля, $\delta = 0$, и когда она присутствует, $\delta \neq 0$. В разд. 6, применяя метод Галеркина к нелинейной системе уравнений для неоднородно вращающейся магнитоконвекции, мы получили динамическую систему уравнений Лоренца (6D) с периодическими коэффициентами. Численный анализ этой системы уравнений проведен в разд. 7.

Полученные в работе результаты могут найти применение в различных астрофизических задачах, рассматривающих магнитную конвекцию во вращающихся слоях Солнца, горячих галактических кластерах, аккреционных дисках и других объектах.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим неоднородно вращающийся поток электропроводящей жидкости, находящейся между двумя горизонтальными плоскостями, $z = 0$ и $z = h$. Жидкость нагревается снизу ($T_1 > T_2$) при постоянном градиенте температуры $A = (T_1 - T_2)/h = \Delta T/h = \text{const}$. Для описания нелинейных конвективных явлений в неоднородно вращающемся слое электропроводящей жидкости удобно перейти от цилиндрической системы координат (R, φ, z) к локальной декартовой (X, Y, Z) . Если рассмотреть фиксированную область слоя жидкости радиусом R_0 с угловой скоростью вращения $\Omega_0 = \Omega(R_0)$, то координаты $X = R - R_0$ соответствуют радиальному направлению, $Y = R_0(\varphi - \varphi_0)$ — азимутальному и $Z = z$ — вертикальному (рис. 1). В этом случае неоднородное вращение слоя жидкости локально можно представить в виде вращения с постоянной угловой скоростью Ω_0 и азимутальным сдвигом (a linear shear flow) [57], профиль скорости которого локально линеен:

$$\mathbf{U}_0 = -q\Omega_0 X \mathbf{e}_Y,$$

где $q \equiv -d \ln \Omega / d \ln R$ — безразмерный шировой параметр, определяемый из профиля угловой скорости вращения $\Omega(R) = \Omega_0(R/R_0)^{-q}$. Сдвиговый (шировый) параметр q связан с гидродинамическим числом Россби

$$Ro = \frac{R}{2\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial R}$$

соотношением $q = -2Ro$. Отметим, что для твердотельного вращения параметр Россби равен нулю $Ro = 0$, в случае кеплеровского вращения $Ro = -3/4$, для рэлеевского профиля угловой скорости $\Omega(R) \propto R^{-2}$ соответственно $Ro = -1$.

Полагаем, что направление внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0$ совпадает с осью вращения жидкости $\Omega_0 \parallel \mathbf{e}_Z$. Кроме того, внешнее магнитное поле $\mathbf{B}_0$ изменяется со временем по гармоническому закону:

$$\mathbf{B}_0 = B_{00}(1 + \delta \epsilon^2 \cos \tilde{\omega}_B t) \mathbf{e}_Z,$$

где ϵ — малый возмущающий параметр, δ — малая амплитуда магнитной модуляции, $B_{00} = \text{const}$, $\tilde{\omega}_B$ — частота модуляции магнитного поля, $\mathbf{e}_Z$ — единичный вектор, направленный вертикально вверх по оси Z . Конвективные течения, вызванные градиентом температуры, в вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости (плазме) с внешним магнитным полем описываются известными уравнениями магнитной гидродинамики в приближении Буссинеска [1, 2]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \left(P + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + g\beta T \mathbf{e}_Z + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} = \eta \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T = \chi \nabla^2 T, \quad (3)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

где β — коэффициент теплового расширения, $\rho_0 = \text{const}$ — плотность среды, ν — коэффициент кинематической вязкости, $\eta = c^2/4\pi\sigma$ — коэффициент магнитной вязкости, σ — коэффициент электропроводности, χ — коэффициент теплопроводности среды.

Представим все величины в уравнениях (1)–(4) в виде суммы основного и возмущенного состояний:

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}, \quad P = p_0 + p, \quad T = T_b + \theta.$$

Уравнения для основного состояния имеют вид

$$\frac{dp_0}{dZ} = \rho_0 g_0 \beta T_b, \quad (5)$$

$$-2q\Omega_0^2 X = \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dX}, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 T_b}{dZ^2} = 0. \quad (7)$$

Выражения (5), (6) показывают, что в радиальном направлении устанавливается центробежное равновесие, а в вертикальном – гидростатическое. Вычитая из (1)–(4) уравнения для основного состояния (5)–(7), находим уравнения эволюции возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - q\Omega_0 X \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial Y} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{U}_0 + 2\Omega_0 \times \mathbf{u} + \\ + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \tilde{p} + \frac{1}{4\pi\rho_0} ((\mathbf{B}_0 \nabla)\mathbf{b} + \\ + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{b}) + g\beta\theta \mathbf{e}_Z + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - q\Omega_0 X \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial Y} - (\mathbf{B}_0 \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{U}_0 + \\ + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{b} - (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{u} = \eta \nabla^2 \mathbf{b}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - q\Omega_0 x \frac{\partial \theta}{\partial y} + (\mathbf{u}\nabla)T_b + (\mathbf{u}\nabla)\theta = \chi \nabla^2 \theta, \\ \operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь давление $\tilde{p} = p + p_m$ включает в себя возмущенное магнитное давление $p_m = \mathbf{b}^2/8\pi + \mathbf{b}\mathbf{B}_0/4\pi$. Рассмотрим динамику осесимметричных возмущений, тогда все возмущенные величины в уравнениях (8) будут зависеть только от двух переменных (X, Z) :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u(X, Z), v(X, Z), w(X, Z)), \\ \mathbf{b} &= (\tilde{u}(X, Z), \tilde{v}(X, Z), \tilde{w}(X, Z)), \\ \tilde{p} &= \tilde{p}(X, Z), \quad \theta = \theta(X, Z). \end{aligned}$$

Уравнения соленидальности для осесимметричных возмущений скорости и магнитного поля примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial Z} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} = 0. \quad (9)$$

Остальные уравнения в координатном представлении принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) u + (\mathbf{u}\nabla)u = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial X} + 2\Omega_0 v + \\ + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{b}\nabla)\tilde{u} + \frac{B_{00}f_m}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) v + (\mathbf{u}\nabla)v = -2\Omega_0 u \left(1 - \frac{q}{2} \right) + \\ + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{b}\nabla)\tilde{v} + \frac{B_{00}f_m}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) w + (\mathbf{u}\nabla)w = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial Z} + g\beta\theta + \\ + \frac{1}{4\pi\rho_0} (\mathbf{b}\nabla)\tilde{w} + \frac{B_{00}f_m}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \tilde{u} - B_{00}f_m \frac{\partial u}{\partial Z} + (\mathbf{u}\nabla)\tilde{u} - (\mathbf{b}\nabla)u = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \tilde{v} - B_{00}f_m \frac{\partial v}{\partial Z} + q\Omega_0 \tilde{u} + \\ + (\mathbf{u}\nabla)\tilde{v} - (\mathbf{b}\nabla)v = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \right) \tilde{w} - B_{00}f_m \frac{\partial w}{\partial Z} + \\ + (\mathbf{u}\nabla)\tilde{w} - (\mathbf{b}\nabla)w = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi \nabla^2 \right) \theta - A w + (\mathbf{u}\nabla)\theta = 0, \quad (16)$$

где $f_m = 1 + \delta\epsilon^2 \cos \tilde{\omega}_B t$. В уравнениях (10)–(16) действие операторов набла определяется как

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) = a_X \frac{\partial}{\partial X} + a_Z \frac{\partial}{\partial Z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}.$$

Чтобы исключить давление $\tilde{p}$ в уравнениях (10) и (12), продифференцируем уравнение (10) по Z , а уравнение (12) по X , а затем, вычитая одно из другого, получим уравнение для Y -компоненты вихря $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{e}_Y \omega$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \omega + \frac{\partial}{\partial Z} \left(u \frac{\partial u}{\partial X} + w \frac{\partial u}{\partial Z} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial X} \left(u \frac{\partial w}{\partial X} + w \frac{\partial w}{\partial Z} \right) = \frac{B_{00}f_m}{4\pi\rho_0} \frac{\partial I}{\partial Z} + \frac{1}{4\pi\rho_0} \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial Z} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} + \tilde{w} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} \right) \right) + \\ + 2\Omega_0 \frac{\partial v}{\partial Z} - g\beta \frac{\partial \theta}{\partial X}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\omega = \partial u/\partial Z - \partial w/\partial X$ – Y -компонента вихря, $I = \partial \tilde{u}/\partial Z - \partial \tilde{w}/\partial X$ – Y -компонента тока $\mathbf{I} = \operatorname{rot} \mathbf{b} = I \mathbf{e}_Y$.

Согласно уравнениям (9), удобно ввести функцию тока ψ , через которую выражаются компоненты возмущенной скорости:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial Z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial X}.$$

Аналогично можем ввести функцию тока ϕ для возмущений магнитного поля:

$$\tilde{u} = -\frac{\partial \phi}{\partial Z}, \quad \tilde{w} = \frac{\partial \phi}{\partial X}.$$

В результате уравнения (17) и (11) приобретают более компактный вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \nabla^2 \psi + 2\Omega_0 \frac{\partial v}{\partial Z} - \frac{B_{00} f_m}{4\pi \rho_0} \frac{\partial}{\partial Z} \nabla^2 \phi - g\beta \frac{\partial \theta}{\partial X} = \frac{1}{4\pi \rho_0} J(\phi, \nabla^2 \phi) - J(\psi, \nabla^2 \psi), \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) v - 2\Omega_0(1 + \text{Ro}) \frac{\partial \psi}{\partial Z} - \frac{B_{00} f_m}{4\pi \rho_0} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial Z} = \frac{1}{4\pi \rho_0} J(\phi, \tilde{v}) - J(\psi, v). \quad (19)$$

Здесь для оператора якобиана или скобки Пуассона $J(a, b) \equiv \{a, b\}$ введено обозначение

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial X} \frac{\partial b}{\partial Z} - \frac{\partial a}{\partial Z} \frac{\partial b}{\partial X}.$$

Далее, дифференцируя уравнение (13) по Z , а уравнение (15) по X и вычитая одно из другого, находим уравнение для тока I :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right) I + \frac{\partial}{\partial Z} \left(u \frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} + w \frac{\partial \tilde{u}}{\partial Z} - \tilde{u} \frac{\partial u}{\partial X} - \tilde{w} \frac{\partial u}{\partial Z} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left(u \frac{\partial \tilde{w}}{\partial X} + w \frac{\partial \tilde{w}}{\partial Z} - \tilde{u} \frac{\partial w}{\partial X} - \tilde{w} \frac{\partial w}{\partial Z} \right) = B_{00} f_m \frac{\partial \omega}{\partial Z}. \quad (20)$$

Уравнения (20) и (14) также можно записать в компактном виде, используя определения функций тока ψ и ϕ :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right) \phi - B_{00} f_m \frac{\partial \psi}{\partial Z} = -J(\psi, \phi), \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2\right) \tilde{v} - B_{00} f_m \frac{\partial v}{\partial Z} + 2\Omega_0 \text{Ro} \frac{\partial \phi}{\partial Z} = J(\phi, v) - J(\psi, \tilde{v}). \quad (22)$$

Подобным образом упрощается вид уравнения (16) для температурных возмущений:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \chi \nabla^2\right) \theta - A \frac{\partial \psi}{\partial X} = -J(\psi, \theta). \quad (23)$$

Уравнения (18), (19), (21)–(23) совместно с граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi|_{Z=0,h} &= \nabla^2 \psi|_{Z=0,h} = \\ &= \frac{dv}{dZ} \Big|_{Z=0,h} = \tilde{v}|_{Z=0,h} = 0, \\ \frac{d\phi}{dZ} \Big|_{Z=0,h} &= \theta|_{Z=0,h} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

описывают неоднородно вращающуюся конвекцию во внешнем осциллирующем магнитном поле. Для ее исследования удобно привести эти уравнения к безразмерному виду, вводя безразмерные величины, которые отметим «звездочкой»:

$$(X, Z) = h(x^*, z^*), \quad t = \frac{h^2}{\nu} t^*, \quad \psi = \chi \psi^*,$$

$$\phi = h B_{00} \phi^*, \quad v = \frac{\chi}{h} v^*, \quad \tilde{v} = B_{00} \tilde{v}^*, \quad \theta = A h \theta^*.$$

Опуская «звездочку», получим следующую систему безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \nabla^2 \psi + \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial v}{\partial z} - \\ - \text{Pr Pm}^{-1} Q f_m \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi - \text{Ra} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \\ = \text{Pr Pm}^{-1} Q \cdot J(\phi, \nabla^2 \phi) - \text{Pr}^{-1} \cdot J(\psi, \nabla^2 \psi), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) v - \sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro}) \frac{\partial \psi}{\partial z} - \\ - \text{Pr Pm}^{-1} Q f_m \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} = \text{Pr Pm}^{-1} Q \cdot J(\phi, \tilde{v}) - \\ - \text{Pr}^{-1} \cdot J(\psi, v), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2\right) \phi - \text{Pr}^{-1} f_m \frac{\partial \psi}{\partial z} = \\ = -\text{Pr}^{-1} J(\psi, \phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2\right) \tilde{v} - \text{Pr}^{-1} f_m \frac{\partial v}{\partial z} + \\ + \text{Ro} \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial \phi}{\partial z} = \text{Pr}^{-1} (J(\phi, v) - J(\psi, \tilde{v})), \end{aligned}$$

$$\left(\text{Pr} \frac{\partial}{\partial t} - \nabla^2\right) \theta - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -J(\psi, \theta).$$

Здесь безразмерные параметры: $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, $\text{Pm} = \nu/\eta$ — магнитное число Прандтля, числа $\text{Ta} = 4\Omega_0^2 h^4/\nu^2$ — Тейлора, $Q = B_{00}^2 h^2/4\pi \rho_0 \nu \eta$ — Чандрасекара, $\text{Ra} = g\beta A h^4/\nu \chi$ — Рэлея на масштабе h .

При $\text{Ra} = 0$ и $f_m = 1$ система уравнений (25) применялась для исследования нелинейного механизма насыщения МВН [58]. В случае, когда $\text{Ra} \neq 0$ и модуляция магнитного поля отсутствует, $\delta = 0$, система уравнений (25) применялась для исследования слабонелинейного и хаотического режимов конвекции в неоднородно вращающейся плазме в аксиальном магнитном поле [48, 49, 59].

3. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ КОНВЕКЦИИ С МОДУЛЯЦИЕЙ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В слабонелинейной теории конвективной неустойчивости взаимодействие малых амплитуд конвективных ячеек можно описать следующим образом. Пусть малая амплитуда конвективных ячеек имеет порядок $O(\epsilon^1)$, тогда взаимодействие ячеек друг с другом приводит ко второй гармонике и нелинейности порядка $O(\epsilon^2)$, а затем к нелинейности $O(\epsilon^3)$ и т.д. При этом нелинейные члены в уравнениях (25) рассматриваются как возмущенный отклик для задачи линейной конвекции. В этом случае параметр Рэлея Ra , контролирующий конвекцию, близок к критическому значению Ra_c . Будем считать, что амплитуда осциллирующего внешнего магнитного поля $\epsilon^2 \cdot \delta \mathbf{B}_{00}$ имеет второй порядок малости $O(\epsilon^2)$, тогда его влияние на нелинейное взаимодействие конвективных ячеек следует ожидать уже в третьем порядке $O(\epsilon^3)$. Так как влияние неустойчивых мод мало, наша задача состоит в том, чтобы получить уравнения, описывающие взаимодействия этих мод. Общая схема построения слабонелинейной теории состоит в следующем. Поскольку малым параметром нашей задачи является относительное отклонение числа Рэлея Ra от критического значения Ra_c ,

$$\epsilon^2 = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \ll 1,$$

все возмущенные величины $\mathbf{U}$ в уравнениях типа

$$\mathcal{L}\mathbf{U} = -N(\mathbf{U}|\mathbf{U}) \quad (N(\dots) \text{—нелинейные члены})$$

представляются в виде ряда теории возмущений

$$\mathbf{U} \rightarrow \epsilon \mathbf{U}^{(1)} + \epsilon^2 \mathbf{U}^{(2)} + \epsilon^3 \mathbf{U}^{(3)} + \dots$$

Уравнения для возмущений в разных порядках по ϵ принимают вид

$$\epsilon^1 : \mathcal{L}^{(0)} \mathbf{U}^{(1)} = 0,$$

$$\epsilon^2 : \mathcal{L}^{(0)} \mathbf{U}^{(2)} = -N(\mathbf{U}^{(1)}|\mathbf{U}^{(1)}),$$

$$\epsilon^3 : \mathcal{L}^{(0)} \mathbf{U}^{(3)} = -\mathcal{L}^{(2)} \mathbf{U}^{(0)} - N(\mathbf{U}^{(1)}|\mathbf{U}^{(2)}) - N(\mathbf{U}^{(2)}|\mathbf{U}^{(1)}).$$

Условие разрешимости этой цепочки нелинейных уравнений известно как альтернатива Фредгольма (Fredholm's alternative) [60]:

$$\langle \mathbf{U}^\dagger, \text{Р.Н.} \rangle = 0. \quad (26)$$

Здесь $\mathbf{U}^\dagger$ — нетривиальное решение линейной самосопряженной задачи $\mathcal{L}^\dagger \mathbf{U}^\dagger = 0$, где $\mathcal{L}^\dagger$ — самосопряженный (self-adjoint) оператор, который определяется из следующего соотношения:

$$\langle \mathbf{U}^\dagger, \mathcal{L}\mathbf{U} \rangle \equiv \langle \mathcal{L}^\dagger \mathbf{U}^\dagger, \mathbf{U} \rangle, \quad (27)$$

где $\langle \dots, \dots \rangle$ — внутреннее произведение (inner product), которое здесь имеет следующее определение:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_{z=0}^1 \int_{x=0}^{2\pi/k_c} \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} \, dx \, dz,$$

Р.Н. — правые части возмущенных уравнений с нелинейными членами. Применим эти общие принципы разрешения нелинейных уравнений к нашей задаче. Для простоты будем учитывать нелинейные члены в (25) только в уравнении теплового баланса. Как будет показано ниже (см. Приложение В), это приближение равносильно применению галеркинской аппроксимации минимального порядка.

Далее, представим все переменные в уравнениях (25) в виде асимптотического разложения:

$$\begin{aligned} Ra &= Ra_c + \epsilon^2 R_2 + \epsilon^4 R_4 + \dots, \\ \psi &= \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 \psi_2 + \epsilon^3 \psi_3 + \dots, \\ v &= \epsilon v_1 + \epsilon^2 v_2 + \epsilon^3 v_3 + \dots, \\ \phi &= \epsilon \phi_1 + \epsilon^2 \phi_2 + \epsilon^3 \phi_3 + \dots, \\ \tilde{v} &= \epsilon \tilde{v}_1 + \epsilon^2 \tilde{v}_2 + \epsilon^3 \tilde{v}_3 + \dots, \\ \theta &= \epsilon \theta_1 + \epsilon^2 \theta_2 + \epsilon^3 \theta_3 + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь Ra_c — критическое значение числа Рэлея для конвекции без модуляции. Для исследования периодических по времени конвективных явлений введем «быстрые» (t_0) и «медленные» (τ) временные масштабы. Тогда производную по времени в уравнениях (25) можно представить в виде [61]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (29)$$

Подставляя (28), (29) в систему (25), будем решать ее для разных порядков по ϵ . В самом низком порядке получим уравнение

$$\hat{L} M_1 = 0, \quad (30)$$

где

$$M_1 = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \theta_1 \\ \phi_1 \\ v_1 \\ \tilde{v}_1 \end{bmatrix},$$

$\hat{L}$ — матричный оператор, имеющий вид

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} - \nabla^2\right) \nabla^2 & -\text{Ra}_c \frac{\partial}{\partial x} & -\tilde{Q} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 & \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ -\text{Pr}^{-1} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial t_0} - \text{Pr}^{-1} \nabla^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Pr}^{-1} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial t_0} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro}) \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t_0} - \nabla^2 & -\tilde{Q} \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \text{Ro} \sqrt{\text{Ta}} \frac{\partial}{\partial z} & -\text{Pr}^{-1} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t_0} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2 \end{bmatrix},$$

где введено обозначение $\tilde{Q} = \text{Pr Pm}^{-1} Q$. Общие решения уравнений (30), с учетом граничных условий (24), выражаются через неизвестные функции от медленного времени:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (A(\tau)e^{i\omega t_0} + A^*(\tau)e^{-i\omega t_0}) \sin kx \sin \pi z, \\ v_1 &= (V(\tau)e^{i\omega t_0} + V^*(\tau)e^{-i\omega t_0}) \sin kx \cos \pi z, \\ \phi_1 &= (\Phi(\tau)e^{i\omega t_0} + \Phi^*(\tau)e^{-i\omega t_0}) \sin kx \cos \pi z, \\ \tilde{v}_1 &= (\tilde{V}(\tau)e^{i\omega t_0} + \tilde{V}^*(\tau)e^{-i\omega t_0}) \sin kx \sin \pi z, \\ \theta_1 &= (\Theta(\tau)e^{i\omega t_0} + \Theta^*(\tau)e^{-i\omega t_0}) \cos kx \sin \pi z, \end{aligned} \quad (31)$$

где A^* , V^* , Φ^* , $\tilde{V}^*$, Θ^* — комплексно-сопряженные амплитуды колебаний. Подставляя решения (31) в уравнения (30), получим следующие соотношения между амплитудами колебаний:

$$\begin{aligned} \Theta(\tau) &= \frac{kA(\tau)}{\Gamma_\chi}, \quad \Phi(\tau) = \frac{\pi \text{Pm} A(\tau)}{\text{Pr} \Gamma_\eta}, \\ V(\tau) &= \frac{\pi \sqrt{\text{Ta}} ((1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^2 + \pi^2 \text{Ro Pm} Q)}{\Gamma_\eta \Gamma_A^2} A(\tau), \\ \tilde{V}(\tau) &= -\frac{\pi^2 \sqrt{\text{Ta}} \left(1 + \text{Ro} \left(1 - \frac{\text{Pm}(i\omega + a^2)}{\Gamma_\eta}\right)\right) \text{Pm}}{\text{Pr} \Gamma_A^2} A(\tau), \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Gamma_A^2 &= (i\omega + a^2) \Gamma_\eta + \pi^2 Q, \quad \Gamma_\chi = i\omega \text{Pr} + a^2, \\ \Gamma_\eta &= i\omega \text{Pm} + a^2, \quad a^2 = \pi^2 + k^2. \end{aligned}$$

Амплитуда $A(\tau)$ остается пока неизвестной. Из первого уравнения системы (25) нетрудно найти выражение для критического числа Рэлея Ra_c , которое совпадает с дисперсионным уравнением для линейной конвективной неустойчивости из работы [48]:

$$\begin{aligned} \text{Ra}_c &= \\ &= \frac{\Gamma_\chi (a^2 \Gamma_A^4 + \pi^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^2 + \pi^4 Q \text{Ta Ro Pm})}{k^2 \Gamma_\eta \Gamma_A^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Предельный случай $\omega = 0$ в выражении (32) соответствует критическому значению числа Рэлея для стационарной конвекции [48]:

$$\begin{aligned} \text{Ra}_{st} &= \frac{(\pi^2 + k^2)^3}{k^2} + \frac{\pi^2 (\pi^2 + k^2) Q}{k^2} + \\ &+ \frac{\pi^2 (\pi^2 + k^2)^2 \text{Ta}}{k^2 ((\pi^2 + k^2)^2 \pi^2 Q)} + \\ &+ \frac{\pi^2 \text{Ta Ro} ((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q \text{Pm})}{k^2 ((\pi^2 + k^2)^2 + \pi^2 Q)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь минимальное значение критического числа Рэлея находится из условия $\partial \text{Ra}_{st} / \partial k = 0$ и соответствует волновым числам $k = k_c$, удовлетворяющим следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{2k_c^2 - \pi^2}{k_c} - \frac{\pi^4 Q}{k_c a_c^4} + \frac{2\pi^2 k_c \text{Ta} (1 + \text{Ro})}{a_c^2 (a_c^4 + \pi^2 Q)} - \\ - \frac{\pi^2 \text{Ta} (a_c^4 + \pi^2 Q + 2k_c^2 a_c^2)}{k_c (a_c^4 + \pi^2 Q)^2} - \\ - \frac{\pi^2 \text{Ta Ro} (a_c^4 + \pi^2 Q \text{Pm}) (a_c^4 + \pi^2 Q + 2k_c^2 a_c^2)}{k_c a_c^4 (a_c^4 + \pi^2 Q)^2} = 0, \\ a_c^2 = \pi^2 + k_c^2. \end{aligned}$$

Для колебательного режима конвекции критическое число Рэлея имеет вид [48]

$$\begin{aligned} \text{Ra}_{osc} &= \\ &= \frac{a^2}{k^2 \xi} [\zeta (a^4 + \omega^2 \text{Pm Pr}) - \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm}) (\text{Pr} - \text{Pm})] + \\ &+ \pi^2 \text{Ta} (1 + \text{Ro}) \times \\ &\times \frac{(a^4 - \omega^2 \text{Pm Pr}) \zeta + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm}) (\text{Pm} + \text{Pr})}{k^2 (\zeta^2 + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})^2)} + \\ &+ \pi^4 Q \text{Ta Ro Pm} \times \\ &\times \frac{(a^4 + \omega^2 \text{Pm Pr}) \zeta + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm}) (\text{Pr} - \text{Pm})}{k^2 \xi (\zeta^2 + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})^2)}, \end{aligned} \quad (34)$$

где введены обозначения

$$\xi = a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2, \quad \zeta = a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 \text{Pm}.$$

Частота нейтральных колебаний удовлетворяет следующему уравнению:

$$K_0\omega^6 + K_1\omega^4 + K_2\omega^2 + K_3 = 0,$$

где

$$K_0 = \text{Pm}^2(1 + \text{Pr})\text{Pm}^2,$$

$$K_1 = (a^4(1 + \text{Pm}) + (\text{Pr} - \text{Pm})(a^4 + \pi^2 Q))\text{Pm}^2 + \\ + \text{Pm}^2(1 + \text{Pr})(a^4(1 + \text{Pm})^2 - 2\text{Pm}(a^4 + \pi^2 Q)) + \\ + \frac{\pi^2}{a^2}\text{Ta}(1 + \text{Ro})\text{Pm}^3(\text{Pr} - 1),$$

$$K_2 = (a^4(1 + \text{Pm}) + (\text{Pr} - \text{Pm})(a^4 + \pi^2 Q))(a^4(1 + \text{Pm})^2 - \\ - 2\text{Pm}(a^4 + \pi^2 Q)) + \text{Pm}^2(1 + \text{Pr})(a^4 + \pi^2 Q)^2 + \\ + \frac{\pi^2}{a^2}\text{Ta}(1 + \text{Ro}) \times \\ \times (a^4\text{Pm}^2(\text{Pr} - 1) + (a^4 + \pi^2 Q)(\text{Pr} + \text{Pm})\text{Pm} - \\ - a^4(1 + \text{Pm})\text{Pm}) - \frac{\pi^4}{a^2}Q\text{TaRoPm} \times \\ \times (2\text{PmPr} + \text{Pm}^2(\text{Pr} - 1)),$$

$$K_3 = (a^4(1 + \text{Pm}) + (\text{Pr} - \text{Pm})(a^4 + \pi^2 Q)) \times \\ \times (a^4 + \pi^2 Q)^2 + \frac{\pi^2}{a^2}\text{Ta}(1 + \text{Ro})a^4 \times \\ \times ((\text{Pr} + \text{Pm})(a^4 + \pi^2 Q) - a^4(1 + \text{Pm})) + \\ + \frac{\pi^4}{a^2}Q\text{TaRoPm} \times \\ \times ((\text{Pr} - \text{Pm})(a^4 + \pi^2 Q) - a^4(1 + \text{Pm})).$$

На рис. 2 показаны зависимости критического числа Рэлея Ra_{osc} и частоты ω колебательного режима конвекции от волновых чисел k для однородного $\text{Ro} = 0$ и кеплеровского $\text{Ro} = -3/4$ профилей вращения. Из графиков рис. 2 видно, что при отрицательных числах Россби $\text{Ro} = -3/4$ пороговое число Рэлея Ra_{osc}^{min} и частота $\omega(0)$ уменьшаются.

Для второго порядка по ϵ имеем следующее уравнение:

$$\hat{L}M_2 = N_2, \quad (35)$$

где

$$M_2 = \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \theta_2 \\ \phi_2 \\ v_2 \\ \tilde{v}_2 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} N_{21} \\ N_{22} \\ N_{23} \\ N_{24} \\ N_{25} \end{bmatrix}, \\ N_{21} = N_{23} = N_{24} = N_{25} = 0,$$

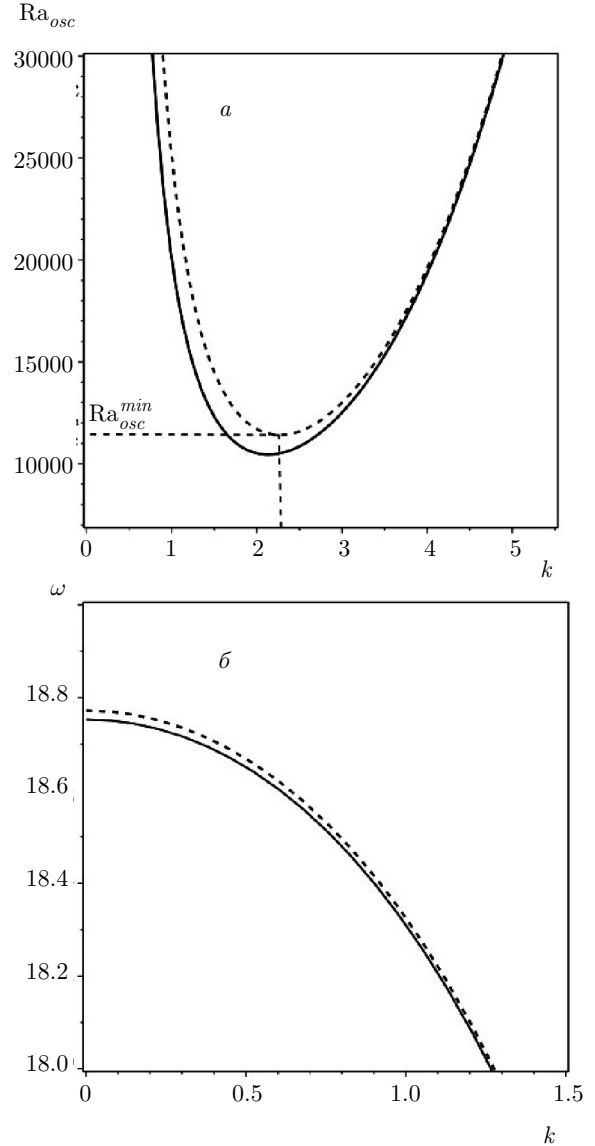


Рис. 2. а) Зависимости критического числа Рэлея Ra_{osc} от волнового числа k для однородного $\text{Ro} = 0$ (штриховая линия) и кеплеровского $\text{Ro} = -3/4$ (сплошная линия) профилей вращения. б) Зависимости частоты ω от волнового числа k для однородного $\text{Ro} = 0$ (штриховая линия) и кеплеровского $\text{Ro} = -3/4$ (сплошная линия) профилей вращения. Графики построены для постоянных значений параметров $Q = 50$, $\text{Ta} = 100$, $\text{Pm} = 1$, $\text{Pr} = 9$

$$N_{22} = -\text{Pr}^{-1} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right].$$

Используя решения (31) и граничные условия (24), найдем решения уравнений (35):

$$\psi_2 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \tilde{v}_2 = 0, \quad \phi_2 = 0, \\ \theta_2 = [\theta_{20} + \theta_{22}e^{2i\omega t_0} + \theta_{22}^*e^{-2i\omega t_0}] \sin 2\pi z, \quad (36)$$

где введены обозначения

$$\theta_{20} = -\frac{k^2 a^2 |A(\tau)|^2}{4\pi(\omega^2 \text{Pr}^2 + a^4)},$$

$$\theta_{22} = -\frac{\pi k^2 A^2(\tau)}{4(i\omega \text{Pr} + 2\pi^2)(i\omega \text{Pr} + a^2)}.$$

Решения второго порядка для возмущений температуры θ_2 включают в себя слагаемые, зависящие только от медленного времени τ , и слагаемые, пропорциональные частоте 2ω . Для анализа интенсивности теплопереноса вводится усредненный по горизонтали теплопоток на границе слоя электропроводящей жидкости (число Нуссельта):

$$\text{Nu} = 1 + \frac{\left[\frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_c} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) dx \right]_{z=0}}{\left[\frac{k_c}{2\pi} \int_0^{2\pi/k_c} \left(\frac{\partial T_0}{\partial z} \right) dx \right]_{z=0}}.$$

Подставляя в это выражение значение θ_2 и усредняя по быстрому времени t_0 , находим

$$\text{Nu}(\tau) = 1 + \frac{k^2 a^2 |A(\tau)|^2}{2(a^4 + \omega^2 \text{Pr}^2)}. \quad (37)$$

Из формулы (37) видно, что число Нуссельта зависит от амплитуды $A(\tau)$, которая будет определена ниже.

Для третьего порядка по ϵ находим

$$\hat{L}M_3 = N_3, \quad (38)$$

где

$$M_3 = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \theta_3 \\ \phi_3 \\ v_3 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix}, \quad N_3 = \begin{bmatrix} N_{31} \\ N_{32} \\ N_{33} \\ N_{34} \\ N_{35} \end{bmatrix},$$

$$N_{31} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \nabla^2 \psi_1 + \text{Ra}_2 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \delta \cos(\omega_B \tau) \tilde{Q} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \phi_1 =$$

$$= \left[a^2 \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - \frac{k^2 \text{Ra}_2 A(\tau)}{\Gamma_\chi} + \delta \cos(\omega_B \tau) \frac{\pi^2 a^2 Q A(\tau)}{\Gamma_\eta} \right] \times$$

$$\times e^{i\omega t_0} \sin kx \sin \pi z + \text{c.c.},$$

$$N_{32} = -\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} -$$

$$- \text{Pr}^{-1} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \theta_2}{\partial z} - \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \right] =$$

$$= -e^{i\omega t_0} \left[\frac{k}{\Gamma_\chi} \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} \cos kx \sin \pi z + \right.$$

$$+ \frac{k^3 (3a^2 \pi^2 + i\omega k^2 \text{Pr}) |A(\tau)|^2 A(\tau)}{2 \text{Pr} (i\omega \text{Pr} + 2\pi^2) (i\omega \text{Pr} + a^2)} \cos kx \sin \pi z \cos 2\pi z \left. \right] +$$

$$+ \frac{\pi^2 k^3 A^3(\tau)}{2 \text{Pr} (i\omega \text{Pr} + 2\pi^2) (i\omega \text{Pr} + a^2)} \times$$

$$\times e^{3i\omega t_0} \cos kx \sin \pi z \cos 2\pi z + \text{c.c.},$$

$$N_{33} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} + \delta \cos(\omega_B \tau) \text{Pr}^{-1} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} =$$

$$= \left[-\frac{\pi \text{Pm}}{\text{Pr} \Gamma_\eta} \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} + \delta \cos(\omega_B \tau) \frac{\pi A(\tau)}{\text{Pr}} \right] \times$$

$$\times e^{i\omega t_0} \sin kx \cos \pi z + \text{c.c.},$$

$$N_{34} = -\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + \delta \cos(\omega_B \tau) \tilde{Q} \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial z} =$$

$$= \left[-\frac{\pi \sqrt{\text{Ta}} ((1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^2 + \pi^2 \text{RoPmQ})}{\Gamma_\eta \Gamma_A^2} \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - \right.$$

$$- \delta \cos(\omega_B \tau) \frac{\pi^3 Q \sqrt{\text{Ta}} A(\tau)}{\Gamma_A^2} \times$$

$$\times \left(1 + \text{Ro} \left(1 - \frac{\text{Pm}(i\omega + a^2)}{\Gamma_\eta} \right) \right) \left. \right] \times$$

$$\times e^{i\omega t_0} \sin kx \cos \pi z + \text{c.c.},$$

$$N_{35} = -\frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial \tau} + \delta \cos(\omega_B \tau) \text{Pr}^{-1} \frac{\partial v_1}{\partial z} =$$

$$= \left[\frac{\pi^2 \sqrt{\text{Ta}} \left(1 + \text{Ro} \left(1 - \frac{\text{Pm}(i\omega + a^2)}{\Gamma_\eta} \right) \right) \text{Pm}}{\text{Pr} \Gamma_A^2} \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - \right.$$

$$- \delta \cos(\omega_B \tau) \frac{\pi^2 \sqrt{\text{Ta}} ((1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^2 + \pi^2 \text{RoPmQ})}{\text{Pr} \Gamma_\eta \Gamma_A^2} A(\tau) \left. \right] \times$$

$$\times e^{i\omega t_0} \sin kx \sin \pi z + \text{c.c.},$$

здесь $\omega_B = \tilde{\omega}_B / \epsilon^2$. Условие разрешимости (альтернатива Фредгольма) для уравнений третьего порядка $O(\epsilon^3)$ находится из формулы (26):

$$\int_{z=0}^1 \int_{x=0}^{2\pi/k_c} \left[\hat{P} \psi_1^\dagger \cdot \mathcal{R}_{31} + \text{Ra}_c \hat{P} \theta_1^\dagger \cdot \mathcal{R}_{32} + \right.$$

$$+ Q \text{Pr}^2 \text{Pm}^{-1} \hat{P} \nabla^2 \phi_1^\dagger \cdot \mathcal{R}_{33} + v_1^\dagger \cdot \mathcal{R}_{34} \left. \right] dx dz = 0, \quad (39)$$

где введены обозначения

$$\hat{P} = (1 + \text{Ro}) \left(\text{Pm} \frac{\partial}{\partial t_0} - \nabla^2 \right) - \text{RoPmQ} \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\mathcal{R}_{31} = N_{31}, \quad \mathcal{R}_{32} = N_{32}, \quad \mathcal{R}_{33} = N_{33},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{34} = & - \left(\text{Pm} \frac{\partial}{\partial t_0} - \nabla^2 \right) \times \\ & \times \left(\left(\text{Pm} \frac{\partial}{\partial t_0} - \nabla^2 \right) N_{34} + \text{QPr} \frac{\partial N_{35}}{\partial z} \right) + \\ & + \sqrt{\text{Ta}} \text{Ro Pm PrQ} \frac{\partial^2 N_{33}}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Выражения для $\psi_1^\dagger$, $\theta_1^\dagger$, $\phi_1^\dagger$, $v_1^\dagger$ определяются из решения линейной самосопряженной задачи $\hat{L}^\dagger M_1^\dagger = 0$:

$$\psi_1^\dagger = (A(\tau)e^{i\omega t_0} + \text{c.c.}) \sin kx \sin \pi z,$$

$$\theta_1^\dagger = \left(-\frac{kA(\tau)}{\Gamma_\chi} e^{i\omega t_0} + \text{c.c.} \right) \cos kx \sin \pi z,$$

$$\phi_1^\dagger = \left(-\frac{A(\tau)\pi \text{Pm}}{\Gamma_\eta \text{Pr}} e^{i\omega t_0} + \text{c.c.} \right) \sin kx \cos \pi z,$$

$$\begin{aligned} v_1^\dagger = & \left(-\frac{A(\tau)\pi\sqrt{\text{Ta}}}{\Gamma_\eta \Gamma_A^2} ((1 + \text{Ro})\Gamma_\eta^2 + \pi^2 \text{QPmRo}) \times \right. \\ & \left. \times e^{i\omega t_0} + \text{c.c.} \right) \sin kx \cos \pi z. \end{aligned}$$

Матрица $M_1^\dagger$ имеет вид

$$M_1^\dagger = (\psi_1^\dagger, \theta_1^\dagger, \phi_1^\dagger, v_1^\dagger)^T,$$

а $\hat{L}^\dagger$ — самосопряженный (self-adjoint) матричный оператор,

$$\hat{L}^\dagger = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} \nabla^2 - \nabla^4 \right) \hat{P} & \text{Ra}_c \hat{P} \frac{\partial}{\partial x} & \tilde{Q} \hat{P} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 & -\sqrt{\text{Ta}} \hat{P} \frac{\partial}{\partial z} \\ \text{Ra}_c \hat{P} \frac{\partial}{\partial x} & -\text{Ra}_c \hat{P} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} - \nabla^2 \right) & 0 & 0 \\ \tilde{Q} \hat{P} \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 & 0 & \tilde{Q} \text{Pr} \hat{P} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} - \text{Pm}^{-1} \nabla^2 \right) \nabla^2 & 0 \\ -\sqrt{\text{Ta}} \hat{P} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & -\hat{Q} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

здесь

$$\begin{aligned} \hat{Q} = & \left(\left(\frac{\partial}{\partial t_0} - \nabla^2 \right) \left(\text{Pm} \frac{\partial}{\partial t_0} - \nabla^2 \right) - \text{Q} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \times \\ & \times \left(\text{Pm} \frac{\partial}{\partial t_0} - \nabla^2 \right). \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование в (39) и усредняя по быстрому времени t_0 , получим нелинейное уравнение для комплексной амплитуды $A(\tau)$:

$$\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - s^{-1} F(\tau) A(\tau) + s^{-1} \mathcal{R} |A(\tau)|^2 A(\tau) = 0, \quad (41)$$

где коэффициенты имеют следующий вид:

$$s = a^2 + \text{Ra}_c \frac{k^2 \text{Pr}}{\Gamma_\chi^2} - \text{QPm} \frac{\pi^2 a^2}{\Gamma_\eta \Gamma_A^2} - \frac{\pi \sqrt{\text{Ta}}}{\Gamma_\eta \Gamma_A^2} \Lambda_1,$$

$$\begin{aligned} F(\tau) = & \text{Ra}_2 \frac{k^2 \text{Pr}}{\Gamma_\chi} - 2\text{Q} \frac{\pi^2 a^2}{\Gamma_\eta} \delta \cos(\omega_B \tau) + \\ & + \frac{\pi \sqrt{\text{Ta}}}{\Gamma_\eta \Gamma_A^2} \Lambda_2 \delta \cos(\omega_B \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \text{Ra}_c \left(\frac{k^4 a^2}{4(\omega^2 \text{Pr}^2 + a^4) \Gamma_\chi} + \frac{\pi^2 k^4}{4(i\omega \text{Pr} + 2\pi^2) \Gamma_\chi^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\pi^2 k^4}{4(i\omega \text{Pr} + 2\pi^2)(\omega^2 \text{Pr}^2 + a^4)} \right) = \\ = & \text{Ra}_c \frac{k^4 (\pi^2 (1 + \Gamma_\chi^{*2}) \Gamma_\chi + a^2 (i\omega \text{Pr} + 2\pi^2))}{4(i\omega \text{Pr} + 2\pi^2) \Gamma_\chi^2 \Gamma_\chi^*}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\Lambda_1 = \frac{\pi \sqrt{\text{Ta}}}{\Gamma_A^2} \Xi_1 + \frac{\pi^3}{\Gamma_\eta} \sqrt{\text{Ta}} \text{RoQPm}^2,$$

$$\Xi_1 = (1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta^3 + \pi^2 \text{QPm} (\text{RoPm}(i\omega + a^2) - \Gamma_\eta),$$

$$\Lambda_2 = \pi^3 \sqrt{\text{Ta}} \text{Q} \left[\frac{\Gamma_\eta}{\Gamma_A^2} \Xi_2 - \text{RoPm} \right],$$

$$\Xi_2 = 2(1 + \text{Ro}) \Gamma_\eta + \text{RoPm} \left(\frac{\pi^2 \text{Q}}{\Gamma_\eta} - (i\omega + a^2) \right).$$

Выражение (41) соответствует комплексному уравнению Гинзбурга–Ландау с периодическим коэффициентом $F(\tau)$. В предельном случае, когда нет вращения ($Ta = 0$, $Ro = 0$), уравнение (41) совпадает с результатом работы [39]. Запишем коэффициенты в уравнении (41) в виде суммы действительной и мнимой частей:

$$s^{-1}F(\tau) = f_r^{(1)} - \delta \cos(\omega_B \tau) f_r^{(2)} + \\ + i(f_i^{(1)} + \delta \cos(\omega_B \tau) f_i^{(2)}), \quad s^{-1}\mathcal{R} = l_r + il_i.$$

В результате уравнение (41) примет следующий вид:

$$\frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - (f_r^{(1)} - \delta \cos(\omega_B \tau) f_r^{(2)}) A(\tau) - \\ - i(f_i^{(1)} + \delta \cos(\omega_B \tau) f_i^{(2)}) A(\tau) + (l_r + il_i) \times \\ \times |A(\tau)|^2 A(\tau) = 0. \quad (43)$$

Явный вид коэффициентов $f_r^{(1)}$, $f_r^{(2)}$, $f_i^{(1)}$, $f_i^{(2)}$, l_r , l_i имеет очень громоздкий вид, который приведен в Приложении А. Уравнение вида (41) (или (43)) было получено во многих работах, где исследовался слабонелинейный режим колебательной конвекции (см., например, [39, 62–66]). В отличие от этих работ, в нашем результате (41) учитывается неоднородное вращение ($Ro \neq 0$) электропроводящей жидкости. Далее приведем результаты численных исследований уравнения (41).

4. ТЕПЛОПЕРЕНОС ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ОСЦИЛЛЯЦИЙ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

При выполнении численных расчетов комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау с периодическими коэффициентами будем считать $Ra_2 \approx Ra_c$, так как нелинейность рассматривается вблизи критического состояния конвекции. Согласно разложению (28), число Рэлея в этой системе равно $Ra \approx Ra_c(1 + \epsilon^2)$. С помощью численного решения уравнения (41) и формулы (37) мы можем определить изменение величины теплопереноса (числа Нуссельта Nu) от времени τ . Параметры конвективной среды и начальную амплитуду выберем следующими: $Q/\pi^2 = Q_1 = 80$, $Ta/\pi^4 = T_1 = 10^5$, $Ra_c/\pi^4 = R_1 = 9500$, $Pm = 1$, $Pr = 10$, $A_0 = 0.5$. Результаты численного анализа уравнения (41) представлены на рис. 3–5.

На рис. 3 показана зависимость числа Нуссельта Nu от времени τ для положительного ($Ro = 2$) и отрицательного ($Ro = -3/4$) профилей вращения

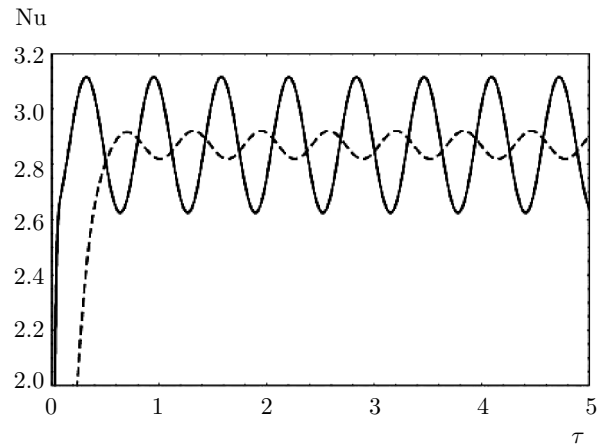


Рис. 3. Зависимости числа Нуссельта Nu от времени τ для чисел Россби $Ro = 2$ (сплошная линия) и $Ro = -3/4$ (штриховая линия) во внешнем осциллирующем с частотой $\omega_B = 10$ и амплитудой $\delta = 0.3$ магнитном поле

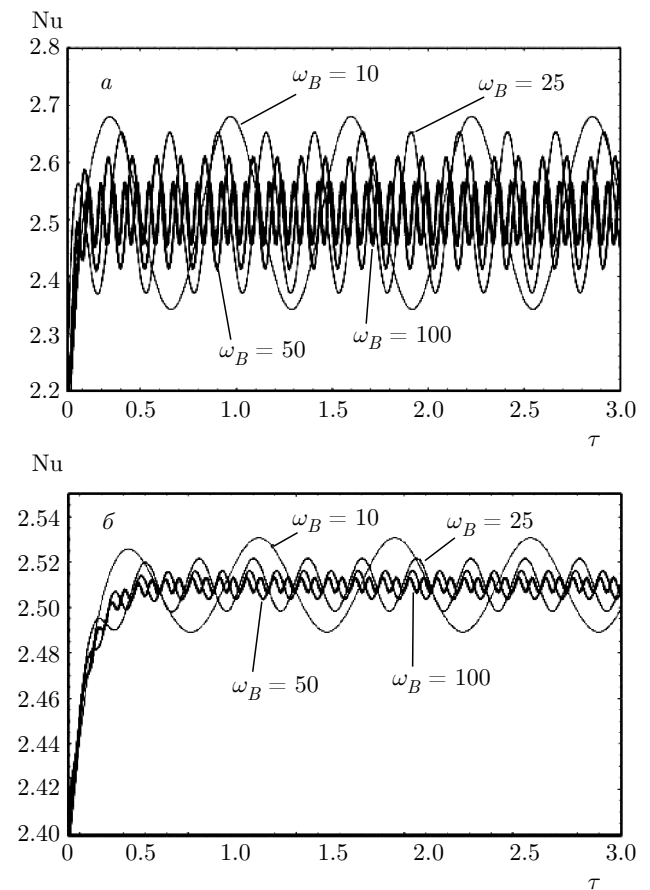


Рис. 4. Эффект влияния частоты модуляции ω_B на теплоперенос (Nu) в неоднородно вращающейся плазме с числами Россби $Ro = 2$ (а) и $Ro = -3/4$ (б)

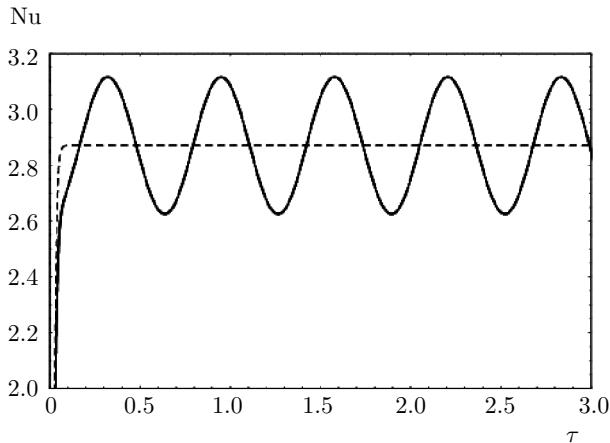


Рис. 5. Вариации числа Нуссельта (Nu) в отсутствие ($\delta = 0$, штриховая линия) и при наличии ($\delta = 0.3$, $\omega_B = 10$, сплошная линия) модуляции магнитного поля

электропроводящей среды (плазмы) во внешнем осциллирующем магнитном поле с частотой $\omega_B = 10$ и амплитудой $\delta = 0.3$. Видно, что при неоднородном вращении с положительным числом Россби ($Ro > 0$) теплоперенос в плазме увеличивается:

$$\Delta Nu|_{Ro=-3/4} < \Delta Nu|_{Ro=2}.$$

Также представляет интерес вопрос о влиянии частоты модуляции магнитного поля на величину теплопереноса. На рис. 4а приведены графики $Nu(\tau)$ для разных частот модуляции ($\omega_B = 10, 25, 50, 100$) в случае вращения плазмы с числом Россби $Ro = 2$. Здесь мы видим, что увеличение частоты модуляции ω_B приводит к подавлению теплопереноса, т. е. вариации числа Nu уменьшаются. Аналогичную картину мы наблюдаем и для случая кеплеровского профиля вращения ($Ro = -3/4$), рис. 4б:

$$\Delta Nu|_{\omega_B=10} > \Delta Nu|_{\omega_B=25} > \Delta Nu|_{\omega_B=50} > \Delta Nu|_{\omega_B=100}.$$

Сравнение величины теплопереноса в отсутствие ($\delta = 0$) и при наличии ($\delta = 0.3$, $\omega_B = 10$) модуляции магнитного поля можно провести на графике рис. 5. Здесь штриховой линией показан режим установления конечного значения $Nu(\tau)$ для случая $\delta = 0$. Очевидно, что превышение числа Nu над единицей обусловлено возникновением конвекции. В работе [59] был проведен анализ интенсивности теплопереноса для случая $\delta = 0$ при различных профилях вращения среды и было установлено, что интенсивность теплопереноса увеличивается в сторону положительных чисел Россби ($Ro > 0$). На рис. 5 видно,

что модуляция магнитного поля приводит к периодическому изменению теплопотока, т. е. величина числа Nu изменяется периодически во времени τ , причем $\Delta Nu|_{\delta=0.3} > \Delta Nu|_{\delta=0}$.

Проведенный выше численный анализ неавтономного комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау (41) показал, что с помощью регулирования параметров модуляции (амплитуды δ и частоты ω_B) внешнего магнитного поля можно управлять теплопереносом в магнитной конвекции в неоднородно вращающейся среде. Для исследования динамических свойств уравнения (41) (или (43)), описывающего эволюцию конечной амплитуды $A(\tau)$, необходимо провести качественный (бифуркационный) анализ этого уравнения.

5. БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

В этом разделе мы исследуем динамическое поведение комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау (43) в двух случаях: когда нет внешней модуляции магнитного поля ($\delta = 0$) и когда она присутствует ($\delta \neq 0$). Коэффициенты $f_r^{(1)}$, $f_r^{(2)}$, $f_i^{(1)}$, $f_i^{(2)}$, l_r , l_i , входящие в уравнение (43) имеют достаточно сложную зависимость от параметров задачи Rm , Q , Pr , Ta , Ra , k . Поэтому здесь мы рассмотрим модельную задачу, в которой значения параметров $f_r^{(1)}$, $f_r^{(2)}$, $f_i^{(1)}$, $f_i^{(2)}$, l_r , l_i изменяются независимо.

5.1. Анализ комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау при $\delta = 0$

Рассмотрим случай, когда модуляции внешнего магнитного поля нет ($\delta = 0$). Тогда комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау (43) будет иметь постоянные коэффициенты. Это уравнение описывает слабонелинейную стадию (с конечной амплитудой $A(\tau)$) нестационарной магнитной конвекции в неоднородно вращающейся электропроводящей жидкости. Представим комплексную амплитуду $A(\tau)$ в амплитудно-фазовом виде, т. е.

$$A(\tau) = |A(\tau)|e^{i\Phi(\tau)}. \quad (44)$$

Затем, подставляя выражение (44) в (43), при условии $\delta = 0$ получим уравнения для амплитуды $|A(\tau)|$:

$$\frac{d|A(\tau)|}{d\tau} = f_r^{(1)}|A(\tau)| - l_r|A(\tau)|^3, \quad (45)$$

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = f_i^{(1)} - l_i|A(\tau)|^2. \quad (46)$$

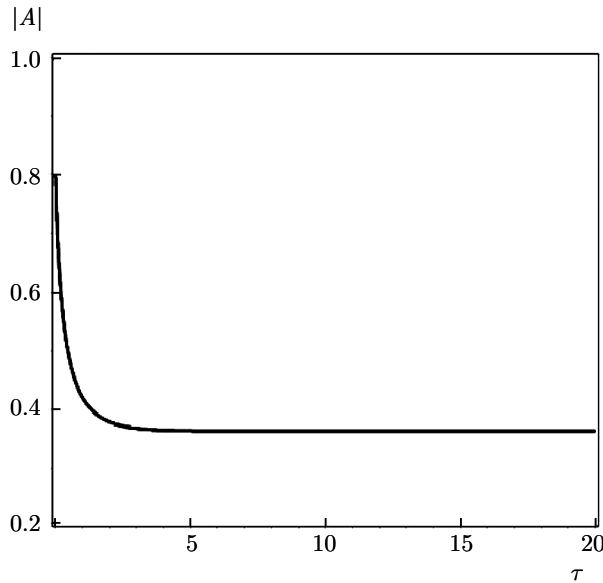


Рис. 6. Зависимость амплитуды $|A|$ от времени τ , построенная по формуле (47) для фиксированных параметров $A_0 = 0.8$, $f_r^{(1)} = 0.57$, $l_r = 0.075$. Видно установление постоянного уровня амплитуды с ростом τ

Очевидно, что стационарные решения уравнения (45) имеют вид

$$|A| = 0, \text{ для всех значений } f_r^{(1)}, l_r$$

и

$$|A| = \pm \sqrt{\frac{f_r^{(1)}}{l_r}} \quad \text{для } f_r^{(1)} > 0, l_r > 0.$$

Нестационарное решение уравнения (45) при начальном условии $|A(\tau)|_{\tau=0} = A_0$ соответственно равно

$$|A(\tau)|^2 = A_0^2 \left[\frac{l_r}{f_r^{(1)}} A_0^2 + \left(1 - A_0^2 \frac{l_r}{f_r^{(1)}} \right) \times \exp \left(-2f_r^{(1)} \tau \right) \right]^{-1}. \quad (47)$$

На рис. 6 показан график зависимости амплитуды $|A(\tau)|$ при фиксированных параметрах $A_0 = 0.8$, $f_r^{(1)} = 0.57$, $l_r = 0.075$. Видно, что с увеличением времени τ амплитуда становится постоянной.

Проведем более подробный качественный анализ устойчивости конвективных течений, описываемых уравнением (43) при $\delta = 0$. Для этого, представляя

амплитуду как $A(\tau) = X(\tau) + iY(\tau)$, запишем уравнение (43) в виде автономной системы нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dX(\tau)}{d\tau} &= f_r^{(1)} X(\tau) - f_i^{(1)} Y(\tau) - \\ &\quad - (l_r X(\tau) - l_i Y(\tau))(X^2(\tau) + Y^2(\tau)), \\ \frac{dY(\tau)}{d\tau} &= f_i^{(1)} X(\tau) + f_r^{(1)} Y(\tau) - \\ &\quad - (l_i X(\tau) + l_r Y(\tau))(X^2(\tau) + Y^2(\tau)). \end{aligned} \quad (48)$$

Качественный анализ положений равновесия системы (48) показал наличие единственной неподвижной точки в начале координат. В зависимости от знака действительной части собственных значений ($\lambda_{1,2}$) линеаризованной системы (48) эта точка классифицируется как устойчивый ($\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$) или неустойчивый ($\text{Re } \lambda_{1,2} > 0$) фокус. При отрицательных значениях ($\text{Re } \lambda_{1,2} < 0$) для параметров $f_r^{(1)} = -0.1$, $f_i^{(1)} = 3.96$, $l_r = 0.145$, $l_i = 0.145$ траектории решений (при любых начальных неотрицательных условиях) по спирали скручиваются к точке равновесия $O(0, 0)$. Это соответствует затухающим колебаниям компонент (X, Y) , и фазовый портрет в окрестности точки $O(0, 0)$ называется устойчивым фокусом [67, 68]. Изменяя параметры системы, например при $f_r^{(1)} = 0.57$, $f_i^{(1)} = 2.82$, $l_r = 0.075$, $l_i = 0.335$, стационарное состояние $O(0, 0)$ становится неустойчивым, поскольку появилась замкнутая траектория, на которую изнутри и снаружи накручиваются по спирали траектории решений. В этом случае точка покоя соответствует неустойчивому фокусу.

Для физической интерпретации фазовых траекторий в системе уравнений (48) удобно перейти к полярным координатам $X = r \cos \varphi$, $Y = r \sin \varphi$:

$$\frac{dr}{d\tau} = r \left(f_r^{(1)} - l_r r^2 \right), \quad (49)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = f_i^{(1)} - l_i r^2. \quad (50)$$

Частные нетривиальные решения системы (49), (50) имеют вид

$$r = \pm \sqrt{\frac{f_r^{(1)}}{l_r}}, \quad \varphi = f_i^{(1)} \tau - l_i \int r^2 d\tau + \varphi_0.$$

Этим решениям соответствуют траектории, имеющие форму окружности радиуса $\sqrt{f_r^{(1)}/l_r}$, которые вращаются с частотой $f_i^{(1)}$. Траектории, берущие начало в окрестности неустойчивого фокуса, имеют

начальное значение $r < \sqrt{f_r^{(1)}/l_r}$. При этом правая часть уравнения (49) положительна, и, следовательно, r будет возрастать. В этом случае траектории вращаются по спиралям, стремясь достигнуть радиуса $\sqrt{f_r^{(1)}/l_r}$. Для траекторий, имеющих начало вне круга с $r > \sqrt{f_r^{(1)}/l_r}$, правая часть уравнения (49) отрицательна, и поэтому радиус вращения со временем должен уменьшаться. Таким образом, возникающий периодический режим (бифуркация Андронова–Хопфа) для параметров $f_r^{(1)} = 2.57$, $f_i^{(1)} = 0.12$, $l_r = 0.42$, $l_i = 0.335$ связан с присутствием замкнутой траектории в фазовом пространстве. Все траектории, независимо от начальных условий, будут стремиться к этой замкнутой траектории, называемой устойчивым предельным циклом [67, 68].

5.2. Анализ комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау при $\delta \neq 0$

Проведем анализ комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау для случая $\delta \neq 0$. Представляя амплитуду как $A(\tau) = X(\tau) + iY(\tau)$, из уравнения (43) получим систему неавтономных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dX(\tau)}{d\tau} &= f_r^{(1)}X(\tau) - f_i^{(1)}Y(\tau) - \\ &- \delta \cos(\omega_B\tau) \left(f_r^{(2)}X(\tau) + f_i^{(2)}Y(\tau) \right) - \\ &- (l_rX(\tau) - l_iY(\tau)) (X^2(\tau) + Y^2(\tau)), \\ \frac{dY(\tau)}{d\tau} &= f_i^{(1)}X(\tau) + f_r^{(1)}Y(\tau) - \\ &- \delta \cos(\omega_B\tau) \left(f_i^{(2)}X(\tau) - f_r^{(2)}Y(\tau) \right) - \\ &- (l_iX(\tau) + l_rY(\tau)) (X^2(\tau) + Y^2(\tau)). \end{aligned} \quad (51)$$

Динамические уравнения (51) описывают движение системы с внешним возмущением (параметр δ мал). Для проведения качественного анализа приведем систему уравнений (51) к автономной за счет увеличения ее размерности. Для этой цели введем обозначение для новой переменной $Z = \omega_B\tau$. В результате система уравнений (51) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dX(\tau)}{d\tau} &= f_r^{(1)}X(\tau) - f_i^{(1)}Y(\tau) - \\ &- \delta \cos Z \left(f_r^{(2)}X(\tau) + f_i^{(2)}Y(\tau) \right) - \\ &- (l_rX(\tau) - l_iY(\tau)) (X^2(\tau) + Y^2(\tau)), \\ \frac{dY(\tau)}{d\tau} &= f_i^{(1)}X(\tau) + f_r^{(1)}Y(\tau) - \\ &- \delta \cos Z \left(f_i^{(2)}X(\tau) - f_r^{(2)}Y(\tau) \right) - \\ &- (l_iX(\tau) + l_rY(\tau)) (X^2(\tau) + Y^2(\tau)), \\ \frac{dZ(\tau)}{d\tau} &= \omega_B. \end{aligned} \quad (52)$$

Из системы уравнений (51) следует, что положение точки равновесия $O(0,0)$ сохраняется и при наличии малого возмущения $\delta \neq 0$. Проведем численный анализ системы уравнений (51) при фиксированных значениях амплитуды и частоты модуляции: $\delta = 0.3$, $\omega_B = 10$. Численное решение системы уравнений (52) для параметров $f_r^{(1)} = -0.1$, $f_i^{(1)} = 3.96$, $l_r = 0.145$, $l_i = 0.145$, $f_r^{(2)} = 0.5$, $f_i^{(2)} = 0.5$ показывает затухание компонент (X, Y) (рис. 7а). Такое поведение траекторий на фазовом портрете соответствует устойчивому фокусу (рис. 7б). При изменении параметров системы к значениям $f_r^{(1)} = 0.57$, $f_i^{(1)} = 2.82$, $l_r = 0.075$, $l_i = 0.335$, $f_r^{(2)} = 0.5$, $f_i^{(2)} = 0.5$ стационарное состояние $O(0,0)$ становится неустойчивым. Точка $O(0,0)$ будет соответствовать неустойчивому фокусу. Здесь периодические орбиты накручиваются по спирали, исходя из точки $O(0,0)$ (рис. 8). Волнообразное поведение траекторий вызвано модуляцией внешнего магнитного поля. В результате численного решения системы уравнений (52) для параметров $f_r^{(1)} = 2.57$, $f_i^{(1)} = 0.12$, $l_r = 0.42$, $l_i = 0.335$, $f_r^{(2)} = 0.5$, $f_i^{(2)} = 0.5$ хорошо заметно (рис. 9), что возникает модуляция нелинейной волны при наличии периодических внешних воздействий. При этом частота модуляции нелинейной волны не определяется частотой внешнего воздействия, а зависит от амплитуды нелинейной волны. Частота модуляции увеличивается за счет добавки к частоте нелинейной волны, которая пропорциональна квадрату ее амплитуды. Другими словами, с ростом амплитуды нелинейной волны период модуляции уменьшается. Такое поведение и наблюдается при численном моделировании с изменением амплитуды цикла или амплитуды нелинейной волны. Внешнее воздействие играет роль только спускового механизма, при котором возникает модуляционная неустойчивость нелинейной волны.

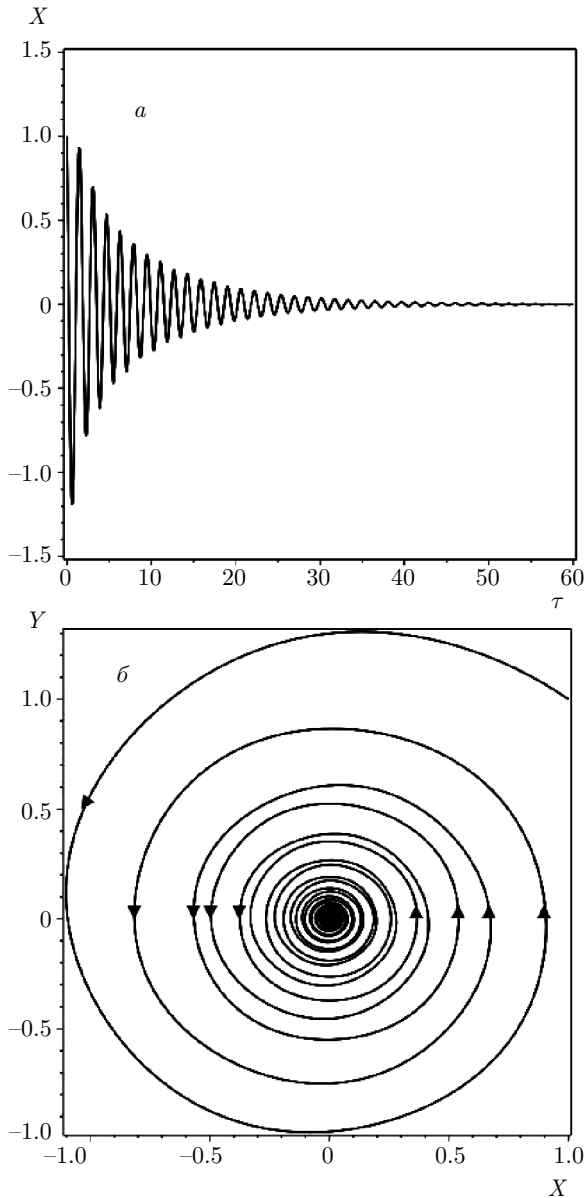


Рис. 7. а) Затухание $X(Y)$ -компоненты в зависимости от времени τ . б) Фазовый портрет для динамической системы уравнений (52) – устойчивый фокус

6. УРАВНЕНИЯ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ГАЛЕРКИНСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Еще одним эффективным способом исследования слабонелинейной стадии развития конвективной неустойчивости является метод Галеркина [69]. Согласно этому методу, представим все возмущения в уравнениях (25) в виде рядов Фурье:

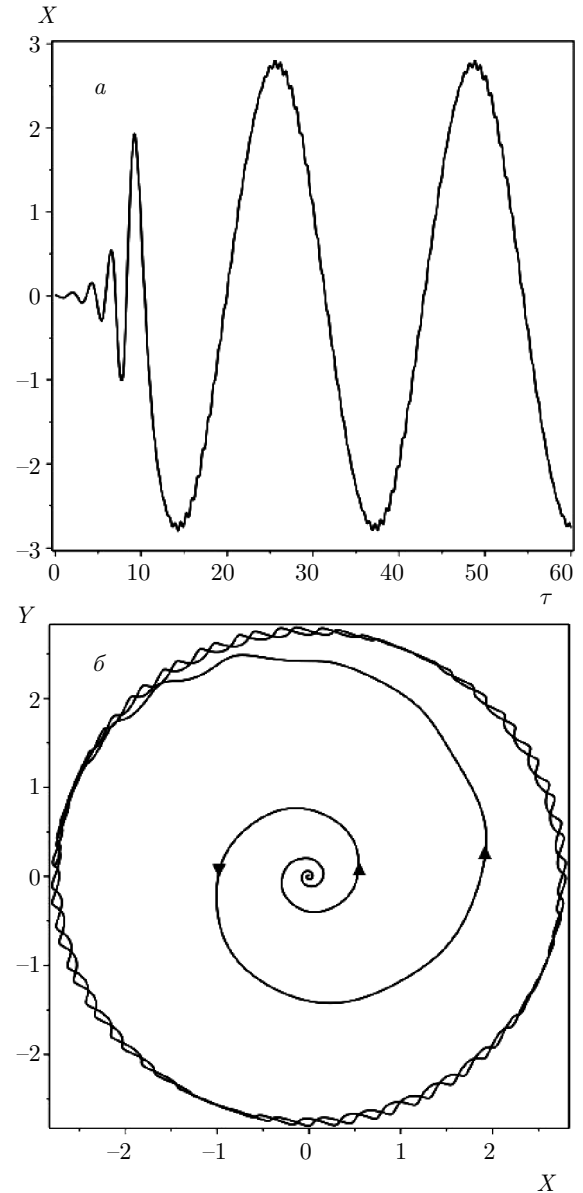


Рис. 8. а) Установление периодической зависимости $X(Y)$ -компоненты от времени τ . б) Фазовый портрет для динамической системы уравнений (52) – неустойчивый фокус

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}(t) \sin(mkx) \sin(n\pi z), \\ v &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn}(t) \sin(mkx) \cos(n\pi z), \\ \phi &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{mn}(t) \sin(mkx) \cos(n\pi z), \\ \tilde{v} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn}(t) \sin(mkx) \sin(n\pi z), \\ \theta &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{mn}(t) \cos(mkx) \sin(n\pi z).\end{aligned}\quad (53)$$

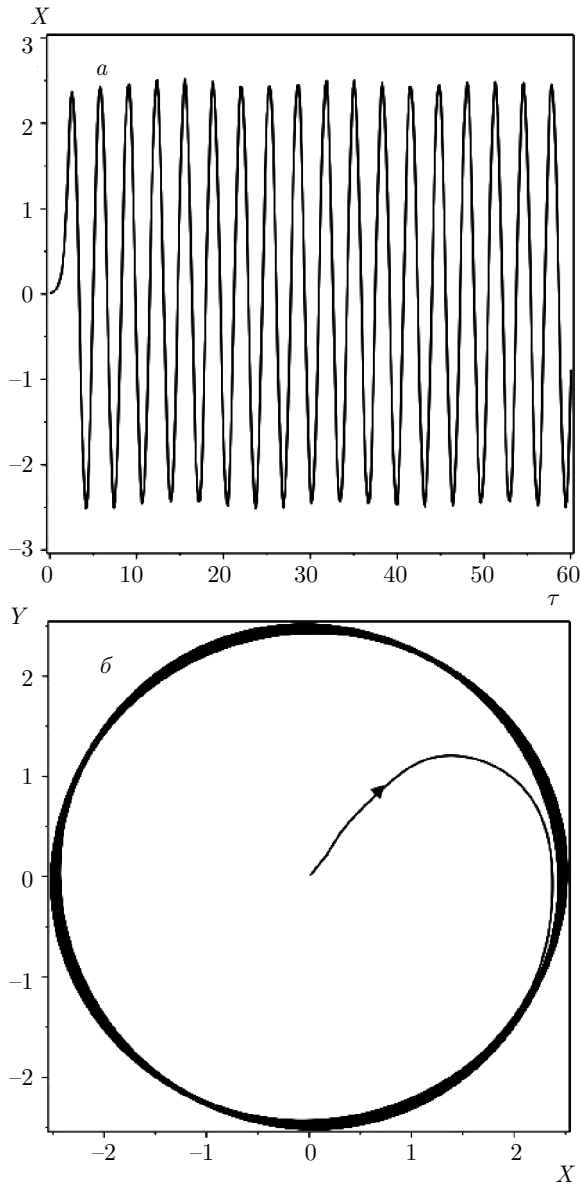


Рис. 9. а) Модуляция автоколебаний $X(Y)$ -компоненты. б) Фазовый портрет для динамической системы уравнений (52) — предельный цикл

Выражения (53) удовлетворяют граничным условиям (24). Ограничимся галеркинской аппроксимацией минимального порядка, а именно, для функции тока ψ рассмотрим моды $(1, 1)$, для y -компоненты скорости v — моды $(1, 1)$, магнитного потенциала ϕ — $(1, 1)$, y -компоненты возмущений магнитного поля $\tilde{v}$ — $(1, 1)$ и возмущений температуры θ — $(1, 1) + (0, 2)$:

$$\begin{aligned}\psi(x, z, t) &= A_{11}(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \\ v &= V_{11}(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \\ \phi(x, z, t) &= B_{11}(t) \sin(kx) \cos(\pi z), \\ \tilde{v} &= W_{11}(t) \sin(kx) \sin(\pi z), \\ \theta(x, y, t) &= C_{11}(t) \cos(kx) \sin(\pi z) + \\ &\quad + C_{02}(t) \sin(2\pi z),\end{aligned}\quad (54)$$

где k — безразмерное волновое число, A_{11} , V_{11} , B_{11} , W_{11} , C_{11} , C_{02} — амплитуды возмущений. В результате подстановки разложения (54) в уравнения (25), используя свойства ортогональности функций

$$\int_0^1 \sin(m\pi z) \sin(n\pi z) dz = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 1/2, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

получим уравнения эволюции для амплитуд возмущений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{11}}{\partial \tilde{t}} &= -A_{11} - \frac{\pi\sqrt{\text{Ta}}}{a^4} V_{11} - \\ &\quad - \frac{\pi\text{QPr}}{a^2\text{Pm}} (1 + \delta\epsilon^2 \cos(\Omega_B \tilde{t})) B_{11} + \frac{k\text{Ra}}{a^4} C_{11},\end{aligned}\quad (55)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{11}}{\partial \tilde{t}} &= -V_{11} + \frac{\pi\sqrt{\text{Ta}}}{a^2} (1 + \text{Ro}) A_{11} + \\ &\quad + \frac{\pi\text{QPr}}{a^2\text{Pm}} (1 + \delta\epsilon^2 \cos(\Omega_B \tilde{t})) W_{11},\end{aligned}\quad (56)$$

$$\text{Pm} \frac{\partial B_{11}}{\partial \tilde{t}} = -B_{11} + \frac{\pi\text{Pm}}{a^2\text{Pr}} (1 + \delta\epsilon^2 \cos(\Omega_B \tilde{t})) A_{11},\quad (57)$$

$$\begin{aligned}\text{Pm} \frac{\partial W_{11}}{\partial \tilde{t}} &= -W_{11} - \frac{\pi\text{Pm}}{a^2\text{Pr}} (1 + \delta\epsilon^2 \cos(\Omega_B \tilde{t})) V_{11} + \\ &\quad + \frac{\pi\text{PmRo}\sqrt{\text{Ta}}}{a^2} B_{11},\end{aligned}\quad (58)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial C_{11}}{\partial \tilde{t}} = -C_{11} + \frac{k}{a^2} A_{11} + \frac{\pi k}{a^2} A_{11} C_{02},\quad (59)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial C_{02}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{4\pi^2}{a^2} C_{02} - \frac{\pi k}{2a^2} A_{11} C_{11}.\quad (60)$$

Здесь $a = \sqrt{k^2 + \pi^2}$ — общее волновое число, $\tilde{t} = a^2 t$ — редуцированное время, $\Omega_B = \tilde{\omega}_B / a^2$ — редуцированная частота модуляции магнитного поля. Полученная нами система обыкновенных дифференциальных уравнений (55)–(60) является спектральной моделью низкого порядка, но вполне может качественно воспроизводить конвективные процессы в полной (самосогласованной) нелинейной системе уравнений (25).

Введем для удобства следующие обозначения:

$$R = \frac{k^2 Ra}{a^6}, \quad T = \frac{\pi^2 \sqrt{Ta}}{a^6}, \quad H = \frac{\pi^2}{a^4} \frac{QPr}{Pm}, \quad \gamma = \frac{4\pi^2}{a^2},$$

и проведем перемасштабирование амплитуд A_{11} , V_{11} , B_{11} , W_{11} , C_{11} , C_{02} в виде

$$\begin{aligned} X(\tilde{t}) &= \frac{k\pi}{a^2\sqrt{2}} A_{11}(\tilde{t}), & V(\tilde{t}) &= \frac{kV_{11}(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, \\ U(\tilde{t}) &= \frac{kB_{11}(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, & W(\tilde{t}) &= \frac{a^2k}{\pi\sqrt{2}} W_{11}(\tilde{t}), \\ Y(\tilde{t}) &= \frac{\pi C_{11}(\tilde{t})}{\sqrt{2}}, & Z(\tilde{t}) &= -\pi C_{02}(\tilde{t}). \end{aligned}$$

Тогда уравнения (55)–(60) принимают вид нелинейной динамической системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -X + RY - TV - H(1 + \delta_1 \cos(\Omega_B \tilde{t}))U, \\ \dot{V} &= -V + H(1 + \delta_1 \cos(\Omega_B \tilde{t}))W + \\ &\quad + \sqrt{Ta}(1 + Ro)X, \\ \dot{U} &= -Pm^{-1}U + Pr^{-1}(1 + \delta_1 \cos(\Omega_B \tilde{t}))X, \\ \dot{W} &= -Pm^{-1}W - Pr^{-1}(1 + \delta_1 \cos(\Omega_B \tilde{t}))V + \\ &\quad + Ro\sqrt{Ta}U, \\ \dot{Y} &= Pr^{-1}(-Y + X - XZ), \\ \dot{Z} &= Pr^{-1}(-\gamma Z + XY), \end{aligned} \quad (61)$$

где точка сверху обозначает дифференцирование по времени $\tilde{t}$, $\delta_1 = \delta\epsilon^2$. В отсутствие модуляции внешнего магнитного поля система уравнений (61) имеет сходство с уравнениями Лоренца [69], но для шести-мерного фазового пространства. Хаотическое поведение системы уравнений (61) без модуляции ($\delta_1 = 0$) было подробно исследовано в работах [48, 49]. Далее мы проведем численное исследование динамической системы уравнений (61) с периодическими коэффициентами.

7. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛОРЕНЦА (6D)

В этом разделе с помощью стандартных программ в компьютерной среде Mathematica представим результаты численных исследований нелинейной системы уравнений (61) с начальными условиями $X(0) = V(0) = U(0) = W(0) = Y(0) = Z(0) = 1$ во временной области $0 \leq \tilde{t} \leq 6000$ для кеплеровского ($Ro = -3/4$) профиля вращения. Некоторые параметры магнитной конвекции в неоднородно вращающейся среде ($Pm = 1$, $Pr = 9$, $H = 5$, $T = 1$,

$Ta = 2$, $\gamma = 1$) будем считать фиксированными. Остальные параметры R , δ_1 , Ω_B рассмотрим как переменные при исследовании влияния модуляции магнитного поля на хаотическое поведение системы (61). Как и ранее, полагаем амплитуду модуляции (δ_1) достаточно малой.

На рис. 10 и 11 показаны численные решения системы уравнений (61) для значений амплитуды $\delta_1 = 0.3$ и частоты модуляции $\Omega_B = 10$ внешнего магнитного поля при изменении параметра Рэлея R .

На рис. 10а для параметра $R = 13.8$ мы наблюдаем извилистые линии траекторий, которые накручиваются по спирали вокруг неподвижной точки. Эта точка в отсутствие модуляции соответствует устойчивому фокусу [48]. Величина возмущенного магнитного поля $U(\tilde{t})$ (для параметра $R = 13.8$) уменьшается по амплитуде, достигая некоторого значения $U_m(\tilde{t})$, вызванного модуляцией внешнего магнитного поля (см. рис. 11а). На рис. 10б, 11б при параметре $R = 28.5$ показано возникновение гомоклинической петли в фазовом пространстве. Как видно на рис. 10б, извилистость траекторий обусловлена влиянием модуляции. Возмущенное магнитное поле $U(\tilde{t})$ здесь также полностью не затухает (см. рис. 11б). При увеличении параметра Рэлея, т. е. при $R = 31.38$, наблюдается переход от гомоклинической траектории к хаотическому движению (см. рис. 10в, 11в). На рис. 11в показаны нерегулярные колебания с апериодическим изменением амплитуды и направления (инверсией) возмущенного магнитного поля.

Результаты численных исследований системы уравнений (61) по влиянию высокочастотной модуляции $\Omega_B = 50$ на поведение конвекции при разных параметрах Рэлея $R = 13.8, 28.5, 31.38$ показаны на рис. 12 и 13. Для этого случая величину амплитуды модуляции будем считать без изменения, т. е. $\delta_1 = 0.3$. Сравнивая результаты, представленные на рис. 10 и 11, видим, что на высоких частотах модуляции траектории движения в фазовом пространстве выглядят более сглаженными. Это является следствием того, что с увеличением частоты модуляции теплоперенос (число Нуссельта Nu) в системе становится меньше (см. рис. 4).

На рис. 14 и 15 показаны результаты численных исследований системы уравнений (61) для большей амплитуды модуляции $\delta_1 = 0.5$, чем для случая показанного на рис. 10 и 11. Частота модуляции Ω_B и параметры Рэлея R остаются без изменения, т. е. $\Omega_B = 10$, $R = 13.8, 28.5, 31.38$. На рис. 14 видно, что с увеличением амплитуды модуляции, извилистость фазовых траекторий становится существенно больше. На рис. 15а,б показаны периодический и «квази-

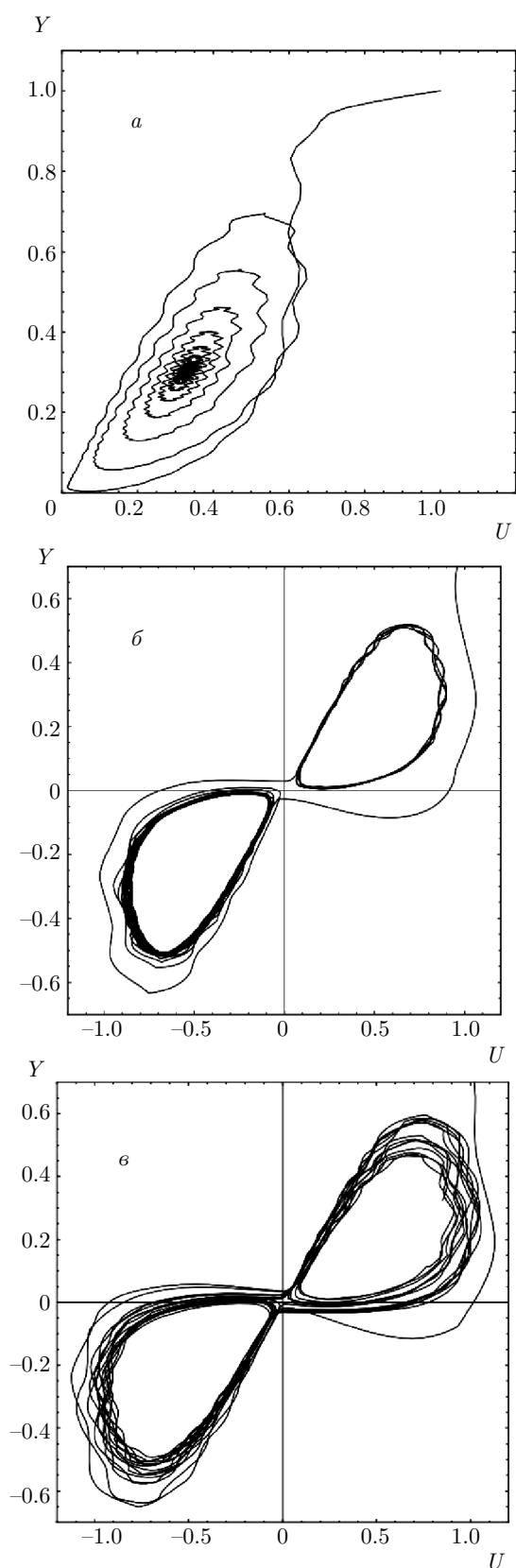


Рис. 10. Проекция фазовых траекторий в плоскости UY при изменении параметра R : $a - R = 13.8$; $b - R = 28.5$; $c - R = 31.38$, для фиксированной амплитуды $\delta_1 = 0.3$ и частоты $\Omega_B = 10$

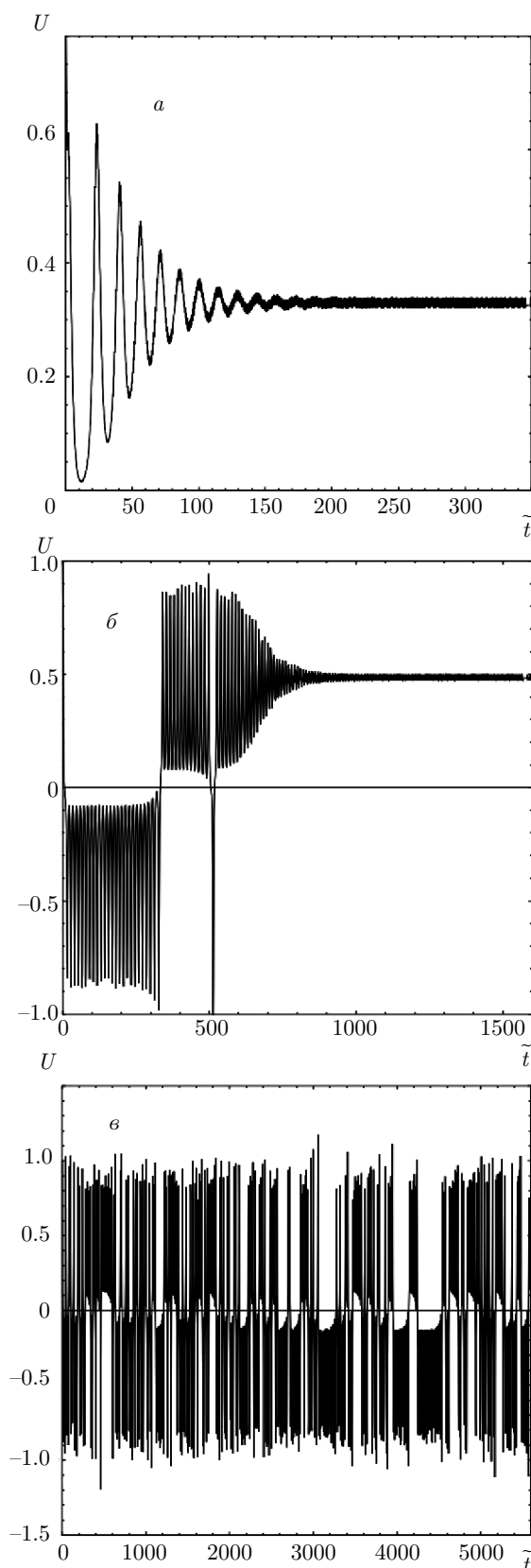


Рис. 11. Временные зависимости вариаций амплитуды магнитной компоненты $U(\tilde{t})$ при изменении параметра R : $a - R = 13.8$; $b - R = 28.5$; $c - R = 31.38$, для фиксированной амплитуды $\delta_1 = 0.3$ и частоты $\Omega_B = 10$

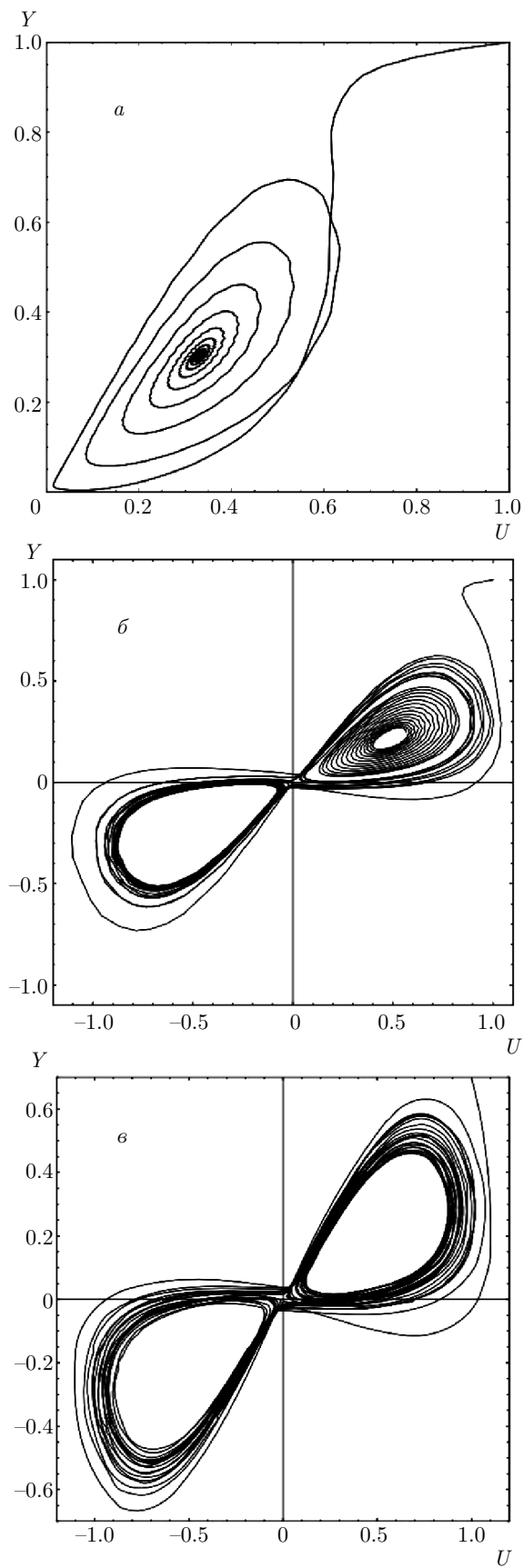


Рис. 12. То же, что на рис. 10, но для $\Omega_B = 50$

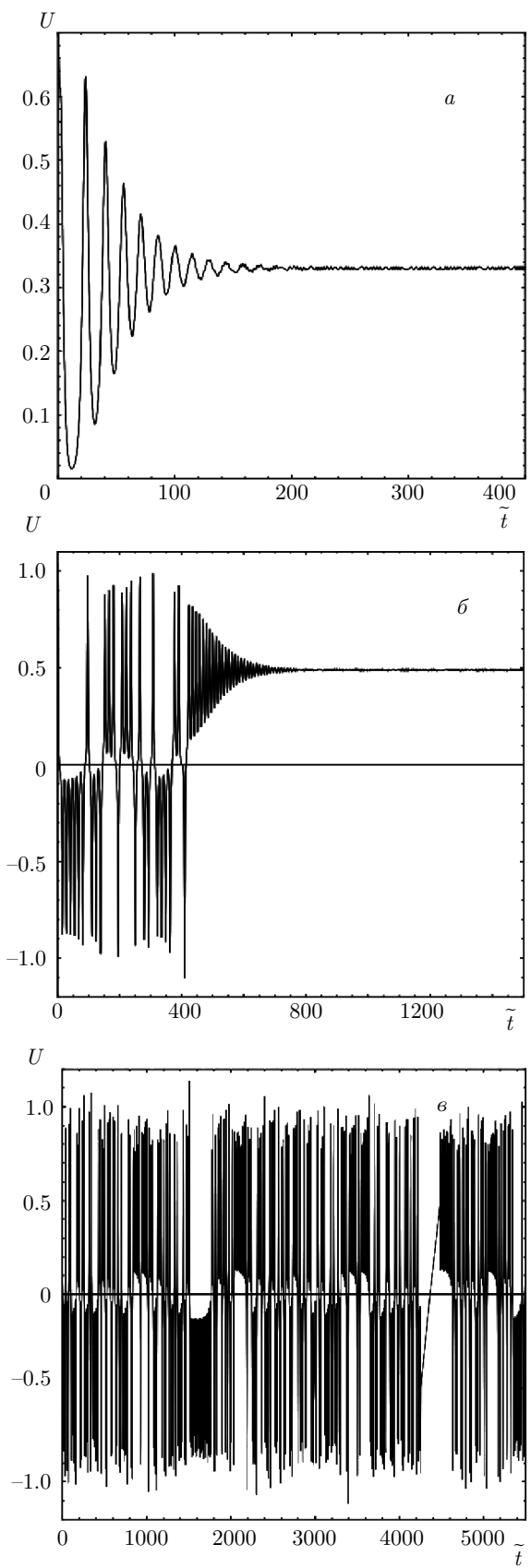


Рис. 13. То же, что на рис. 11, но для $\Omega_B = 50$

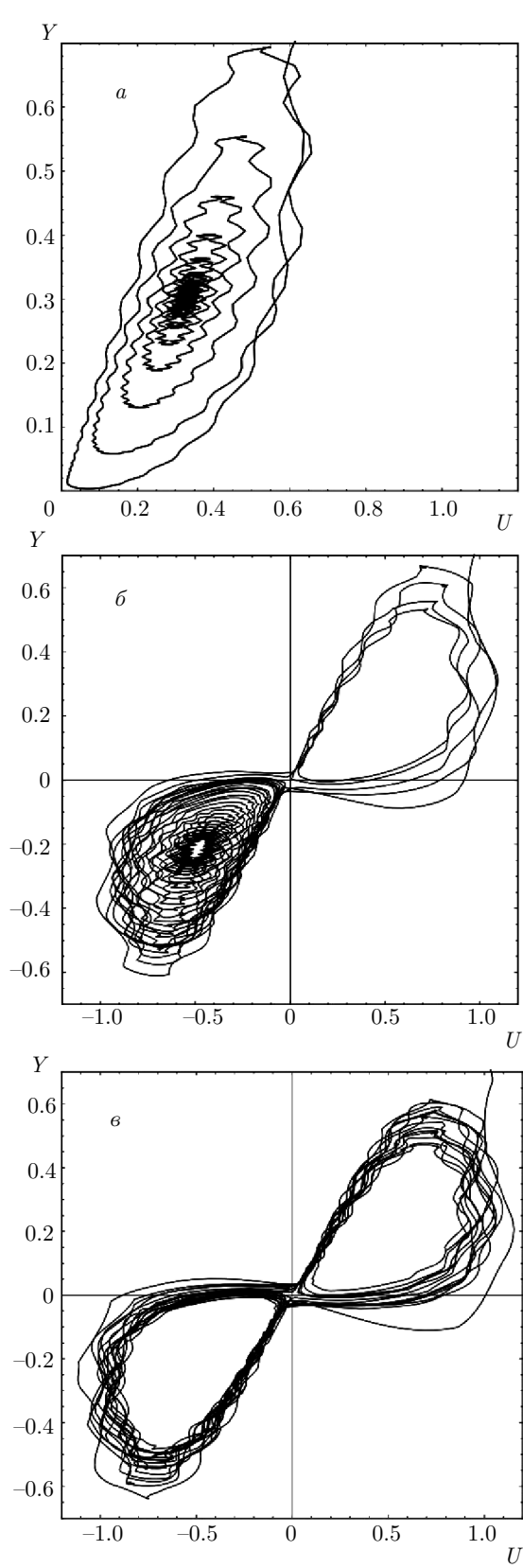


Рис. 14. То же, что на рис. 10, но для $\Omega_B = 10$

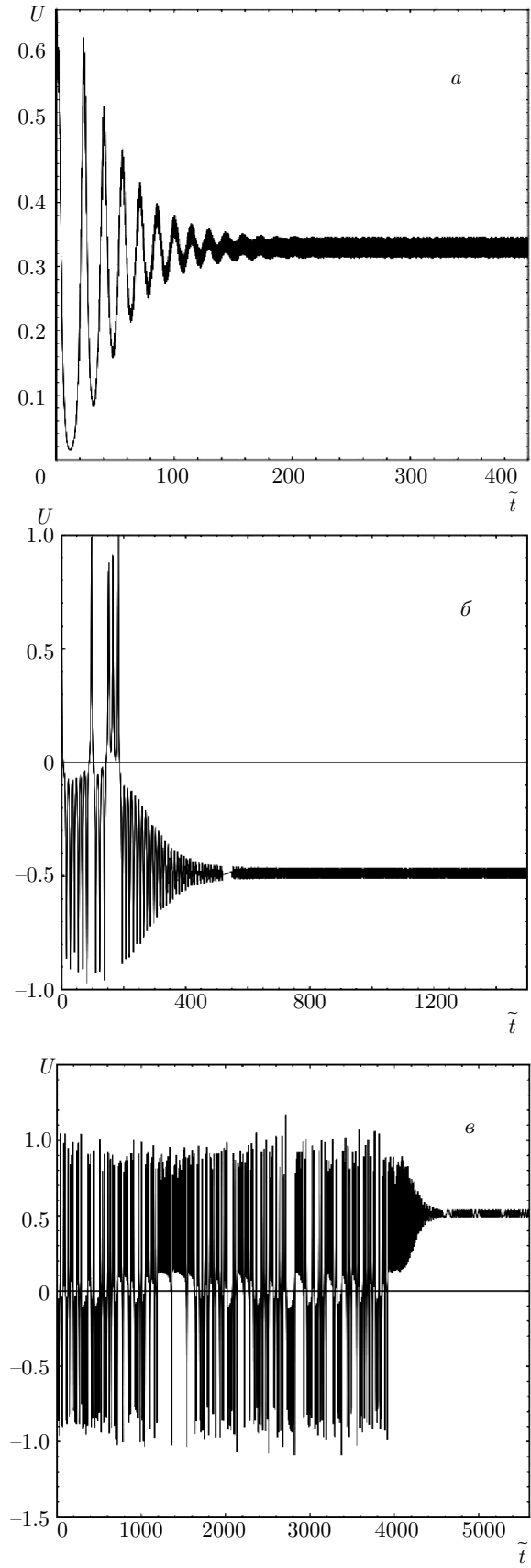


Рис. 15. То же, что на рис. 11, но для $\Omega_B = 10$

периодический» режимы затухания возмущенного магнитного поля до некоторого значения $U_m(\tilde{t})$, обусловленного модуляцией внешнего магнитного поля. На рис. 15б показан режим метастабильного хаоса, для которого хаотическое поведение на временном интервале $0 \leq \tilde{t} \leq 4000$ сменяется периодическим затуханием до определенного уровня осцилляций возмущенного магнитного поля $U_m(\tilde{t})$.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развита слабонелинейная теория колебательной конвекции в неоднородно вращающейся электропроводящей жидкости в аксиальном магнитном поле, которое состоит из суммы регулярной (постоянной) и осциллирующей с малой амплитудой частей. Влияние периодической по времени магнитной модуляции на конвекцию Рэлея–Бенара исследовалось при помощи метода теории возмущений по малому параметру надкритичности числа Рэлея $\epsilon = \sqrt{(\text{Ra} - \text{Ra}_c)/\text{Ra}_c}$. В линейном приближении, или в первом порядке по ϵ , мы получили выражение для критического числа Рэлея Ra_c в случае колебательной конвекции ($\omega \neq 0$). Отрицательный профиль неоднородного вращения $\text{Ro} = -3/4$ приводит к понижению порога неустойчивости и тем самым оказывает дестабилизирующее действие на развитие неустойчивости. В третьем порядке по ϵ мы получили нелинейное комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау с периодическими по времени коэффициентами. Численный анализ этого уравнения показал, что при неоднородном вращении с положительным числом Россби ($\text{Ro} = 2$) теплоперенос в плазме увеличивается. При увеличении частоты модуляции ω_B вариации числа Нуссельта ΔNu уменьшаются, что приводит к подавлению теплопереноса как при положительных ($\text{Ro} = 2$), так и при отрицательных ($\text{Ro} = -3/4$) профилях вращения. Отсюда можно сделать вывод, что эффект магнитной модуляции является весьма существенным и может использоваться для понижения порога возникновения конвекции, т.е. для уменьшения теплопередачи. Эффект увеличения амплитуды модуляции δ приводит к повышению теплообмена. Применяя галеркинскую аппроксимацию минимального порядка к нелинейной системе уравнений для неоднородно вращающейся магнитоконвекции, мы получили динамическую систему уравнений Лоренца (6D) с периодическими коэффициентами. Эта система уравнений описывает нелинейный режим модулированной конвекции.

Численный анализ этой системы уравнений показал, что модулированное внешнее магнитное поле оказывает существенное влияние на хаотическое поведение возбуждаемого магнитного поля и его инверсию. В частности, повышение амплитуды модуляции может вызвать переход от хаотического к периодическому поведению конвекции.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ряд ценных и полезных замечаний.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Коэффициенты $f_r^{(1)}$, $f_r^{(2)}$, $f_i^{(1)}$, $f_i^{(2)}$, l_r , l_i в уравнении (43)

Приведем явный вид коэффициентов $f_r^{(1)}$, $f_r^{(2)}$, $f_i^{(1)}$, $f_i^{(2)}$, l_r , l_i , входящих в уравнение (43):

$$f_r^{(1)} = (s_r F_r + \omega^2 s_i F_i) \Delta^{-1}, \quad f_r^{(2)} = (\omega^2 s_i \tilde{F}_i - s_r \tilde{F}_r) \Delta^{-1},$$

$$f_i^{(1)} = \omega(s_i F_r - s_r F_i) \Delta^{-1},$$

$$f_i^{(2)} = \omega(s_r \tilde{F}_i + s_i \tilde{F}_r) \Delta^{-1}, \quad l_r = (\mathcal{R}_r s_r - \omega^2 \mathcal{R}_i s_i) \Delta^{-1},$$

$$l_i = \omega(\mathcal{R}_r s_i + \mathcal{R}_i s_r) \Delta^{-1}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$s_r = a^2 + k^2 \text{Ra}_c \text{Pr} \left(\frac{a^4 - \omega^2 \text{Pr}^2}{(a^4 + \omega^2 \text{Pr}^2)^2} \right) - \pi^2 a^2 \text{QPm} \left(\frac{a^4 - \omega^2 \text{Pm}^2}{(a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2)^2} \right) - \pi^2 \text{Ta} \cdot T_r,$$

$$s_i = k^2 \text{Ra}_c \text{Pr} \left(\frac{2a^2 \text{Pr}}{(a^4 + \omega^2 \text{Pr}^2)^2} \right) - \pi^2 a^2 \text{QPm} \left(\frac{2a^2 \text{Pm}}{(a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2)^2} \right) - \pi^2 \text{Ta} \cdot T_i,$$

$$F_r = \frac{a^2 k^2 \text{Ra}_c}{a^4 + \omega^2 \text{Pr}^2}, \quad \tilde{F}_r = -\frac{2\pi^2 a^4 \text{Q}}{a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2} + \pi^4 \text{TaQ} \cdot L_r,$$

$$F_i = \frac{k^2 \text{Ra}_c \text{Pr}}{a^4 + \omega^2 \text{Pr}^2}, \quad \tilde{F}_i = \frac{2\pi^2 a^2 \text{QPm}}{a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2} + \pi^4 \text{TaQ} \cdot L_i,$$

$$\mathcal{R}_r = \frac{\pi^2 k^4 \text{Ra}_c}{2} \times \frac{\omega^2 \text{Pr}^2 (\pi^2 - a^6 - \omega^2 \text{Pr}^2 (a^2 + \pi^2)) + \pi^2 a^4 (1 + a^4)}{(\omega^2 \text{Pr}^2 + a^4)(\omega^2 \text{Pr}^2 (a^4 + 4\pi^4 + \omega^2 \text{Pr}^2) + 4\pi^4 a^4)},$$

$$\mathcal{R}_i = \frac{k^4 \text{Ra}_c}{4} \times \frac{\omega^2 \text{Pr}^2 (\omega^2 \text{Pr}^2 - 4\pi^2 a^2 - 1) - a^4 (a^4 + 4\pi^2 a^2 + 1)}{(\omega^2 \text{Pr}^2 + a^4)(\omega^2 \text{Pr}^2 (a^4 + 4\pi^4 + \omega^2 \text{Pr}^2) + 4\pi^4 a^4)}.$$

Далее приведем выражения для T_r , T_i , L_r , L_i :

$$\begin{aligned} T_r &= \beta_r (\gamma_r \kappa_r + \omega^2 \gamma_i \kappa_i + \sigma_r) + \omega^2 \beta_i (\gamma_r \kappa_i - \gamma_i \kappa_r - \sigma_i), \\ T_i &= \beta_r (\gamma_r \kappa_i - \gamma_i \kappa_r - \sigma_i) - \beta_i (\gamma_r \kappa_r + \omega^2 \gamma_i \kappa_i + \sigma_r), \\ L_r &= \beta_r (\tilde{\gamma}_r \delta_r + \delta_i \tilde{\gamma}_i \omega^2 - \text{RoPm}) + \omega^2 \beta_i (\tilde{\gamma}_r \delta_i - \tilde{\gamma}_i \delta_r), \\ L_i &= \beta_r (\tilde{\gamma}_r \delta_i - \tilde{\gamma}_i \delta_r) - \beta_i (\tilde{\gamma}_r \delta_r + \delta_i \tilde{\gamma}_i \omega^2 - \text{RoPm}). \end{aligned}$$

Входящие в эти выражения постоянные коэффициенты β_r , β_i , γ_r , γ_i , $\tilde{\gamma}_r$, $\tilde{\gamma}_i$, δ_r , δ_i , κ_r , κ_i , σ_r , σ_i соответственно равны

$$\begin{aligned} \beta_r &= \frac{a^2 \zeta - \omega^2 a^2 \text{Pm} (1 + \text{Pm})}{\omega^2 (\text{Pm} \zeta + a^4 (1 + \text{Pm}))^2 + (a^2 \zeta - \omega^2 a^2 \text{Pm} (1 + \text{Pm}))^2}, \\ \beta_i &= \frac{\text{Pm} \zeta + a^4 (1 + \text{Pm})}{\omega^2 (\text{Pm} \zeta + a^4 (1 + \text{Pm}))^2 + (a^2 \zeta - \omega^2 a^2 \text{Pm} (1 + \text{Pm}))^2}, \\ \gamma_r &= \frac{a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 \text{Pm}}{(a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 \text{Pm})^2 + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})^2}, \\ \gamma_i &= \frac{a^2 (1 + \text{Pm})}{(a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 \text{Pm})^2 + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})^2}, \\ \tilde{\gamma}_r &= \frac{a^2 (a^4 + \pi^2 Q + \omega^2 \text{Pm}^2)}{(a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 \text{Pm})^2 + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})^2}, \\ \tilde{\gamma}_i &= \frac{\omega^2 \text{Pm}^2 + a^4 - \pi^2 Q \text{Pm}}{(a^4 + \pi^2 Q - \omega^2 \text{Pm})^2 + \omega^2 a^4 (1 + \text{Pm})^2}, \\ \delta_r &= 2a^2 (1 + \text{Ro}) + \frac{\pi^2 a^2 Q \text{RoPm}}{a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2} - a^2 \text{RoPm}, \end{aligned}$$

$$\delta_i = \text{Pm} (2 + \text{Ro}) - \frac{\pi^2 Q \text{RoPm}^2}{a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2},$$

$$\kappa_r = (1 + \text{Ro}) (a^6 - 3\omega^2 a^2 \text{Pm}^2) + \pi^2 a^2 Q \text{Pm} (\text{RoPm} - 1),$$

$$\kappa_i = (1 + \text{Ro}) (3a^4 \text{Pm} - \omega^2 \text{Pm}^3) + \pi^2 \text{Pm}^2 Q (\text{Ro} - 1),$$

$$\sigma_r = \frac{\pi^2 a^2 \text{RoQ} \text{Pm}^2}{a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2}, \quad \sigma_i = \frac{\pi^2 \text{RoQ} \text{Pm}^3}{a^4 + \omega^2 \text{Pm}^2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вывод комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау из уравнений Лоренца (6D) с модуляцией внешнего магнитного поля

В этом разделе приведем вывод комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау (41) из уравнений Лоренца (6D) с модуляцией внешнего магнитного поля (61). Представим все возмущенные величины в уравнениях (61) в виде разложения в ряд по малому параметру надкритичности ϵ :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\tilde{t}) &= \epsilon \mathbf{X}_1 + \epsilon^2 \mathbf{X}_2 + \epsilon^3 \mathbf{X}_3 + \dots, \\ \mathbf{X}(\tilde{t}) &= [X, V, U, W, Y, Z]^{Tr}, \\ \mathbf{R} &= \mathbf{R}_0 + \epsilon^2 \mathbf{R}_2 + \dots \end{aligned} \quad (62)$$

Амплитуды возмущенных величин зависят как от быстрого $\tilde{t}_0$, так и от медленного $\tilde{\tau} = \epsilon^2 \tilde{t}$ времен. Производную по времени в уравнениях (61) представим в виде [61]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}}. \quad (63)$$

Для первого порядка по ϵ , после подстановки разложений (62), (63) в (61), получим линейную систему уравнений

$$\mathcal{L} \mathbf{X}_1 = 0, \quad \mathbf{X}_1 = [X_1, V_1, U_1, W_1, Y_1, Z_1]^{Tr}, \quad (64)$$

где матрица $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + 1\right) & -T & -H & 0 & R_0 & 0 \\ \sqrt{\text{Ta}}(1 + \text{Ro}) & -\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + 1\right) & 0 & H & 0 & 0 \\ \text{Pr}^{-1} & 0 & -\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + \text{Pm}^{-1}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\text{Pr}^{-1} & \text{Ro}\sqrt{\text{Ta}} & -\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + \text{Pm}^{-1}\right) & 0 & 0 \\ \text{Pr}^{-1} & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + \text{Pr}^{-1}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + \gamma \text{Pr}^{-1}\right) \end{bmatrix}.$$

Решения уравнений (64) относительно переменной

$$X_1 = \tilde{X}_1(\tilde{\tau})e^{i\omega'\tilde{t}_0} + \tilde{X}_1^*(\tilde{\tau})e^{-i\omega'\tilde{t}_0}$$

соответственно равны

$$V_1 = \frac{\sqrt{\text{Ta}} \left((1+\text{Ro}) \text{Pr} + \frac{\text{HRoPm}^2}{(i\omega' + 1)^2} \right)}{\text{Pr}(i\omega' + 1) + \frac{\text{HPm}}{i\omega'\text{Pm} + 1}} \tilde{X}_1(\tilde{\tau})e^{i\omega'\tilde{t}_0} + \text{c.c.},$$

$$U_1 = \frac{\text{Pm}}{\text{Pr}(i\omega'\text{Pm} + 1)} \tilde{X}_1(\tilde{\tau})e^{i\omega'\tilde{t}_0} + \text{c.c.},$$

$$W_1 = -\frac{\text{Pm}\sqrt{\text{Ta}} \left(1 + \text{Ro} \left(1 - \frac{\text{Pm}(i\omega' + 1)}{i\omega'\text{Pm} + 1} \right) \right)}{\text{Pr}(i\omega' + 1)(i\omega'\text{Pm} + 1) + \text{HPm}} \times \tilde{X}_1(\tilde{\tau})e^{i\omega'\tilde{t}_0} + \text{c.c.},$$

$$Y_1 = \frac{\tilde{X}_1(\tilde{\tau})e^{i\omega'\tilde{t}_0}}{i\omega'\text{Pr} + 1} + \text{c.c.}, \quad Z_1 = 0,$$

здесь $\omega' = \omega/a^2$ — редуцированная частота.

Для второго порядка по ϵ имеем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathbf{X}_2 &= [\mathcal{R}_{21}, \mathcal{R}_{22}, \mathcal{R}_{23}, \mathcal{R}_{24}, \mathcal{R}_{25}, \mathcal{R}_{26}]^{Tr}, \\ \mathbf{X}_2 &= [X_2, V_2, U_2, W_2, Y_2, Z_2]^{Tr}, \end{aligned} \quad (65)$$

где нелинейные члены соответственно равны

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{21} &= 0, \quad \mathcal{R}_{22} = 0, \quad \mathcal{R}_{23} = 0, \quad \mathcal{R}_{24} = 0, \\ \mathcal{R}_{25} &= \text{Pr}^{-1} X_1 Z_1, \quad \mathcal{R}_{26} = -\text{Pr}^{-1} X_1 Y_1. \end{aligned}$$

Учет нелинейности только в уравнении температурного баланса приводит к решению уравнений (65) следующего вида:

$$Z_2 = Z_{20} + Z_{22}e^{2i\omega'\tilde{t}_0} + Z_{22}^*e^{-2i\omega'\tilde{t}_0},$$

$$Z_{20} = \frac{2|\tilde{X}_1|^2}{\gamma(1+\omega'^2\text{Pr}^2)}, \quad Z_{22} = \frac{\tilde{X}_1^2}{(i\omega'\text{Pr}+1)(2i\omega'\text{Pr}+\gamma)}.$$

Далее переходим к уравнениям третьего порядка по ϵ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\mathbf{X}_3 &= [\mathcal{R}_{31}, \mathcal{R}_{32}, \mathcal{R}_{33}, \mathcal{R}_{34}, \mathcal{R}_{35}, \mathcal{R}_{36}]^{Tr}, \\ \mathbf{X}_3 &= [X_3, V_3, U_3, W_3, Y_3, Z_3]^{Tr}, \end{aligned} \quad (66)$$

где нелинейные члены соответственно равны

$$\mathcal{R}_{31} = \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} - \frac{\text{R}_2}{i\omega'\text{Pr}+1} + \delta \cos(\Omega_B \tilde{\tau}) \frac{\text{HPm}}{\text{Pr}(i\omega'\text{Pm}+1)} \right] \times \tilde{X}_1(\tilde{\tau})e^{i\omega'\tilde{t}_0} + \text{c.c.},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{32} &= \left[\frac{\sqrt{\text{Ta}} \left((1+\text{Ro}) \text{Pr} + \frac{\text{HRoPm}^2}{(i\omega' + 1)^2} \right)}{\text{Pr}(i\omega' + 1) + \frac{\text{HPm}}{i\omega'\text{Pm} + 1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} + \right. \\ &\quad \left. + \delta \cos(\Omega_B \tilde{\tau}) \frac{\text{Pm}\sqrt{\text{Ta}} \left(1 + \text{Ro} \left(1 - \frac{\text{Pm}(i\omega' + 1)}{i\omega'\text{Pm} + 1} \right) \right)}{\text{Pr}(i\omega' + 1)(i\omega'\text{Pm} + 1) + \text{HPm}} \right] \times \\ &\quad \times \tilde{X}_1(\tilde{\tau})e^{i\omega'\tilde{t}_0} + \text{c.c.}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{33} = \left[\frac{\text{Pm}}{\text{Pr}(i\omega'\text{Pm} + 1)} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} - \text{Pr}^{-1} \delta \cos(\Omega_B \tilde{\tau}) \right] \times \tilde{X}_1(\tilde{\tau})e^{i\omega'\tilde{t}_0} + \text{c.c.},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{34} &= \left[-\frac{\text{Pm}\sqrt{\text{Ta}} \left(1 + \text{Ro} \left(1 - \frac{\text{Pm}(i\omega' + 1)}{i\omega'\text{Pm} + 1} \right) \right)}{\text{Pr}(i\omega' + 1)(i\omega'\text{Pm} + 1) + \text{HPm}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} + \right. \\ &\quad \left. + \text{Pr}^{-1} \delta \cos(\Omega_B \tilde{\tau}) \frac{\sqrt{\text{Ta}} \left((1+\text{Ro}) \text{Pr} + \frac{\text{HRoPm}^2}{(i\omega' + 1)^2} \right)}{\text{Pr}(i\omega' + 1) + \frac{\text{HPm}}{i\omega'\text{Pm} + 1}} \right] \times \\ &\quad \times \tilde{X}_1(\tilde{\tau})e^{i\omega'\tilde{t}_0} + \text{c.c.}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{35} &= \left[\frac{1}{i\omega'\text{Pr} + 1} \frac{\partial \tilde{X}_1}{\partial \tilde{\tau}} + \text{Pr}^{-1} Z_{20} \tilde{X}_1 + \text{Pr}^{-1} Z_{22} \tilde{X}_1^* \right] \times \\ &\quad \times e^{i\omega'\tilde{t}_0} + \text{Pr}^{-1} Z_{22} \tilde{X}_1 e^{3i\omega'\tilde{t}_0} + \text{c.c.}, \quad \mathcal{R}_{36} = 0. \end{aligned}$$

Условие разрешимости (альтернатива Фредгольма) нелинейных уравнений (66) в третьем порядке по ϵ , согласно определению (26), имеет следующий вид:

$$\sum_{j=1}^5 \mathfrak{R}_{3j} \mathbf{X}_1^\dagger = 0, \quad (67)$$

здесь

$$\mathfrak{R}_{31} = \hat{\mathcal{P}} \text{Pr}^{-1} \mathcal{R}_{31}, \quad \mathfrak{R}_{32} = -\hat{\mathcal{P}} \text{R}_0 \mathcal{R}_{35},$$

$$\mathfrak{R}_{34} = -H \hat{\mathcal{P}} \mathcal{R}_{33},$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{35} &= \frac{\text{THRo}\sqrt{\text{Ta}}\text{Pm}^2}{\text{Pm} \frac{\partial}{\partial t_0} + 1} \mathcal{R}_{33} + \\ &\quad + \text{T} \left(\text{Pm} \frac{\partial}{\partial t_0} + 1 \right) \mathcal{R}_{32} + \text{THPm} \mathcal{R}_{34}, \end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{P}} = \sqrt{\text{Ta}}(1+\text{Ro}) \text{Pr} \left(\text{Pm} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + 1 \right) + \frac{\text{HRo} \sqrt{\text{Ta}} \text{Pm}^2}{\text{Pm} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + 1}.$$

Элементы матрицы $\mathbf{X}_1^\dagger = [X_1^\dagger, Y_1^\dagger, Z_1^\dagger, U_1^\dagger, V_1^\dagger]^T$ представляют собой решения линейной самосопряженной задачи $\mathcal{L}^\dagger \mathbf{X}_1^\dagger = 0$, где самосопряженная матрица $\mathcal{L}^\dagger$ определяется как

$$\mathcal{L}^\dagger = \begin{bmatrix} \text{Pr}^{-1} \hat{\mathcal{P}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + 1 \right) & -\text{R}_0 \text{Pr}^{-1} \hat{\mathcal{P}} & 0 & \text{HPr}^{-1} \hat{\mathcal{P}} & \text{TPr}^{-1} \hat{\mathcal{P}} \\ -\text{R}_0 \text{Pr}^{-1} \hat{\mathcal{P}} & \text{R}_0 \text{Pr}^{-1} \hat{\mathcal{P}} \left(\text{Pr} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + 1 \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + \gamma \text{Pr}^{-1} \right) & 0 & 0 \\ \text{HPr}^{-1} \hat{\mathcal{P}} & 0 & 0 & -\text{H} \hat{\mathcal{P}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + \text{Pm}^{-1} \right) & 0 \\ \text{TPr}^{-1} \hat{\mathcal{P}} & 0 & 0 & 0 & -\text{TPr}^{-1} \hat{\mathbf{H}} \end{bmatrix},$$

где

$$\hat{\mathbf{H}} = \text{Pr} \left(\text{Pm} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + 1 \right) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_0} + 1 \right) + \text{HPm}.$$

Из уравнения (67) получаем нелинейное уравнение для амплитуды $A(\tau)$, которое полностью совпадает с комплексным уравнением Гинзбурга – Ландау (41):

$$\mathcal{A}_1 \frac{\partial A(\tau)}{\partial \tau} - \mathcal{A}_2 A(\tau) + \mathcal{A}_3 |A(\tau)|^2 A(\tau) = 0. \quad (68)$$

Здесь вид коэффициентов $\mathcal{A}_{1,2,3}$ полностью совпадает с выражениями (42). При выводе уравнения (68) мы использовали связь перемасштабированной производной по медленному времени $\tilde{\tau}$:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\tau}} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Таким образом, применяя асимптотические разложения теории возмущений к неавтономным уравнениям Лоренца (6D) (61), мы получили комплексное уравнение Гинзбурга – Ландау (68), которое идентично уравнению (41) для конечной амплитуды, полученному в слабонелинейной теории.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Chandrasekhar, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, London (1961).
2. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*, Наука, Москва (1972).
3. А. В. Гетлинг, *Конвекция Рэлея – Бенара. Структура и динамика*, Эдиториал УРСС, Москва (1999).
4. C. A. Jones, *Dynamo Theory*, Department of Applied Mathematics, University of Leeds, UK (2007).
5. P. H. Roberts and G. A. Glatzmaier, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **94**(1), 47 (2001).
6. A. Tur and V. Yanovsky, *Coherent Vortex Structures in Fluids and Plasmas*, Springer Series in Synergetics, Springer, New York (2017).
7. P. G. Drazin and D. H. Reid, *Hydrodynamic Stability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (2004).
8. В. В. Алексеев, А. М. Гусев, УФН **141**, 311 (1983).
9. А. В. Гетлинг, УФН **161**(9), 1 (1991).
10. E. S. Knobloch, *Int. J. Eng. Sci.* **36**, 1421 (1998).
11. F. H. Busse, in *Proceedings of US National Congress of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers (1982), p. 299.
12. R. Avila and A. Cabello, *Math. Problems in Eng.*, Article ID **236901**, 1 (2013).
13. W. V. R. Malkus and G. Veronis, *J. Fluid Mech.* **4**, 225 (1958).
14. A. C. Newell and J. A. Whitehead, *J. Fluid Mech.* **38**, 279 (1969).
15. E. Knobloch and J. De Luca, *Nonlinearity* **3**, 975 (1990).
16. M. Revallo and D. Sevcovic, *Physica D* **161**, 116 (2002).
17. A. Benerji Babu, Ragoju Ravi, and S. G. Tagare, *Int. J. Geophys.* **2011**, Article ID **207123**, 17 (2011).
18. J. K. Bhattacharjee, *J. Phys. A* **22**, L1135 (1989).

19. J. K. Bhattacharjee, Phys. Rev. A **41**, 5491 (1990).
20. B. S. Bhadauria and P. Kiran, Ain Shams Eng. J. **5**, 1287 (2015).
21. Ramya Rajagopal, Shelin Elizabeth Jacob, and Sangeetha George K., Int. J. Math. Trends and Technology **54**, 477 (2018).
22. P. Kiran, Ain Shams Eng. J. **7**, 639 (2016).
23. P. G. Siddheshwar, V. Ramchandramurthy, and D. Uma, in *Proceedings 37th National and 4th Int. Conf. Fluid Mechs. Fluid Power*, December 16–18, 2010, IIT Madras, Chennai, FMFP10-AM08 (2010).
24. B. S. Bhadauria, P. G. Siddheshwar, Jogendra Kumar et al., Trans. Porous Med. **92**, 633 (2012).
25. P. G. Siddheshwar, B. S. Bhadauria, P. Mishra et al., Int. J. Non-Linear Mech. **47**, 418 (2012).
26. B. S. Bhadauria and P. Kiran, Int. J. Eng. Math. **2014**, Article ID 296216 (2014).
27. B. S. Bhadauria and P. Kiran, Transp. Porous Media **100**, 279 (2013).
28. B. S. Bhadauria and P. Kiran, Phys. Scr. **89**, 095209 (2014).
29. S. Aniss, M. Belhaq, and M. Souhar, ASME J. Heat Transfer **123**, 428 (2001).
30. А. Н. Мордвинов, Б. Л. Смородин, ЖТФ **81**(5), 89 (2011).
31. А. В. Беляев, Б. Л. Смородин, ПМТФ **50**(4), 18 (2009).
32. А. В. Беляев, Б. Л. Смородин, ЖТФ **34**(5), 79 (2008).
33. Б. И. Мызникова, Б. Л. Смородин, ЖЭТФ **128**, 1299 (2005).
34. Б. И. Мызникова, Б. Л. Смородин, ЖЭТФ **139**, 597 (2011).
35. B. L. Smorodin and M. Lücke, Phys. Rev. E **79**, 026315 (2009).
36. B. L. Smorodin, B. I. Myznikova, and J. C. Legros, Phys. Fluids **20**, 094102 (2008).
37. E. R. Priest, *Solar Magnetohydrodynamics*, Springer, Netherland (1984).
38. C. C. Finlay, Les Houches **88**, 403 (2008).
39. Palle Kiran and B. S. Bhadauria, J. Heat Transfer **138**, 051702 (2016).
40. S. Chandrasekhar, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **42**, 273 (1956).
41. Е. П. Велихов, ЖЭТФ **36**, 1398 (1959).
42. S. A. Balbus and J. F. Hawley, Astrophys. J. **376**, 214 (1991).
43. C. Nipoti and L. Posti, arXiv:1206.3890v2.
44. В. П. Лахин, В. И. Ильгисонис, ЖЭТФ **137**, 783 (2010).
45. O. N. Kirillov and F. Stefani, Proc. Int. Astronom. Union **8**, 233 (2012).
46. O. N. Kirillov, F. Stefani, and Y. Fukumoto, J. Fluid Mech. **760**, 591 (2014).
47. G. Rüdiger, R. Hollerbach, and L. L. Kitchatinov, *Magnetic Processes in Astrophysics: Theory, Simulations, Experiment*, Wiley, New York (2013).
48. М. И. Копп, А. В. Тур, В. В. Яновский, ЖЭТФ **154**, 1281 (2018).
49. М. И. Копп, А. В. Тур, В. В. Яновский, Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ) **4**(116), 230 (2018).
50. P. Vadasz and S. Olek, Int. J. Heat Mass Transfer **41**, 1417 (1999).
51. V. K. Gupta, B. S. Bhadauria, I. Hasim et al., Alexandria Engin. J. **54**, 981 (2015).
52. V. K. Gupta, R. Prasad, and A. K. Singh, Int. J. Energy and Technology **5**(28), 1 (2013).
53. V. K. Gupta and A. K. Singh, Int. J. Energy and Technology **5**(27), 1 (2013).
54. Rajendra Prasad and A. K. Singh, Int. J. Appl. Math. and Informatics **7**(3), 87 (2013).
55. J. M. Jawdat and I. Hashim, Int. J. Adv. Sci. Eng. Inform. Technol. **2**, 346 (2012).
56. R. Prasad and A. K. Singh, J. Appl. Fluid Mech. **9**, 2887 (2016).
57. P. Goldreich and D. Lynden-Bell, Mon. Not. Roy Astron. Soc. **130**, 125 (1965).
58. E. Knobloch and K. Jullien, Phys. Fluids **17**, 094106 (2005).
59. M. Kopp, A. Tur, and V. Yanovsky, East Eur. J. Phys. **1**, 4 (2019).
60. R. Haberman, *Elementary Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Prentice-Hall, Inc. (2004).

- 61.** M. C. Kim, S. B. Lee, S. Kim et al., *Int. J. Heat Mass Transfer* **46**, 5065 (2003).
- 62.** P. Kiran, S. H. Manjula, and Y. Narasimhulu, *J. Emerging Technol. and Innovative Res.* **5**(8), 227 (2018).
- 63.** P. Kiran, S. H. Manjula, and Y. Narasimhulu, *Int. J. Appl. Mech. and Engin.* **23**, 1 (2018).
- 64.** P. Kiran, *Int. J. Appl. and Comput. Math.* **3**, 1969 (2017).
- 65.** B. S. Bhadauria, A. Singhb, M. K. Singh et al., *Asia Pacific J. Engin. Sci. and Technol.* **2**(2), 1 (2016).
- 66.** B. S. Bhadauria, M. K. Singh, B. K. Singh et al., *Int. J. Appl. Mech. and Engin.* **21**(4), 785 (2016).
- 67.** Yu. L. Bolotin, A. V. Tur, and V. V. Yanovsky, *Chaos: Concepts, Control and Constructive Use*, Series: Understanding Complex Systems, Shpringer (2016).
- 68.** М. И. Рабинович, Д. И. Трубецков, *Введение в теорию колебаний и волн*, Регулярная и хаотическая динамика, Москва (2000).
- 69.** E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* **20**, 130 (1963).