

ВОЛНЫ НАД ИСКРИВЛЕННЫМ ДНОМ: МЕТОД СОСТАВНОГО КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

*В. П. Рубан**

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 19 декабря 2019 г.,
после переработки 19 декабря 2019 г.
Принята к публикации 23 декабря 2019 г.

Описан компактный и эффективный численный метод исследования плоских течений идеальной жидкости с гладкой свободной границей над искривленным и неоднородно подвижным дном. Используются точные уравнения движения в терминах так называемых конформных переменных. В дополнение к ранее известному применению для сдвиговых течений с постоянной завихренностью (включая нулевую), здесь сделано обобщение на случай потенциальных течений в равномерно вращающихся системах координат, где к силе тяжести добавляются центробежная сила и сила Кориолиса. Дан краткий обзор предыдущих результатов использования данного подхода в ряде физически интересных задач, таких как моделирование волн цунами, обусловленных подвижкой неоднородного дна, динамика брэгговских (щелевых) солитонов над пространственно-периодическим профилем дна, явление возврата Ферми–Па́ста–Улама для волн в конечном бассейне, образование аномальных волн на встречном неоднородном течении, распространение уединенной волны на сдвиговом течении и ее набегание на перепад глубин. Кроме того, представлен ряд новых численных результатов, относящихся к нелинейной динамике свободной границы в частично заполненных жидкостью замкнутых вращающихся контейнерах — центрифугах сложной формы. Уравнения движения в этом случае отличаются некоторыми существенными деталями от x -периодических систем.

DOI: 10.31857/S0044451020050168

1. ВВЕДЕНИЕ

В некоторых разделах гидродинамики приближение идеальной несжимаемой жидкости оказывается достаточно приемлемым. В частности, сюда относится теория поверхностных волн на воде. Описание течений существенно упрощается, если считать их потенциальными. К тому же, поскольку в пространственно-двумерном случае уравнение Лапласа для потенциала поля скорости конформно инвариантно, а речь идет об областях с кривыми границами, на помощь приходит теория конформных отображений и соответствующих аналитических функций. Поэтому неудивительно, что идея использовать конформные отображения для точного представления уравнений нелинейной динамики потенциальных поверхностных волн возникла достаточно давно (в работах Овсянникова [1, 2]). Долгое время эти уравнения оставались невостребованными, и

о них мало кто знал. Только с развитием и массовым распространением вычислительной техники в 90-е гг. прошлого века и с эффективным практическим воплощением алгоритмов быстрого дискретного преобразования Фурье, уравнения движения свободной поверхности в конформных переменных были заново открыты Захаровым и его сотрудниками [3–6], став затем рабочим инструментом для многих исследователей (см. [7–34] и многочисленные ссылки там). Главным образом, моделируются волны на бесконечно глубокой воде, для которых за два десятка лет получены важнейшие результаты, включая пионерские наблюдения аномальных волн (так называемых волн-убийц) в высокоточных численных экспериментах группы Захарова [7–10]. Но существует ряд интересных задач, в которых принципиально важными являются эффекты взаимодействия волн с неоднородным профилем дна. С целью их исследования метод конформных переменных был обобщен в 2004 г. автором данной статьи на случай искривленного неподвижного дна [35]. Вол-

* E-mail: ruban@itp.ac.ru

ны над подвижным дном были затем рассмотрены в работе [36], а сдвиговые течения со свободной границей над переменной глубиной были промоделированы методом конформного отображения в работе [37]. Динамическими объектами в этом описании являются потенциальная составляющая поля скорости и конформное отображение горизонтальной полосы $0 \leq v \leq 1$ из вспомогательной комплексной плоскости $w = u + iv$ на подвижную область в вертикальной плоскости $z = x + iy$, занятую жидкостью. Конформное отображение $z(w, t) = Z(\zeta(w, t), t)$ представимо в виде композиции двух аналитических функций — неизвестной $\zeta(w, t)$ и заданной $Z(\zeta, t)$, причем первая из них оставляет действительную ось на месте (т. е. $\text{Im } \zeta(u, t) = 0$), а вторая задает параметрически форму дна $X^{(b)}(s, t) + iY^{(b)}(s, t) = Z(s, t)$. В результате для параметризации формы свободной границы достаточно одной неизвестной вещественной функции $a(u, t) = \text{Re } \zeta(u + i, t)$. Комплексный потенциал скорости с учетом кинематического условия на нижней границе также зависит от одной неизвестной вещественной функции $\psi(u, t)$. Из обобщенного уравнения Бернулли и кинематического условия на верхней (свободной) границе следуют уравнения движения для $a(u, t)$ и $\psi(u, t)$. Уравнения содержат линейные операторы, диагональные в фурье-представлении, так что псевдоспектральный численный метод с использованием быстрого преобразования Фурье оказывается наиболее естественным и удобным.

За прошедшее с тех пор время был получен еще ряд результатов, которые подтвердили практическую пользу и высокую эффективность метода. В частности, были исследованы: динамика брэгговских (щелевых) солитонов над пространственно-периодическим профилем дна [38, 39]; явление возврата Ферми – Паста – Улама для волн в конечном бассейне [40, 41]; формирование аномальных волн на встречном неоднородном течении [42]. Цель предлагаемой работы — сделать краткий обзор на эту тему, а также представить некоторые новые результаты для ранее не обсуждавшейся в связи с конформными переменными классической задачи о динамике свободной поверхности в частично заполненных замкнутых вращающихся контейнерах (см., например, [43–45] и ссылки там). Практически речь может идти о квазидвумерных центрифугах (неправильной формы цилиндрах с характерным поперечным размером R и длиной $h \ll R$, либо о круглых эксцентрических), которые вращаются вокруг горизонтальной оси (ось параллельна образующим) и возможно подвержены угловому и/или линейному

ускорениям, а также деформациям формы поперечного сечения. При достаточно больших скоростях вращения $\Omega \gg \nu/h^2$ (где ν — кинематическая вязкость) вязкие эффекты становятся незначительными на временах порядка нескольких десятков Ω^{-1} , что соответствует многим оборотам. Весьма важно, что течение жидкости при этом вовсе не потенциально, а близко к твердотельному вращению с угловой скоростью Ω . Поэтому естественным шагом оказывается переход во вращающуюся систему координат, где, как известно, к силе тяжести добавляются центробежная сила и сила Кориолиса. Возмущения (бездивергентного) поля скорости под воздействием ускорений и деформаций контейнера оказываются чисто потенциальными, так что имеет место обобщенное уравнение Бернулли, в котором отдельным слагаемым фигурирует гармонически сопряженная к потенциалу функция тока (из-за силы Кориолиса). Надо сказать, что даже относительно более простая задача о нелинейных волнах в круглом соосном контейнере и при отсутствии силы тяжести исследована мало, хотя является весьма изящной и содержательной, не говоря уже о полном варианте с некруглыми деформируемыми контейнерами и их ускорениями. Поэтому применение конформных переменных здесь выглядит очень перспективным.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разд. 2 дается достаточно подробное описание используемого метода, включая вывод точных уравнений движения и обсуждение численной схемы. В разд. 3 кратко обсуждаются наиболее интересные предыдущие результаты, полученные автором путем использования составного конформного отображения. Раздел 4 посвящен новому применению конформных переменных для описания поверхностных волн во вращающихся системах. Наконец, разд. 5 содержит краткое заключение.

2. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

2.1. Точные уравнения движения

Вывод точных и явных уравнений движения свободной границы сделаем для случая волн в центрифугах, поскольку бесконечные вдоль x системы во многом аналогичны и были подробно рассмотрены в цитированных выше работах [35–37].

Как известно, уравнение Эйлера для плоских течений идеальной несжимаемой жидкости во вращающейся (против часовой стрелки) системе координат содержит дополнительные силы (покомпонентно) $(\Omega^2 x, \Omega^2 y) + (2\Omega V^{(y)}, -2\Omega V^{(x)})$ и допускает редукцию $\mathbf{V} = (V^{(x)}, V^{(y)}) = (\varphi_x, \varphi_y) = (\theta_y, -\theta_x)$, где

нижние индексы обозначают частные производные, функция $\varphi(x, y, t)$ представляет собой потенциал поля скорости, а $\theta(x, y, t)$ — соответствующую гармонически сопряженную функцию тока. Обобщенное уравнение Эйлера поэтому имеет вид

$$\varphi_t + (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)/2 - \Omega^2(x^2 + y^2)/2 + 2\Omega\theta + g(t)(y \cos \Omega t + x \sin \Omega t) + \tilde{P} = 0, \quad (1)$$

где \tilde{P} — давление, деленное на плотность жидкости. Эффективное поле тяжести $g(t)$ зависит от времени, если ось вращения испытывает вертикальные ускорения.

Пусть область течения в каждый момент времени представляет собой деформированный круг с одной «дырой» — свободной поверхностью. Рассмотрим скалярную функцию $v(x, y, t)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $v_{xx} + v_{yy} = 0$ и принимающую фиксированные граничные значения: $v = 0$ на внешней границе области (т. е. на стенке контейнера — дне), и $v = 1$ на свободной (внутренней) границе. Такая функция существует и единственна. Построим теперь гармонически сопряженную к ней функцию $u(x, y, t)$. Эта функция многозначна (и определена с точностью до аддитивной константы). Ее приращение $L(t)$ при обходе вдоль свободной поверхности (конформный модуль) зависит, вообще говоря, от времени. Составим комплексную комбинацию $w = u + iv$, которая является аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$. Ясно, что такая криволинейная замена координат соответствует конформному отображению $z(w, t)$ прямоугольника с размерами $L \times 1$, причем переменная v является аналогом радиальной координаты, а переменная u — аналогом угловой координаты.

Форма свободной границы теперь будет задана параметрически формулой

$$X^{(s)}(u, t) + iY^{(s)}(u, t) \equiv Z^{(s)}(u, t) = z(u + i, t), \quad (2)$$

тогда как профиль дна — формулой

$$X^{(b)}(u, t) + iY^{(b)}(u, t) \equiv Z^{(b)}(u, t) = z(u, t). \quad (3)$$

Весьма важно, что комплексный потенциал $\varphi(u, v, t) + i\theta(u, v, t) = \phi(w, t)$ представляет собой аналитическую функцию. Обозначим граничные значения этой функции следующим образом:

$$\phi(u + i, t) \equiv \Phi^{(s)}(u, t), \quad \phi(u, t) \equiv \Phi^{(b)}(u, t). \quad (4)$$

Поскольку $\Phi^{(s)}(u, t)$ и $\Phi^{(b)}(u, t)$ являются значениями одной и той же аналитической функции в точках

u и $u + i$, они связаны между собой линейным преобразованием (см. [36])

$$\Phi^{(s)}(u, t) = e^{-\hat{k}} \Phi^{(b)}(u, t), \quad (5)$$

где $e^{-\hat{k}} \equiv \exp(i\hat{\partial}_u)$. Это означает соотношение $\Phi_k^{(s)}(t) = e^{-k} \Phi_k^{(b)}(t)$ для соответствующих фурье-образов. Для дальнейшего изложения нам потребуются еще несколько линейных операторов. Эти операторы \hat{S} , \hat{R} , и $\hat{T} = \hat{R}^{-1}$ также диагональны в фурье-представлении:

$$S_k = 1/\text{ch}(k), \quad R_k = i \text{th}(k), \quad T_k = -i \text{cth}(k). \quad (6)$$

Важно, что в результате действия любого из этих операторов на действительную функцию получается также чисто действительная функция.

Уравнение (1), переписанное в новых переменных, на свободной границе имеет вид (динамическое граничное условие)

$$\begin{aligned} \text{Re} \left(\Phi_t^{(s)} - \Phi_u^{(s)} Z_t^{(s)} / Z_u^{(s)} \right) + |\Phi_u^{(s)} / Z_u^{(s)}|^2 / 2 - \\ - \Omega^2 |Z^{(s)}|^2 / 2 + 2\Omega \text{Im} \Phi^{(s)} + \\ + g(t) \text{Im}[Z^{(s)} \exp(i\Omega t)] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

К нему добавляются два кинематических граничных условия:

$$\text{Im} \left(Z_t^{(s)} \bar{Z}_u^{(s)} \right) = -\text{Im} \Phi_u^{(s)}, \quad (8)$$

$$\text{Im} \left(Z_t^{(b)} \bar{Z}_u^{(b)} \right) = -\text{Im} \Phi_u^{(b)}, \quad (9)$$

где \bar{Z} означает комплексно-сопряженную величину. Для нас будет удобно представить $\Phi^{(b)}(u, t)$ в виде

$$\Phi^{(b)}(u, t) = \hat{S}\psi(u, t) - i(1 - i\hat{R})\hat{\partial}_u^{-1} f(u, t), \quad (10)$$

где $\psi(u, t)$ и $f(u, t)$ — некоторые неизвестные действительные функции. Тогда, благодаря соотношению (5) и операторным равенствам

$$e^{-\hat{k}} \hat{S} = (1 + i\hat{R}), \quad e^{-\hat{k}}(1 - i\hat{R}) = \hat{S}, \quad (11)$$

для $\Phi^{(s)}(u, t)$ мы будем иметь формулу

$$\Phi^{(s)}(u, t) = (1 + i\hat{R})\psi(u, t) - i\hat{S}\hat{\partial}_u^{-1} f(u, t). \quad (12)$$

Далее мы используем в уравнениях функцию

$$\Psi(u, t) \equiv (1 + i\hat{R})\psi(u, t). \quad (13)$$

Теперь необходимо принять во внимание, что функция $z(w, t)$ может быть представлена как композиция двух функций (см. [35, 36]), т. е. $z(w, t) = Z(\zeta(w, t), t)$, где известная аналитическая функция $Z(\zeta, t) = X(\zeta, t) + iY(\zeta, t)$ определяет форму

дна отображением действительной оси. Конформное отображение $Z(\zeta, t)$ не должно иметь особенностей в пределах достаточно широкой горизонтальной полосы над действительной осью в плоскости ζ , чтобы было «достаточно места» для волн большой амплитуды в плоскости z (в частном случае у $Z(\zeta, t)$ могут отсутствовать особенности во всей верхней полуплоскости ζ). Разложение конформного отображения $z(w, t)$ в композицию не единственно, поскольку если $Z(\zeta, t) = Z_1(\beta(\zeta, t), t)$, где аналитическая функция $\beta(\zeta, t)$ оставляет действительную ось на месте и не имеет особенностей слишком близко от нее, то

$$Z(\zeta(w, t), t) = Z_1(\beta(\zeta(w, t), t), t) = Z_1(\zeta_1(w, t), t).$$

Промежуточная аналитическая функция $\zeta(w, t)$ принимает действительные значения на действительной оси, и поэтому справедливо равенство

$$\zeta(w, t) = \int \frac{a_k(t)}{\text{ch}(k)} e^{ikw} \frac{dk}{2\pi}, \quad a_{-k} = \bar{a}_k, \quad (14)$$

где $a_k(t)$ есть фурье-преобразование некоторой действительной функции $a(u, t)$. На дне $\zeta(u, t) = \hat{S}a(u, t)$ и потому

$$Z^{(b)}(u, t) = Z(\hat{S}a(u, t), t). \quad (15)$$

На свободной поверхности мы имеем соотношения

$$\zeta(u + i, t) \equiv \xi(u, t) = (1 + i\hat{R})a(u, t), \quad (16)$$

$$Z^{(s)} = Z(\xi, t), \quad Z_u^{(s)} = Z_\xi(\xi, t)\xi_u, \quad (17)$$

$$Z_t^{(s)} = Z_\xi(\xi, t)\xi_t + Z_t(\xi, t). \quad (18)$$

Поскольку нашей целью является вывести уравнения движения для неизвестных функций $\psi(u, t)$, $f(u, t)$ и $\xi(u, t)$, нам следует подставить выражения (10), (12), (15), (16), (17) и (18) в уравнения (7), (8) и (9). Уравнение (9) не требует никаких усилий и сразу же дает явное соотношение

$$f = \text{Im} \left(Z_t(s, t) \bar{Z}_s(s, t) \hat{S}a_u \right) \Big|_{s=\hat{S}a}, \quad a = \text{Re} \xi. \quad (19)$$

Уравнение (8), деленное на $|Z_u^{(s)}|^2$, принимает вид

$$\text{Im} \left(\frac{\xi_t}{\xi_u} \right) + \text{Im} \left(\frac{Z_t(\xi, t)}{Z_\xi(\xi, t)\xi_u} \right) = \frac{-\text{Im} \Psi_u + \hat{S}f}{|Z_\xi(\xi, t)\xi_u|^2}. \quad (20)$$

Таким образом, мы имеем $\text{Im}(\xi_t/\xi_u) = -Q$, где

$$Q \equiv \frac{\text{Im} \Psi_u - \hat{S}f}{|Z_\xi(\xi, t)\xi_u|^2} + \text{Im} \left(\frac{Z_t(\xi, t)}{Z_\xi(\xi, t)\xi_u} \right). \quad (21)$$

Далее рассуждаем так: поскольку

$$\xi_t/\xi_u = \zeta_t(w, t)/\zeta_w(w, t)|_{w=u+i}$$

представляет собой взятое на $u + i$ значение аналитической функции, которая действительна на действительной оси, то имеет место соотношение между действительными и мнимыми частями: $\text{Im}(\xi_t/\xi_u) = \hat{R} \text{Re}(\xi_t/\xi_u)$, так что $\text{Im}(\xi_t/\xi_u) = -Q$ означает $\xi_t = -\xi_u(\hat{T} + i)Q$. Это дает нам уравнение, определяющее a_t :

$$a_t = -\text{Re}[\xi_u(\hat{T} + i)Q]. \quad (22)$$

Теперь мы подставляем нужные выражения в уравнение (7), для того чтобы найти ψ_t . Простые преобразования приводят к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \psi_t = & -\text{Re}[\Psi_u(\hat{T} + i)Q] + \text{Re} \left(\frac{\Psi_u Z_t(\xi, t)}{Z_\xi(\xi, t)\xi_u} \right) - \\ & - \frac{|\Psi_u|^2 - (\hat{S}f)^2}{2|Z_\xi(\xi, t)\xi_u|^2} - g(t) \text{Im}[Z(\xi, t) \exp(i\Omega t)] + \\ & + \frac{\Omega^2}{2} |Z(\xi, t)|^2 - 2\Omega(\text{Im} \Psi - \hat{S}\hat{\partial}_u^{-1}f). \quad (23) \end{aligned}$$

Таким образом, выведены точные уравнения движения для волн на свободной поверхности идеальной жидкости в центрифугах. Что касается сдвиговых течений в бесконечных вдоль x системах, то для них все делается аналогично, но используется другое обобщенное уравнение Бернулли (см. [37]).

2.2. Численное моделирование

Для практического применения системы (19), (21), (22) и (23) в численном моделировании следует принять во внимание два существенных обстоятельства, обсуждаемые ниже.

Во-первых, период L по переменной u (ранее упоминавшийся конформный модуль отображения) зависит от времени в силу сингулярности оператора $\hat{T} \approx 1/(ik) = \hat{\partial}_u^{-1}$ на малых k , что приводит к наличию непериодической по u составляющей $-a_u \langle Q \rangle u$ в правой части уравнения (22) и аналогичной составляющей $-\psi_u \langle Q \rangle u$ в правой части уравнения (23), где $\langle Q \rangle$ — среднее значение величины Q по периоду L . Поэтому вместо переменной u более удобно использовать новую переменную $\vartheta = [2\pi/L(t)]u$, для которой период фиксирован и равен 2π . При этом уравнение движения для величины $\alpha(t) = 2\pi/L(t)$ получается исходя из требования, чтобы при подстановке в уравнения (22) и (23) непериодические по ϑ члены $\dot{\alpha}u\alpha_\vartheta$ и $\dot{\alpha}u\psi_\vartheta$ в левых частях сокращались

с соответствующими непериодическими составляющими в правых частях. Очевидно, что сокращение происходит при $\dot{\alpha} = -\alpha \langle Q \rangle$.

Во-вторых, если среднее по периоду значение величины f отлично от нуля (что неизбежно имеет место при деформации стенок центрифуги с изменением площади \mathcal{A}_c ее поперечного сечения), то в системе появляется дополнительное потенциальное круговое течение с циркуляцией $\Gamma(t)$, так что $\langle \psi_\vartheta \rangle = \Gamma/2\pi$, а сам потенциал оказывается многозначной функцией. Полезно иметь в виду, что в силу сохранения циркуляции скорости вдоль свободной границы в лабораторной системе координат, имеет место интеграл движения $\Gamma(t) + 2\Omega \mathcal{A}_c(t) = \text{const}$. Данный закон сохранения следует обязательно проверять при отладке численного кода.

Таким образом, можно отделить в $a(\vartheta, t)$ фиксированную непериодическую часть, написав $a(\vartheta, t) = \vartheta + \rho(\vartheta, t)$, где $\rho(\vartheta, t)$ — 2π -периодическая функция:

$$\rho(\vartheta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \rho_m(t) \exp(im\vartheta). \quad (24)$$

Аналогично для производной ψ_ϑ имеем

$$\psi_\vartheta(\vartheta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} D_m(t) \exp(im\vartheta), \quad (25)$$

причем $D_0 = \Gamma/2\pi$, $\rho_{-m} = \bar{\rho}_{-m}$, $D_{-m} = \bar{D}_{-m}$. При этом формулы для соответствующих аналитических функций на свободной границе имеют вид

$$\xi(\vartheta, t) = \vartheta + i\alpha(t) + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2\rho_m(t) \exp(im\vartheta)}{1 + \exp(2m\alpha(t))}, \quad (26)$$

$$\Psi_\vartheta(\vartheta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{2D_m(t) \exp(im\vartheta)}{1 + \exp(2m\alpha(t))}. \quad (27)$$

С учетом сделанных выше замечаний, уравнения движения для функций ρ и ψ_ϑ в переменных (ϑ, t) выглядят аналогично уравнениям (22) и (23), но все u -производные должны быть заменены ϑ -производными, а прежние операторы \hat{R} , \hat{S} , и \hat{T} должны быть всюду заменены новыми операторами соответственно \hat{R}_α , \hat{S}_α , и \hat{T}_α :

$$\rho_t = -\text{Re}[\xi_\vartheta(\hat{T}_\alpha + i)Q], \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\vartheta t} = & \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left\{ \text{Re} \left(\frac{\Psi_\vartheta Z_t(\xi, t)}{Z_\xi(\xi, t)\xi_\vartheta} \right) - \text{Re}[\Psi_\vartheta(\hat{T}_\alpha + i)Q] - \right. \\ & - \frac{|\Psi_\vartheta|^2 - (\hat{S}F)^2}{2|Z_\xi(\xi, t)\xi_\vartheta|^2} - g(t) \text{Im}[Z(\xi, t) \exp(i\Omega t)] + \\ & \left. + \frac{\Omega^2}{2}|Z(\xi, t)|^2 \right\} - 2\Omega(\text{Im} \Psi_\vartheta - \hat{S}F), \quad (29) \end{aligned}$$

где $\xi = \vartheta + i\alpha + (1 + i\hat{R}_\alpha)\rho$, $\Psi_\vartheta = (1 + i\hat{R}_\alpha)\psi_\vartheta$,

$$F = \text{Im} \left(Z_t(s, t)\bar{Z}_s(s, t)(1 + \hat{S}\rho_\vartheta) \right) \Big|_{s=\vartheta+\hat{S}\rho}, \quad (30)$$

$$Q = \frac{\text{Im} \Psi_\vartheta - \hat{S}F}{|Z_\xi(\xi, t)\xi_\vartheta|^2} + \text{Im} \left(\frac{Z_t(\xi, t)}{Z_\xi(\xi, t)\xi_\vartheta} \right). \quad (31)$$

Эти новые операторы диагональны в дискретном фурье-представлении:

$$R_\alpha(m) = i \text{th}(\alpha m), \quad S_\alpha(m) = 1/\text{ch}(\alpha m),$$

$$T_\alpha(m) = -i \text{cth}(\alpha m)$$

для $m \neq 0$, тогда как $T_\alpha(0) = 0$. Заметим, что оператор \hat{T}_α не имеет особенностей. Система замыкается следующим условием для $\dot{\alpha}(t)$, которое обеспечивает сокращение непериодических членов в уравнениях (22) и (23):

$$\dot{\alpha}(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q(\vartheta) d\vartheta. \quad (32)$$

У данной системы уравнений имеется интеграл движения, соответствующий сохранению площади, занятой жидкостью (площадь центрифуги \mathcal{A}_c минус площадь полости \mathcal{A}_h),

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \frac{1}{2} \oint \left(X^{(b)} dY^{(b)} - Y^{(b)} dX^{(b)} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \oint \left(X^{(s)} dY^{(s)} - Y^{(s)} dX^{(s)} \right). \quad (33) \end{aligned}$$

Кроме того, если контейнер вращается равномерно с некоторой угловой скоростью $\Omega + \Delta$ без изменения своей формы, т.е. $Z(\zeta, t) = \exp(i\Delta t)Z(\zeta)$, то при $g = 0$ сохраняется сумма кинетической и центробежной энергий в соответствующей системе координат (завихренность жидкости в лабораторной системе при этом по-прежнему предполагается равной 2Ω). Если обозначить $X + iY = Z^{(s)} \exp(-i\Delta t)$ и $X_b + iY_b = Z^{(b)} \exp(-i\Delta t)$, то сохраняющаяся энергия есть

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\Delta = & \frac{1}{8}(\Omega^2 + 2\Omega\Delta) \oint (X^2 + Y^2)(X dY - Y dX) + \\ & + \frac{\Delta^2}{8} \oint (X_b^2 + Y_b^2) \hat{R}_\alpha (X_b^2 + Y_b^2)_\vartheta d\vartheta + \\ & + \frac{\Delta}{2} \oint [X^2 + Y^2] \psi_\vartheta d\vartheta - \frac{\Delta}{2} \oint [X_b^2 + Y_b^2] \hat{S} \psi_\vartheta d\vartheta - \\ & - \frac{1}{2} \oint \left(\psi - \frac{\Gamma\vartheta}{2\pi} \right) \hat{R}_\alpha \psi_\vartheta d\vartheta + \frac{\Gamma^2 \alpha}{4\pi}. \quad (34) \end{aligned}$$

Если же $\Delta = -\Omega$ и $g = \text{const}$ (контейнер неподвижен в лабораторной системе координат), то сохраняется сумма кинетической энергии и потенциальной энергии в поле тяжести:

$$\mathcal{E}_{-\Omega} + \frac{g}{2} \oint Y^2 dX = \text{const}.$$

При тестировании компьютерной программы все эти законы сохранения также должны проверяться. Иначе, как показала практика вычислений, можно допустить такую ошибку, которая проявляется не во всех случаях и поэтому может остаться незамеченной.

Уравнения (28)–(32) очень удобны и легки для численного моделирования, если функция $Z(\zeta, t)$ дается достаточно компактной явной формулой, как это имеет место для многих практически интересных профилей дна. Кроме того, в языке программирования C имеется тип данных `complex`, а в математической библиотеке присутствуют элементарные функции комплексной переменной, такие как `sexpr`, `slog` и др., что делает процесс написания кода довольно простым и приятным делом. Созданная автором численная схема естественным образом опирается на дискретное преобразование Фурье, поскольку все линейные операторы в уравнениях могут быть эффективно вычислены в m -представлении с помощью современного программного обеспечения (фактически используется библиотека FFTW [46]), тогда как все нелинейные операции локальны в ϑ -представлении. В качестве основных динамических переменных берутся величины $\alpha(t)$, $\rho_m(t)$ и $D_m(t)$, с $0 \leq m < M$ (для отрицательных m учитываются соотношения $\rho_{-m} = \bar{\rho}_m$ и $D_{-m} = \bar{D}_m$). С целью обеспечения устойчивости численной схемы при больших m , после каждой процедуры Рунге–Кутты четвертого порядка оставляются только спектральные компоненты с $|m| < M_{eff}$, где $M_{eff} \approx (1/4)N$, $M \approx (3/8)N$, а $N = 2^{12 \dots 19}$ есть размер массивов для быстрого фурье-преобразования. В течение каждого численного эксперимента число N удваивается несколько раз по мере надобности, если формируются мелкомас-

штабные волновые структуры на свободной поверхности. Как результат такого адаптивного увеличения N , правые части эволюционных уравнений могут быть вычислены с примерно одинаковой численной ошибкой $\delta_0 < N10^{-18}$, соответствующей типу `complex`. Поскольку шаг интегрирования по времени уменьшается при этом как $\tau \sim 1/N$, погрешность в вычислении позиции свободной поверхности при $t \sim 1$ можно оценить как $\delta_s \lesssim N^2 10^{-18}$. Практически, интегралы движения сохраняются с точностью до 10–12 десятичных знаков на протяжении большей части эволюции. На конечной стадии, чем большее число N_{final} используется, тем позднее наступает момент, когда высокая точность теряется.

В конце этого раздела нужно сказать несколько слов о том, как можно задать начальную конфигурацию свободной поверхности в конформных переменных, если известна ее зависимость, например, в полярных координатах (r, χ) в виде явного выражения $r = r(\chi)$. Для этого следует положить $\rho = 0$ и подобрать значение α_0 так, чтобы объем полости соответствовал функции $r(\chi)$. Затем нужно формальным образом временно убрать из обобщенного уравнения Бернулли силу Кориолиса и видоизменить при этом потенциал центробежной силы:

$$\Omega^2 |Z^{(s)}|^2 / 2 \rightarrow \Omega^2 (|Z^{(s)}|^2 - r^2(\chi)) / 2.$$

Кроме того, следует положить $g = 0$ и добавить в уравнение Бернулли линейное однородное затухание, заменив там $\psi_t \rightarrow (\psi_t + \gamma\psi)$. В результате эволюции такой видоизмененной системы конфигурация свободной границы быстро отрелаксирует к нужной форме, после чего можно будет вернуться к исходным уравнениям и начать счет.

3. КРАТКИЙ ОБЗОР ПРЕДЫДУЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Первые численные примеры, приведенные в работах [35–37], ставили своей главной целью, скорее, продемонстрировать применимость метода к описанию динамики очень крутых (и даже опрокидывающихся) волновых профилей над неоднородным дном, нежели проверить какие-либо теоретические предсказания. Типичная постановка численных экспериментов — это задать начальную уединенную волну над относительно глубоким дном (или создать небольшую группу волн в результате подвижки дна, моделируя тем самым явление цунами), а затем наблюдать за ее эволюцией при набегании на более мелкий участок. Как и следовало ожидать исходя

из повседневного опыта, при выходе на мелководье волна увеличивала свою амплитуду и опрокидывалась. В некоторых симуляциях попутно наблюдалось формирование заблокированных волн на тех местах, где крупномасштабное течение переходило с меньшей глубины на большую.

Более нетривиальное явление при взаимодействии волн с неоднородным дном — так называемые брэгговские (или щелевые) солитоны. Если в пространственно-одномерной волновой системе (а таковой является свободная граница над двумерным течением) волны взаимодействуют с периодической структурой, то частотный спектр линейных волн делится на зоны, между которыми появляются щели. Если учесть нелинейность, то в некоторых случаях оказываются возможными долгоживущие локализованные структуры в виде солитонов огибающей для стоячих волн. При этом частота солитона оказывается в пределах щели. Применительно к волнам над периодическими профилями дна (дно имеет период Λ вдоль x , а промодулированная стоячая волна имеет длину 2Λ) такие когерентные структуры были рассмотрены в работах автора [38, 39]. Теоретические предсказания, основанные на известных ранее решениях приближенных модельных уравнений, были успешно подтверждены прямым численным моделированием точных уравнений в рамках обсуждаемого здесь метода. Брэгговские солитоны, заданные в начальный момент аналитической формулой, не разрушались иногда в течение сотен волновых периодов, хотя, конечно же, неучтенные слабонелинейной теорией эффекты давали о себе знать в случае больших амплитуд. В целом это явление выглядит довольно любопытно и парадоксально: локализованная стоячая волна на воде не разбивается с течением времени на две группы волн, бегущих вправо и влево, хотя, казалось бы, поверхность свободна и этому ничто не мешает. Весьма существенно, что наиболее благоприятный режим для наблюдения таких щелевых солитонов получается при очень сильных неоднородностях дна (по сути, это «гребенка» из узких и высоких барьеров), которые едва ли могут быть столь же адекватно и легко обработаны другими методами.

Другой пример парадоксальной нелинейной динамики — знаменитый возврат Ферми–Паста–Улама (ФПУ-возврат), когда начальное состояние волновой системы в виде одной возбужденной пространственной гармоники сперва трансформируется нелинейностью в совокупность солитонов, а затем после долгого периода нетривиальных взаимодействий между ними волновая энергия снова ока-

зывается почти полностью сосредоточенной в исходной гармонике. Применительно к волнам в конечном бассейне данное явление было впервые промоделировано в работах [40, 41]. Хотя дно бассейна в данном случае предполагается горизонтальным, все остальные существенные ингредиенты метода работают в полной мере. Например, без учета временной зависимости конформного модуля высокоточные вычисления были бы невозможны. В этих численных экспериментах в качестве начального условия бралась неподвижная жидкость с вертикальным отклонением свободной границы в виде половины косинусоидальной волны с максимумом на одном конце бассейна (при $x = 0$) и с минимумом — на другом (при $x = L/2$). Далее волновая система эволюционировала по типичному для ФПУ-явления сценарию — несколько медленных колебаний в режиме стоячей волны, затем формирование более коротких когерентных структур — солитонов, их длительная нетривиальная динамика, в течение которой на короткое время появлялись приблизительно стоячие волны с кратными волновыми числами. Затем время как бы поворачивало свой ход вспять, и из менее упорядоченного состояния формировалось более упорядоченное в виде все той же начальной косинусоиды. После нескольких стоячих колебаний процесс приблизительно повторялся. В зависимости от относительной длины бассейна $L/2h$ и начальной амплитуды косинуса A_0/h количество взаимодействующих солитонов и период возврата были существенно различными. Приблизительно время возврата подгоняется формулой

$$T_{FPU}(g/h)^{1/2} \approx C(L/h)^2(h/A_0)^{1/2},$$

где $C = 0.148 + 0.096(A_0/h)$. При этом точность возврата к (почти) неподвижному состоянию была на удивление высокой для не слишком длинных бассейнов $L/h \sim 60\text{--}100$ и не слишком больших амплитуд $A_0/h \sim 0.12\text{--}0.15$.

Кроме того, в работе [41] брались начальные состояния в виде нескольких солитонов и моделировались экстремальные волны над различными профилями дна, включая длинноволновые и коротковолновые неоднородности. В случае начального состояния из нескольких разделенных солитонов над горизонтальным дном качество возврата было в целом значительно хуже, чем для косинуса. Что касается экстремальных волн, то плоское дно и соответствующий квазиинтегрируемый режим динамики не способствовали их появлению. Если же приблизительно интегрируемость была нарушена неоднородностями дна, то система переходила в состояние слу-

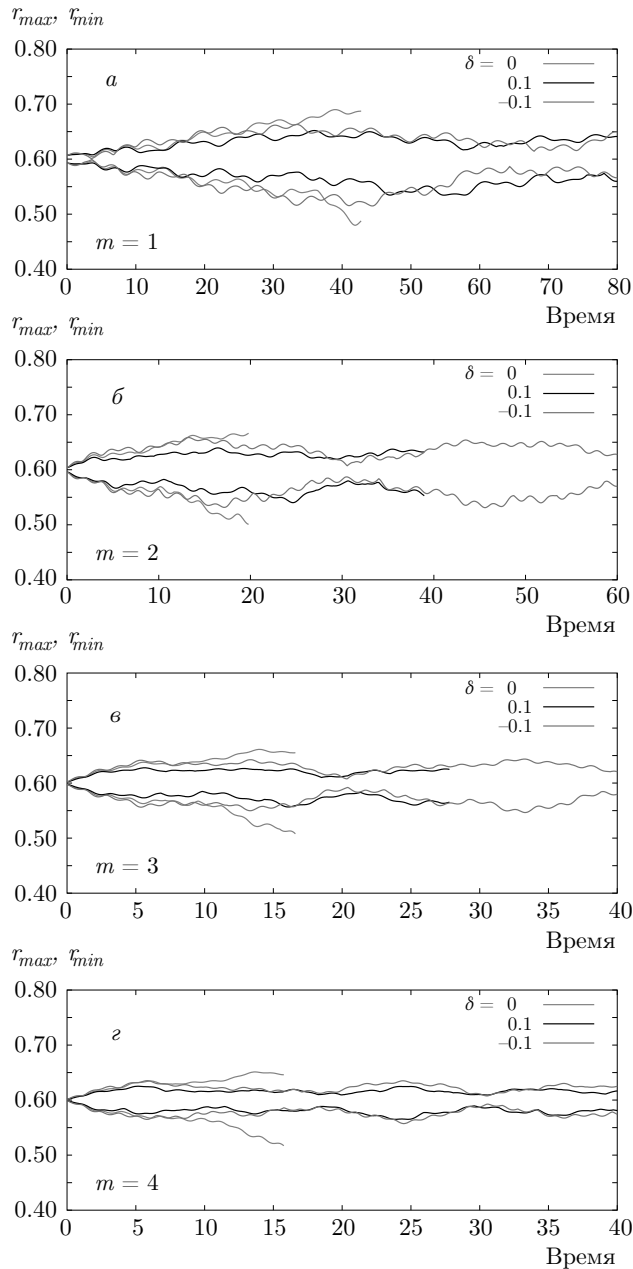


Рис. 1. Временные зависимости максимального и минимального значений радиальной координаты свободной поверхности в слегка нециркулярных центрифугах для различных азимутальных чисел неровности дна m и различных отстроек δ угловой скорости вращения от соответствующих резонансных значений

чайного волнового поля, где присутствовали квазисолитонные когерентные структуры различных амплитуд, причем некоторые из них были значительно сильнее, чем начальные солитоны. Когда наиболее сильные противоположно бегущие солитоны сталкивались, возникали экстремальные волны. Наиболее высокие волны наблюдались над плавным профи-

лем дна, тогда как при относительно коротко-коррелированных неоднородностях дна экстремальные волны были менее высокими, но зато имели более резкий гребень. Похожие эффекты наблюдались как для волн между двумя вертикальными стенками, так и для волн с периодическими граничными условиями без стенок.

Тематика аномальных волн была затронута и в работе [42], но в несколько иной постановке. Аналитические оценки для волн на глубокой воде в присутствии крупномасштабного неоднородного течения показали, что встречное усиливающееся течение делает волну более модуляционно неустойчивой и тем самым способствует формированию аномальных волн. Чтобы пронаблюдать этот эффект в прямом численном эксперименте, автор включил потенциальное течение (аналог Γ) над неоднородным профилем дна и промоделировал относительно короткие бегущие волны. Прямое взаимодействие таких волн с дном пренебрежимо мало, но существенным было присутствие течения — медленно над глубоким дном и более быстрого над мелким дном. В начальный момент времени в области с медленным течением запускался достаточно длинный промодулированный волновой пакет, который затем распространялся против течения. При выходе на сильное встречное течение развивалась модуляционная неустойчивость и образовывались аномальные волны, в соответствии с теорией. Было также отмечено, что если на встречное течение выходит не слабпромодулированный длинный волновой пакет, а квазислучайная последовательность групп волн, то могут возникать гораздо более высокие волны-убийцы, чем предсказывает формула, основанная на решении нелинейного уравнения Шредингера в виде так называемого бризера Ахмедиева. Причина появления более высоких аномальных волн заключается в притягивающем взаимодействии квазисолитонных когерентных структур, в которые превращаются типичные волновые группы при выходе на быстрое встречное течение, тогда как бризер Ахмедиева и основанная на нем формула не учитывают возможных процессов слияния квазисолитонов.

4. НОВОЕ ПРИМЕНЕНИЕ: ВОЛНЫ В ЦЕНТРИФУГАХ

Прежде чем перейти к новым численным результатам, рассмотрим линеаризованные уравнения движения для поверхностных волн в частично заполненной, идеально круглой центрифуге (единич-

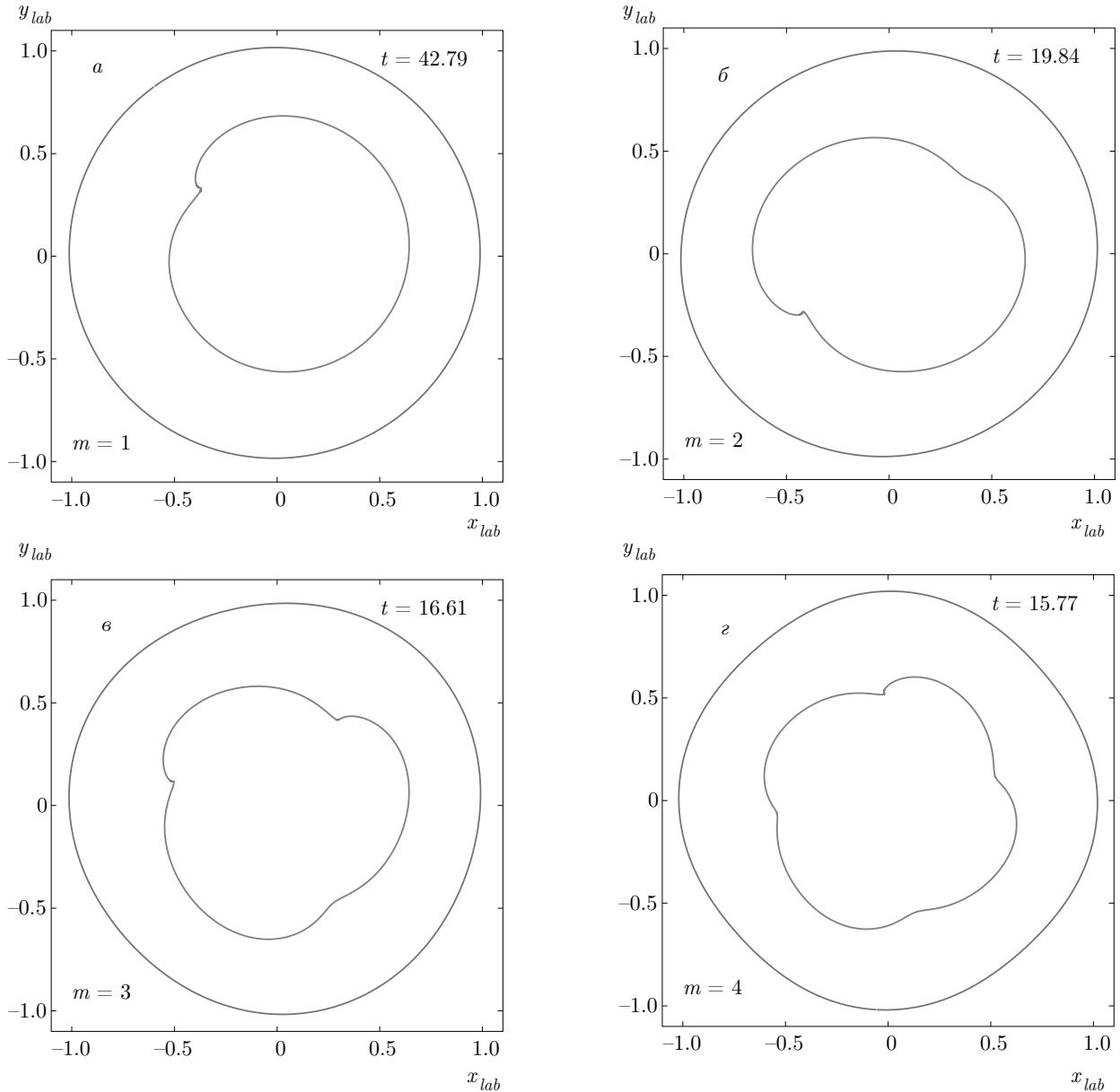


Рис. 2. Формирование особенностей на свободной поверхности при $\delta = 0$ для различных m

ного радиуса и с единичной угловой скоростью) при условии относительной малости силы тяжести ($g/\Omega^2 R \ll 1$ в размерных переменных). Будем использовать полярные координаты r и χ , так что $x + iy = r \exp(i\chi)$. Неизвестными функциями при этом будут малое отклонение свободной границы $\eta(\chi, t) = [r(\chi, t) - c]$ от равновесного радиуса $0 < c < 1$ и граничное значение $\psi(\chi, t)$ потенциала поля скорости. Обобщенное уравнение Бернулли и кинематическое граничное условие на свободной границе в главном приближении выглядят следующим образом (при $\Gamma = 0$):

$$\psi_t = c\eta - 2\hat{\mathfrak{R}}\psi - cg(t) \sin(\chi + t), \quad (35)$$

$$\eta_t = c^{-1}\hat{\mathfrak{R}}\psi_\chi, \quad (36)$$

где оператор $\hat{\mathfrak{R}}$ (аналог оператора \hat{R}_α) диагонален в дискретном фурье-представлении:

$$\mathfrak{R}_m = i \frac{1 - c^{2m}}{1 + c^{2m}} = i \operatorname{th} \left(m \ln \frac{1}{c} \right) \equiv i\sigma_m. \quad (37)$$

Соотношение $\theta(\chi, t) = \hat{\mathfrak{R}}\varphi(\chi, t)$ при $r = c$ возникло из того факта, что выполнение кинематического условия на стенке контейнера обеспечивается равен-

ством

$$\phi_m = A_m(t)r^m e^{im\chi} + \bar{A}_m(t)r^{-m}e^{-im\chi}. \quad (38)$$

В случае $g = \text{const}$ частное решение неоднородной линейной системы (35), (36) имеет вид

$$\psi_{st} = \frac{cg}{1 + \sigma_1} \cos(\chi + t), \quad (39)$$

$$\eta_{st} = \frac{-\sigma_1 g}{1 + \sigma_1} \sin(\chi + t). \quad (40)$$

Оно соответствует стационарному состоянию в лабораторной системе координат (см. подробности в работе [43]). Из (35), (36) также следует выражение для собственных частот («закон дисперсии»; попутно заметим, что в работе [43] дисперсионное уравнение выводилось в невращающейся системе, и, вероятно, поэтому ответ не был доведен до столь простой формулы)

$$\omega_m = \sigma_m + \sqrt{\sigma_m^2 + m\sigma_m}, \quad (41)$$

причем положительным m соответствуют опережающие волны, а отрицательным m — отстающие (в лабораторных координатах). Ясно, что если в систему внести возмущения с азимутальным числом m и относительной скоростью вращения $\Delta \approx \omega_m/m$, то должен будет наблюдаться резонансный рост соответствующей гармоники. Такие возмущения проще всего осуществить, слегка искажив форму центрифуги и заставив ее вращаться не с частотой $\Omega = 1$, а с частотой вблизи $1 + \Delta$. В численных примерах, приведенных на рис. 1 и 2, такой режим обеспечивался функцией

$$Z(\zeta, t) = \exp[i(-\omega_{-m}/m + \delta)t]e^{i\zeta}[1 + \epsilon e^{im\zeta}] \quad (42)$$

при $\epsilon = 0.02$ для $m = 1, 2, 3, 4$. Отстройка от резонанса фиксировалась параметром δ . В качестве начальных условий брались функции $\rho = 0$ и $\psi = 0$, а начальное значение $\alpha_0 = -\ln(0.6)$ давало приблизительно круглую форму свободной границы со средним радиусом $c \approx 0.6$. В этой серии численных экспериментов использовалось значение безразмерного поля тяжести $g = 0.02$.

На рис. 1 и 2 видно, что действительно имел место резонансный рост волн, сопровождавшийся усилением их нелинейности и закончившийся образованием особенности на свободной поверхности. В реальных условиях это означало бы начало перехода течения в трехмерный турбулентный режим.

Другая возможность привнесения резонансных возмущений — вертикальные вибрации оси вращения, приводящие к зависимости

$$g(t) = g_0 + A \cos(\omega_{vibr}t).$$

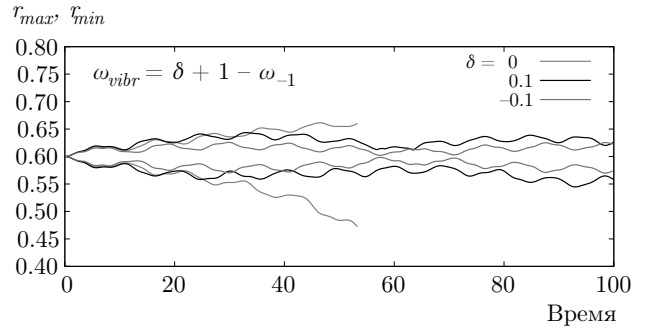


Рис. 3. Максимальное и минимальное значения радиальной координаты свободной поверхности в зависимости от времени при вертикальной вибрации оси круглой центрифуги с эффективной силой тяжести $g(t) = 0.02 - 0.01 \cos(\omega_{vibr}t)$

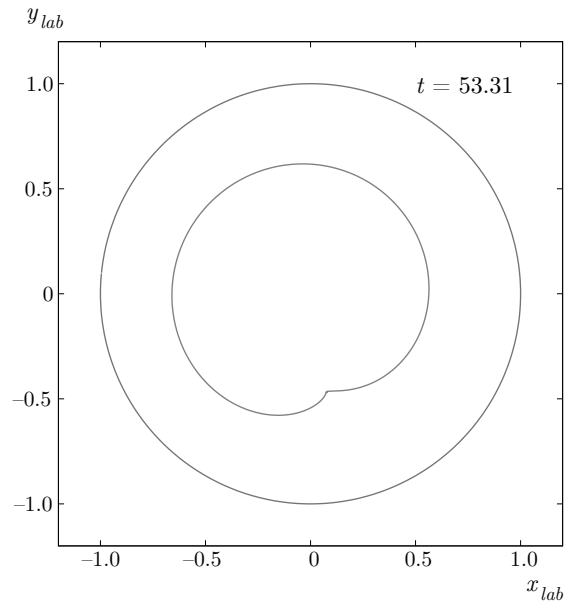


Рис. 4. Образование особенности на свободной поверхности в круглой центрифуге с вертикально вибрирующей осью при резонансном значении частоты вибрации

Наиболее эффективно такие возмущения воздействуют на гармоники с $m = \pm 1$, причем даже в случае идеально круглого контейнера, как это следует из приближенных уравнений (35), (36). Резонансные частоты при этом даются формулой $\omega_{vibr} = 1 \pm \omega_{\pm 1}$. Соответствующие примеры представлены на рис. 3 и 4.

Чтобы продемонстрировать возможности метода в полной мере, на рис 5 и 6 показаны примеры эволюции свободной поверхности в деформируемой центрифуге с изменяющейся (уменьшающейся) со временем площадью сечения. В этих экспериментах

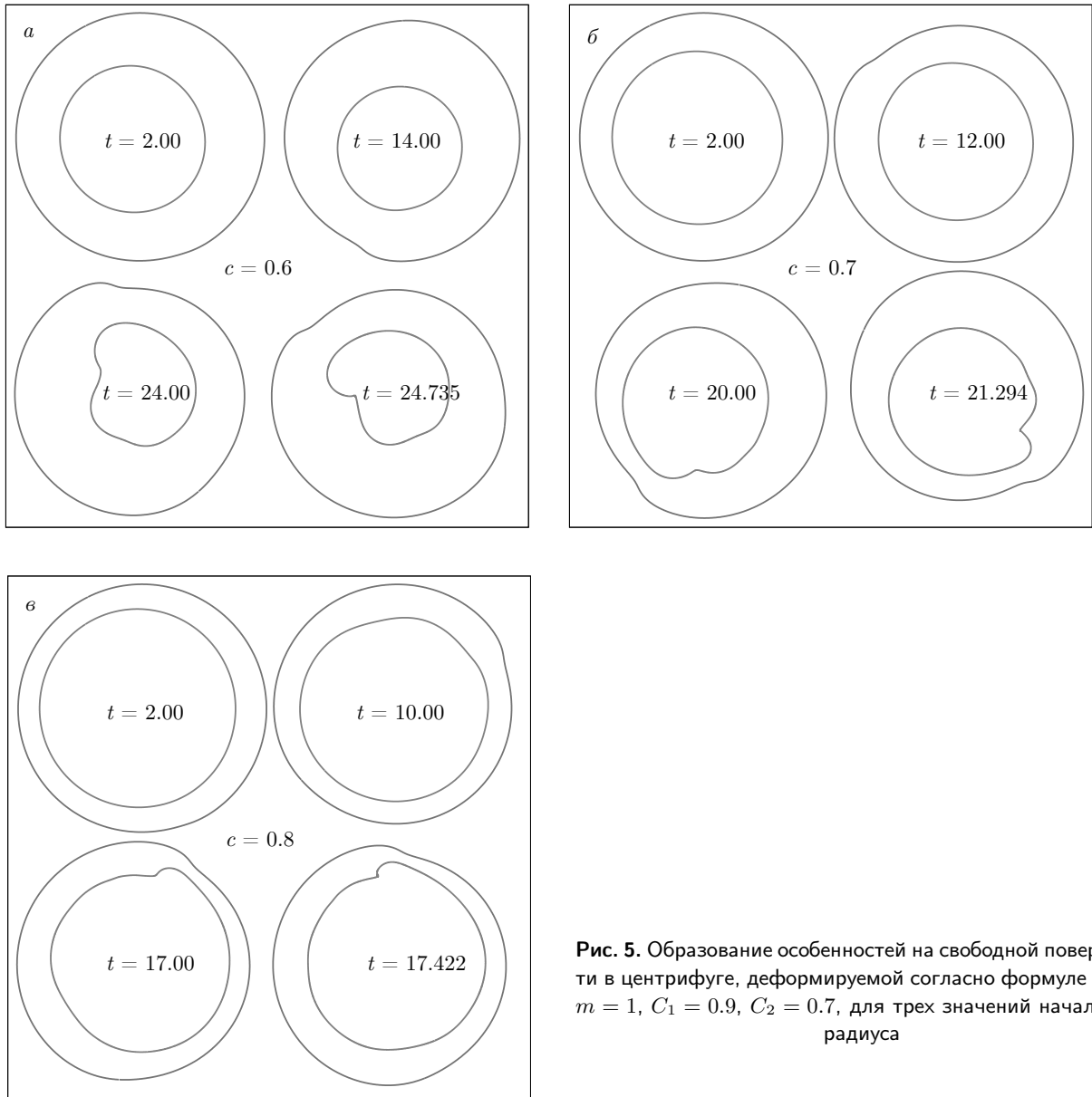


Рис. 5. Образование особенностей на свободной поверхности в центрифуге, деформируемой согласно формуле (43) с $m = 1$, $C_1 = 0.9$, $C_2 = 0.7$, для трех значений начального радиуса

$g = 0.1$, а форма контейнера соответствовала аналитической функции

$$Z(\zeta, t) = \exp \left[i\zeta + id(t) \ln \left(\frac{1 + C_1 e^{im\zeta}}{1 - C_2 e^{im\zeta}} \right) - 0.5\pi d(t) \right], \quad (43)$$

причем мера отклонения от окружности определялась выражением

$$d(t) = 0.1[1 - \exp(-0.04t)].$$

На рис. 5 параметры $m = 1$, $C_1 = 0.9$, $C_2 = 0.7$. На рис. 6 было взято $m = 2$, $C_1 = 0.9$, $C_2 = 0.9$. В начальный момент времени это была циркулярно-симметрическая конфигурация с радиусом свободной

поверхности s . Затем часть дна контейнера как бы «поднималась» вдоль радиуса, образуя при этом m участков с «меньшей глубиной». Уменьшение площади контейнера здесь сопровождалось появлением дополнительного кругового потенциального течения с параметром $\Gamma(t)$, направленного против часовой стрелки. Особенности (опрокидывающиеся углы) формировались на гребне растущей волны вблизи места выхода течения с меньшей глубины на большую.

Наконец, на рис 7 показана деформация изначально круглого контейнера к форме, промежуточной между кругом и квадратом (при $g = 0.1$, $c = 0.6$). В этом численном эксперименте использовалось разложение соответствующего эллиптиче-

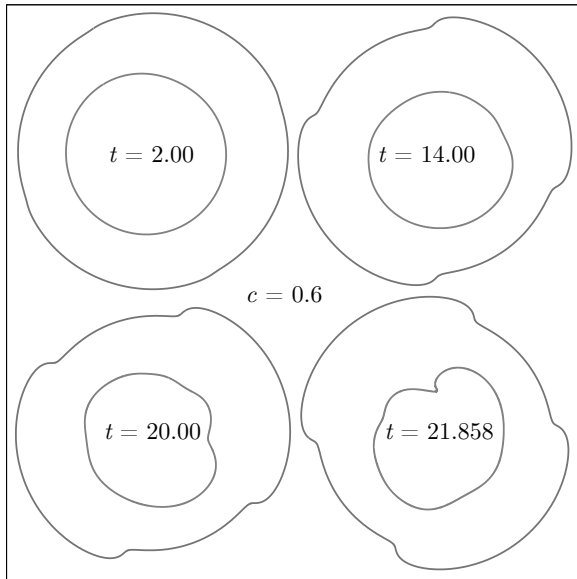


Рис. 6. Образование особенности на свободной поверхности в центрифуге, деформируемой согласно формуле (43) с $m = 2, C_1 = 0.9, C_2 = 0.9$

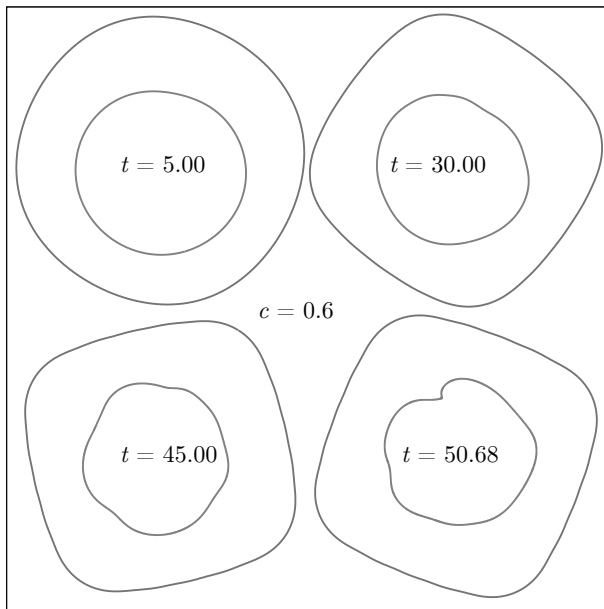


Рис. 7. Образование особенности на свободной поверхности в центрифуге, деформируемой от круга к квадрату по формуле (46)

ского интеграла до четвертого порядка,

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \approx zE_4(z^4), \quad (44)$$

$$E_4(\mu) = \left(1 + \frac{\mu}{10} + \frac{\mu^2}{24} + \frac{5\mu^3}{16 \cdot 13} + \frac{35\mu^4}{128 \cdot 17} \right), \quad (45)$$

чтобы построить функцию

$$Z(\zeta, t) = [1 - 0.1\tilde{d}(t)]e^{i\zeta} E_4(\tilde{d}(t) \exp(4i\zeta)), \quad (46)$$

где $\tilde{d}(t) = 0.8[1 - \exp(-0.04t)]$. И в этом случае имело место образование особенности. Но если вместо множителя $[1 - 0.1\tilde{d}(t)]$ брался множитель $[1 - 0.2\tilde{d}(t)]$, который при деформации давал более существенное уменьшение площади контейнера и полости в нем, то (при $c = 0.6$) волны на свободной поверхности в течение длительного времени оставались гладкими и не проявляли тенденции к формированию резких опрокидывающихся гребней (не показано). Полного понимания причин такого поведения пока нет.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, основной результат данной работы заключается в разработке и применении метода составного конформного отображения для описания динамики волн на свободной поверхности идеальной несжимаемой жидкости в частично заполненных плоских центрифугах сложной формы. Как и в предыдущих применениях, метод продемонстрировал свою высокую точность и эффективность. Правда, пока нельзя сказать, что все вопросы исчерпаны. Например, пока не ясно, как следует модифицировать метод в том случае, когда относительно малая полость (полый вихрь при $\Gamma \neq 0$) уходит в процессе своей динамики далеко от начала координат и она оказывается занята жидкостью. Очевидно, что конформное отображение типа $Z(\zeta) = \exp(i\zeta)$, у которого при $Z = 0$ (или в любой другой заранее фиксированной точке) имеется особенность, при этом перестает работать.

Но даже в уже имеющемся варианте метод способен решать множество интересных задач. Совершенно ясно, что приведенные здесь примеры далеко не исчерпывают всего разнообразия возможных волновых структур и их динамики во вращающихся системах с нетривиальной геометрией.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Овсянников, *Динамика сплошной среды*, Новосибирск, Наука (1973), вып. 15, с. 104.
2. L. V. Ovsjannikov, Arch. Mech. **26**, 407 (1974).
3. A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **221**, 73 (1996).

4. A. I. Dyachenko, Y. V. Lvov, and V. E. Zakharov, *Physica D* **87**, 233 (1995).
5. А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, *Физика плазмы* **22**, 916 (1996).
6. А. И. Дьяченко, *ДАН* **376**, 27 (2001).
7. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and O. A. Vasilyev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **21**, 283 (2002).
8. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ* **81**, 318 (2005).
9. V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, and A. O. Prokofiev, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **25**, 677 (2006).
10. A. I. Dyachenko and V. E. Zakharov, *Письма в ЖЭТФ* **88**, 356 (2008).
11. W. Choi and R. Camassa, *J. Engng Mech.* **125**, 756 (1999).
12. Y. A. Li, J. M. Human, and W. Choi, *Stud. Appl. Math.* **113**, 303 (2004).
13. Р. В. Шамин, *ДАН* **406**, 112 (2006).
14. Р. В. Шамин, *ДАН* **418**, 603 (2008).
15. Р. В. Шамин, *ДАН* **432**, 458 (2010).
16. В. Е. Захаров, Р. В. Шамин, *Письма в ЖЭТФ* **91**, 68 (2010).
17. В. Е. Захаров, Р. В. Шамин, *Письма в ЖЭТФ* **96**, 68 (2012).
18. D. Chalikov and D. Sheinin, *J. Comput. Phys.* **210**, 247 (2005).
19. D. Chalikov, *Phys. Fluids* **21**, 076602 (2009).
20. А. В. Слюняев, *ЖЭТФ* **136**, 785 (2009).
21. W. Choi, *Math. Comp. Simulat.* **80**, 29 (2009).
22. S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and A. O. Korotkevich, *Письма в ЖЭТФ* **98**, 767 (2013).
23. Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин, *Письма в ЖЭТФ* **99**, 729 (2014).
24. P. M. Lushnikov, *J. Fluid Mech.* **800**, 557 (2016).
25. M. R. Turner and T. J. Bridges, *Adv. Comput. Math.* **43**, 947 (2016).
26. M. R. Turner, *J. Fluids Struct.* **64**, 1 (2016).
27. M. G. Blyth and E. I. Parau, *J. Fluid Mech.* **806**, 5 (2016).
28. P. M. Lushnikov, S. A. Dyachenko, and D. A. Silantsev, *Proc. R. Soc. A* **473** (2202), 2017019 (2017).
29. A. I. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and V. E. Zakharov, *J. Fluid Mech.* **869**, 526 (2019).
30. A. I. Dyachenko, S. A. Dyachenko, P. M. Lushnikov, and V. E. Zakharov, *J. Fluid Mech.* **874**, 891 (2019).
31. S. A. Dyachenko, *J. Fluid Mech.* **860**, 408 (2019).
32. T. Gao, A. Doak, J.-M. Vanden-Broeck, and Zh. Wang, *Eur. J. Mech./B Fluids* **77**, 98 (2019).
33. M. V. Flamarion, P. A. Milewski, and A. Nachbin, *Stud. Appl. Math.* **142**, 433 (2019).
34. D. Kachulin, A. Dyachenko, and A. Gelash, *Fluids* **4**, 83 (2019).
35. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **70**, 066302 (2004).
36. V. P. Ruban, *Phys. Lett. A* **340**, 194 (2005).
37. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **77**, 037302 (2008).
38. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **77**, 055307(R) (2008).
39. V. P. Ruban, *Phys. Rev. E* **78**, 066308 (2008).
40. V. P. Ruban, *Письма в ЖЭТФ* **93**, 213 (2011).
41. V. P. Ruban, *ЖЭТФ* **141**, 387 (2012).
42. В. П. Рубан, *Письма в ЖЭТФ* **95**, 550 (2012).
43. O. M. Phillips, *J. Fluid Mech.* **7**, 340 (1960).
44. A. A. Ivanova, V. G. Kozlov, and A. V. Chigrakov, *Fluid Dynamics* **39**, 594 (2004).
45. A. A. Ivanova, V. G. Kozlov, and D. A. Polezhaev, *Fluid Dynamics* **40**, 297 (2005).
46. <http://www.fftw.org>.