

ГЕНЕРАЦИЯ НИЗКОЧАСТОТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В УСЛОВИЯХ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ ЧАСТИЦ С ПОСТОЯННЫМ ДИПОЛЬНЫМ МОМЕНТОМ

А. М. Башаров^{a,b}, А. И. Трубишко^c*

*^a Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

*^b Московский физико-технический институт
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

*^c Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России
196105, Санкт-Петербург, Россия*

Поступила в редакцию 15 декабря 2019 г.,
после переработки 12 января 2020 г.
Принята к публикации 15 января 2020 г.

Локализованный ансамбль одинаковых частиц с постоянным дипольным моментом при сверхизлучении генерирует когерентный импульс низкочастотного излучения, форма которого существенно зависит от числа частиц ансамбля. В частности, имеет место переход формы импульса низкочастотного излучения от однокоробой к двукоробой в узком диапазоне изменения параметров ансамбля.

DOI: 10.31857/S0044451020060024

1. ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитные процессы в средах с постоянным дипольным моментом (ПДМ), например, в ансамблях квантовых точек, привлекают внимание как с точки зрения практических приложений (генерация низкочастотного терагерцевого излучения), так и с общетеоретической точки зрения.

К диапазону терагерцевого излучения принято относить электромагнитные частоты от 0.1 до 10 ТГц (длины волн порядка 1–0.01 мм). Терагерцевое излучение эффективно взаимодействует с колебательными, вращательными, туннельными и т. п. квантовыми переходами, что перспективно в задачах спектроскопии. Однако существует трудность получения терагерцевого излучения при лазерной генерации когерентного излучения — здесь существенно влияние тепловых эффектов, поскольку кванту с частотой 1 ТГц соответствует температура около 50 К. Поэтому весьма популярны методы генерации терагерцевого излучения, основанные на методе оптического выпрямления и/или использо-

вании фемтосекундных оптических импульсов (см. обзоры [1, 2]). В дальнейшем будем говорить о низкочастотном излучении, поскольку в зависимости от контекста, для нашего рассмотрения важно соотношение частот задействованных квантовых переходов и возникновения поляризации на частотах, много меньших частот задействованных квантовых переходов, так что возможен и выход за рамки очерченного диапазона терагерцевого излучения.

Большинство теоретических работ по генерации и взаимодействию низкочастотного излучения сосредоточено на численном моделировании процессов. К исключениям относятся работы, в которых рассмотрены различные вопросы интегрируемости уравнений, см., например, [2–11], процессы в оптически тонких средах [12, 13] и микрорезонаторах, например, [14].

В данной статье предложена простая и аналитически разрешаемая модель генерации низкочастотного излучения ансамблем сверхизлучающих частиц с ПДМ. Получены выражения для интенсивности низкочастотного излучения, которое имеет место в особом режиме сверхизлучения, названном нами невинеровским режимом [15, 16]. Этот режим отличается от стандартного режима сверхизлуче-

* E-mail: basharov@gmail.com

ния [17] локализованного ансамбля возбужденных частиц наличием эффекта подавления сверхизлучения штарковским взаимодействием частиц ансамбля. В силу особенностей генерации низкочастотного излучения процессы подавления сверхизлучения позволяют определенным образом управлять формой импульсов низкочастотного излучения. Полученные общие формулы проиллюстрированы численно рассчитанными графиками профиля интенсивности низкочастотного сигнала, результаты анализа которых свидетельствуют о возможности своеобразного инжиниринга импульсов низкочастотного излучения. Например, незначительно меняя параметры сверхизлучающего ансамбля, можно получать низкочастотное излучение одногорбой или двухгорбой формы.

В связи с важной ролью процессов штарковского взаимодействия частиц в рассмотренной в статье картине формирования импульса низкочастотного излучения заметим, что в работах [1–14] и других рассматривается динамика квантовых систем, состоящих из изолированных квантовых частиц с ПДМ, в которых и штарковским взаимодействием, и диполь-дипольным взаимодействием пренебрегается либо в силу разреженности системы, либо по иным соображениям. Такие предположения делаются, в частности, чтобы не рассматривать возможные фазовые переходы, связанные со спонтанным появлением макроскопической поляризации. Можно, однако, сразу предположить определенную ориентацию ПДМ и тогда задаться вопросом об учете штарковского взаимодействия частиц ансамбля и его роли, которая возрастает с ростом числа частиц и приводит к эффекту подавления коллективного спонтанного излучения (сверхизлучения). При этом собственно фазовые переходы можно не рассматривать, предполагая формирование излучения ансамблем в определенном его состоянии с точки зрения ориентации ПДМ. Тогда динамика систем с ПДМ сводится к обычным N -уровневым оптическим моделям, в которых определенные квантовые энергетические состояния не характеризуются четностью и обладают ПДМ. При этом есть две группы отличий.

Первая группа связана с тем, что в системах с ПДМ возможна целая иерархия многоквантовых переходов в условиях всевозможных резонансов, а временная динамика квантовой системы характеризуется низкочастотными излучательными процессами наряду с высокочастотными (оптическими) составляющими. Происхождение низкочастотных составляющих нетрудно понять на основе алгебраи-

ческой теории возмущений — динамика населенностей энергетических уровней в этом подходе характеризуется медленными изменениями во времени по сравнению с периодом быстрых колебаний величин, определяемых оптическими квантовыми переходами. Тогда, в силу наличия у частиц ПДМ, возникает обычная дипольная генерация низкочастотного излучения [13].

Вторая группа отличий связана с невинеровской динамикой собственно N -уровневой системы, определяемой штарковским взаимодействием частиц системы. В силу недостаточной изученности этой особенности в протяженных ансамблях мы ограничиваемся простейшим случаем спонтанного излучения частиц локализованного ансамбля с участием двух уровней частицы — основного и возбужденного. Оказывается, что слабый процесс штарковского взаимодействия с вакуумным полем, оставляющий частицы в прежнем энергетическом состоянии, меняет временную динамику коллективного спонтанного перехода. При этом ансамбль двухуровневых частиц локализован в области с размерами много меньшими характерной длины волны сверхизлучения. Поэтому здесь диполь-дипольное взаимодействие не проявляется в кинетических уравнениях для населенностей рассматриваемых энергетических уровней. Однако макроскопический дипольный момент системы меняется за время коллективного спонтанного излучения, приводя к генерации излучения на низкой (по сравнению с частотой перехода в квантовой частице) частоте. При этом число частиц ансамбля является дополнительным фактором управления низкочастотным излучением. Показано, что число атомов не только влияет на время излучения как в обычном сверхизлучении, но и существенно меняет форму низкочастотного излучения (в отличие от обычного сверхизлучения).

2. МОДЕЛЬ И ЕЕ ОПИСАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Рассмотрим ансамбль одинаковых квантовых частиц, локализованных в области пространства с размерами меньшими, чем длины волн всех обусуждаемых электромагнитных полей. Окружением ансамбля может являться вакуумное электромагнитное поле, диэлектрическая или полупроводниковая среда и т. п. Таким образом, речь идет об одной из стандартных конфигураций открытой системы, которая используется для анализа коллективного спонтанного излучения возбужденного ансамбля

[16, 17]. Спонтанное излучение вызвано взаимодействием с окружением открытой системы.

Пусть ансамбль состоит из N_p неподвижных одинаковых частиц, некоторые уровни которых обладают ПДМ. Гамильтониан такой системы в квантованном электромагнитном поле окружения дается обычным выражением, состоящим из гамильтониана изолированной частицы H^P , гамильтониана квантованного электромагнитного поля H^F и оператора их взаимодействия H^{Int} :

$$\begin{aligned} H^{Int} &= H^P + H^F + H^{Int}, \\ H^P &= \sum_{i,j} E_j |E_j\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \quad H^F = \sum_{\mathbf{q}} \hbar \omega_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}}^{\dagger} b_{\mathbf{q}}, \\ H^{Int} &= \sum_{\mathbf{q}} \Gamma_{\mathbf{q}} (b_{\mathbf{q}}^{\dagger} + b_{\mathbf{q}}) \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}, \quad (1) \\ \sum_j |E_j\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)} &= 1^{(i)}, \quad \langle E_j|^{(i)} |E_k\rangle^{(i)} = \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Здесь $|E_j\rangle$ — квантовое состояние частицы с энергией E_j , $d_{kj} = \langle E_k | d | E_j \rangle$, $d = \sum_{k,j} d_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|$ — оператор дипольного момента частицы. Верхний индекс у векторов состояний частицы обозначает пространство состояний i -й частицы и суммирование по i есть суммирование по всем частицам ансамбля. Операторы рождения $b_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ и уничтожения $b_{\mathbf{q}}$ фотонов с волновым вектором \mathbf{q} удовлетворяют обычному коммутационному соотношению $[b_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$, дисперсионное соотношение задано условием $\omega_{\mathbf{q}} = qc$. Параметр связи электромагнитного поля и квантовых частиц в трехмерном пространстве $\Gamma_{\mathbf{q}} = (2\pi \hbar qc / \ell^3)^{1/2}$, где ℓ^3 — объем квантования. Вводя параметры связи, можно охватить другие модели окружающего электромагнитного поля, например, однонаправленного поля в волноводе. Различием в пространственном положении частиц пренебрегаем (приближение локализованного ансамбля).

Будем говорить о двухуровневых частицах: пара уровней частицы выделяется начальными условиями — предполагаем, что в начальный момент времени заселен только заданный атомный уровень $|E_2\rangle$, который связан с низколежащим основным уровнем частицы переходом частоты $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$. Для простоты считаем, что других одноквантовых переходов с возбужденного уровня на низколежащие нет. В отличие от частиц, в которых квантовые состояния характеризуются четностью, в средах с ПДМ, наряду с одноквантовыми переходами с возбужденного уровня $|E_2\rangle$ на основной уровень $|E_1\rangle$, возможны и двухквантовые переходы, поскольку в вакуумном электромагнитном поле обыч-

ного трехмерного пространства присутствует весь спектр частот. Однако двухквантовые процессы — процессы второго порядка по константе связи квантовой частицы с электромагнитным полем. Будем считать, что в рассматриваемой системе нет причин для серьезного возрастания роли таких двухквантовых процессов по сравнению с одноквантовыми, как это имеет место в случае одинаковой четности рассматриваемых состояний $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ [18], или в случае процессов в средах со спектральными особенностями [19]. Несмотря на принятые соображения относительно рассматриваемых двух уровней частицы, остальные уровни окажутся также учтенными (см. далее).

Особенностью теоретического анализа оптических открытых систем является необходимость построения эффективного гамильтониана для каждого рассматриваемого случая взаимодействия электромагнитных полей с квантовой системой. Этот этап часто опускается, что предполагает описание процессов взаимодействия в приближении вращающейся волны [20]. Такой подход упускает из рассмотрения процессы второго порядка по взаимодействию с широкополосными квантованными полями, примерами которых является вакуумное электромагнитное поле, а также разного рода интерференционные процессы (см., например, [16] и приведенные в работе ссылки).

Другой проблемой при формулировке модели и ее теоретическом описании является применение общих методов для получения кинетического уравнения непосредственно для исходного гамильтониана системы, в нашем случае гамильтониана (1). Такой подход также оказывается некорректным во втором порядке по взаимодействию. Это связано с наличием в квантовых оптических открытых системах процессов с разными временными масштабами протекания. Временной масштаб изменения быстрых слагаемых оператора взаимодействия с окружением — это время оборота электрона вокруг ядра, т. е. порядка 10^{-15} с. Будем рассматривать эту величину как имя нарицательное, говоря о быстрых процессах, связанных со структурой рассматриваемых объектов. Взаимодействие с окружением обычно рассматривается в марковском приближении. Формальное определение марковского процесса взаимодействия сводится к аппроксимации термостата математическим белым шумом с нулевым временем корреляции. При переходе к реальным системам, где все времена конечны, такое определение требует уточнения, поскольку наряду со временем корреляции термостата τ_{cor} есть характерный и

очень малый масштаб 10^{-15} с изменения быстроменяющихся слагаемых гамильтониана открытой системы. Понятно, что время корреляции термостата не может быть такого же порядка — оно его превышает ($\tau_{cor} \gg 10^{-15}$ с), поскольку здесь идет реальный и достаточно инерционный процесс межчастичных взаимодействий и установления равновесия внутри самого термостата. Поэтому, чтобы применять какие-либо общие методы для получения кинетического уравнения рассматриваемой открытой системы, необходимо, прежде всего, избавиться от быстроменяющихся слагаемых в гамильтониане (1), т. е. по заданному исходному гамильтониану построить эффективный гамильтониан.

Общим методом построения эффективного гамильтониана квантовой системы, взаимодействующей с классическими электромагнитными полями, является метод усреднения дифференциальных уравнений, разработанный еще Крыловым, Боголюбовым и Митропольским [21, 22]. Его алгебраический вариант, разработанный в работах [23, 24], был обобщен в [25] на взаимодействие квантованных полей, так что обобщенный вариант алгебраической теории возмущений, далее называемой просто алгебраической теорией возмущений, стало удобно применять и к квантовым открытым системам [26, 27]. В нашем случае такое применение состоит в следующем.

В расширенном пространстве состояний атомной системы и квантованного электромагнитного поля исходный гамильтониан H^{Ini} определяет уравнение Шредингера для волнового вектора:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi^{P+F}\rangle = H^{Ini} |\Psi^{P+F}\rangle.$$

Предположения о характере начального состояния $|\Psi^{P+F}\rangle$ при $t = 0$ в алгебраической теории возмущений и в методах эффективного гамильтониана делаются после построения эффективного гамильтониана задачи. Это же касается и формулировки марковского приближения.

Преобразуем волновой вектор $|\Psi^{P+F}\rangle$ при помощи унитарного преобразования

$$|\tilde{\Psi}^{P+F}\rangle = U |\Psi^{P+F}\rangle, \quad U = e^{-iS}, \quad S^\dagger = S \quad (2)$$

с генератором S . Преобразованный вектор будет удовлетворять преобразованному уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial |\tilde{\Psi}^{P+F}\rangle}{\partial t} = \tilde{H} |\tilde{\Psi}^{P+F}\rangle$$

с преобразованным гамильтонианом

$$\tilde{H} = U H^{Ini} U^\dagger - i\hbar U \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger.$$

Раскладывая \tilde{H} и S в ряд по взаимодействию с вакуумным полем

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + \dots, \quad \tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)} + \dots,$$

получаем (с учетом формулы Бейкера – Хаусдорфа)

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(0)} &= H^P + H^F, \\ \tilde{H}^{(1)} &= H^{Int} - i \left[S^{(1)}, \tilde{H}^{(0)} \right] + \hbar \frac{dS^{(1)}}{dt}, \\ \tilde{H}^{(2)} &= -\frac{i}{2} \left[S^{(1)}, H^{Int} \right] - \frac{i}{2} \left[S^{(1)}, \tilde{H}^{(1)} \right] - \\ &\quad - i \left[S^{(2)}, \tilde{H}^{(0)} \right] + \hbar \frac{dS^{(2)}}{dt}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ведущей идеей для нахождения слагаемых $S^{(i)}$ и эффективного гамильтониана $H^{Eff} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)}$ служит отсутствие быстроменяющихся во времени слагаемых в эффективном гамильтониане в представлении взаимодействия (картине Дирака), в которой

$$H^{Eff}(t) = \tilde{H}^{(1)}(t) + \tilde{H}^{(2)}(t).$$

Требование отсутствия быстроменяющихся во времени слагаемых в $H^{Eff}(t)$ отличает алгебраическую теорию возмущений [23, 25–27] от других подходов к построению эффективного гамильтониана теории открытых квантовых систем [28–35]. В случае открытых систем различия также связаны с формулировкой условий марковского приближения. Требования марковского приближения можно налагать на исходные начальные векторы состояния или на преобразованные векторы состояний. Возникающие здесь различия ярко иллюстрирует модельная задача, рассмотренная в работе [36].

В картине Дирака разложения $\tilde{H}(t)$ и $S(t)$ в ряд по взаимодействию с вакуумным полем имеют вид

$$H^{Int}(t) = e^{i(H^P + H^F)t/\hbar} H^{Int} e^{-i(H^P + H^F)t/\hbar},$$

$$S(t) = S^{(1)}(t) + S^{(2)}(t) + \dots,$$

$$\tilde{H}(t) = \tilde{H}^{(1)}(t) + \tilde{H}^{(2)}(t) + \dots,$$

$$\tilde{H}^{(1)}(t) = -i \left[S^{(1)}(t), H^{Int}(t) \right] + \hbar \frac{dS^{(1)}(t)}{dt},$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^{(2)}(t) &= -\frac{i}{2} \left[S^{(1)}(t), H^{Int}(t) \right] - \\ &\quad - \frac{i}{2} \left[S^{(1)}(t), \tilde{H}^{(1)}(t) \right] + \hbar \frac{dS^{(2)}(t)}{dt}. \end{aligned}$$

В результате стандартных вычислений алгебраической теории возмущений [23, 25–27] во втором

порядке эффективного гамильтониана появляются слагаемые, которые в картине Шредингера диагональны по переменным квантовой частицы и не зависят от фотонных переменных (лэмбовские сдвиги). Их удобно включить в $\tilde{H}^{(0)}$. В слагаемом второго порядка $\tilde{H}^{(2)}$ можно опустить проекционные операторы на нерезонансные энергетические уровни. Проекционные операторы на выделенные уровни $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ учитывают все другие уровни квантовой частицы и определяют оператор штарковского взаимодействия частиц с вакуумным электромагнитным полем. В этом проявляется отличие алгебраической теории возмущений как от банального приближения вращающейся волны, так и от подхода [37, 38], в котором оператор второго порядка по взаимодействию частиц с вакуумным электромагнитным полем имеет другую алгебраическую структуру. В подходе [37, 38] не использовано исключение быстроменяющихся слагаемых, поэтому их результат отвечает случаю нулевого времени корреляции для вакуумных полей.

Во втором порядке алгебраической теории возмущений при использовании оператора взаимодействия атомов с квантованным электромагнитным полем появляется слагаемое, описывающее диполь-дипольное взаимодействие атомов [15]. Таким оператором диполь-дипольного взаимодействия пренебрегаем, поскольку он не влияет существенно на рассматриваемое далее кинетическое уравнение для населенностей резонансных уровней. Это приводит к следующим выражениям в картине Шредингера (знак тильда мы опустили):

$$\begin{aligned}
 H^{(0)} &= \hbar\omega'_{21}R_3, \omega'_{21} = (E'_2 - E'_1)/\hbar, \\
 H^{(1)} &= \sum_{\omega} \Gamma_{\omega} b_{\omega}^{\dagger} d_{12} R_{-} + \sum_{\omega} \Gamma_{\omega} b_{\omega} d_{12} R_{+}, \\
 H^{(2)} &= \sum_{\omega} \Gamma_{\omega} b_{\omega}^{\dagger} \sum_{\omega'} \Gamma_{\omega'} b_{\omega'} \times \\
 &\quad \times \left\{ \Pi_{+}(\omega, \omega') \frac{N_p}{2} + \Pi_{-}(\omega, \omega') R_3 \right\}, \\
 \Pi_{\pm}(\omega, \omega') &= \\
 &= \frac{1}{2} \{ \Pi_1(\omega) + \Pi_1(\omega') \pm (\Pi_2(\omega) + \Pi_2(\omega')) \}, \\
 E'_1 &= E_1 + \sum_{\omega} \Gamma_{\omega}^2 \sum_j \frac{|d_{1j}|^2}{\hbar(\omega_{1j} - \omega)} |E_1\rangle \langle E_1|, \\
 E'_2 &= E_2 + \sum_{\omega} \Gamma_{\omega}^2 \sum_j \frac{|d_{2j}|^2}{\hbar(\omega_{2j} - \omega)} |E_2\rangle \langle E_2|.
 \end{aligned} \tag{4}$$

В процессе вычислений, независимо от участия классических и/или квантованных полей, наличия

или отсутствия ПДМ, возникают единые параметры теории оптических резонансных процессов [17]

$$\Pi_k(\omega) = \sum_j' \frac{|d_{kj}|^2}{\hbar} \left(\frac{1}{\omega_{kj} + \omega} + \frac{1}{\omega_{kj} - \omega} \right). \tag{5}$$

Штрих у знака суммы означает, что в суммировании исключены резонансные слагаемые $\omega_{jk} \mp \omega \approx 0$.

Подчеркнем, что рассуждения в представлении взаимодействия необходимы только для корректного определения слагаемых алгебраической теории возмущений, относящихся к эффективному гамильтониану и не содержащих быстроменяющихся во времени величин. После определения таких нетрудно вернуться к обычному представлению Шредингера, что и проделано при написании выражений (4).

В выражении для $\Pi_k(\omega)$ нет ограничений на четности учитываемых энергетических уровней. Соответственно, больше квантовых переходов в частице дают вклад в параметры $\Pi_k(\omega)$ по сравнению со случаем атомов, квантовые уровни которых характеризуются четностью. Наличие нерезонансных уровней, отличных от рассматриваемых, меняет параметр $\Pi_k(\omega)$ — возникает зависимость этого параметра от ПДМ. Поэтому становится возможным обсуждать динамику системы с ПДМ в случае различных значений $\Pi_k(\omega)$. Далее будет показано, что характер динамики оказывается весьма чувствительным к значениям $\Pi_k(\omega)$ и величинам $\Pi_{\pm}(\omega) = \Pi_1(\omega) \pm \Pi_2(\omega)$.

Другим следствием представленного эффективного гамильтониана задачи является зависимость динамики системы по ее энергетическим подуровням от наличия ПДМ только через посредство значений параметров $\Pi_{\pm}(\omega)$, если в исходной постановке задачи ограничиться только парой уровней $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$, а прямыми (одноквантовыми) переходами на энергетические уровни другой четности пренебречь.

Эффективный гамильтониан $H^{Eff} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}^{(2)}$ представлен через атомные операторы

$$R_3 = \frac{1}{2} \sum_i \left(|E_2\rangle^{(i)} \langle E_2|^{(i)} - |E_1\rangle^{(i)} \langle E_1|^{(i)} \right),$$

$$R_{-} = \sum_i |E_1\rangle^{(i)} \langle E_2|^{(i)}, \quad R_{+} = \sum_i |E_2\rangle^{(i)} \langle E_1|^{(i)},$$

удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[R_3, R_{\pm}] = \pm R_{\pm}, \quad [R_{+}, R_{-}] = 2R_3.$$

Поляризация ансамбля квантовых частиц P напрямую зависит от дипольных матричных элементов.

Чтобы ее сосчитать, необходимо выразить исходную матрицу плотности ансамбля и окружения ρ через преобразованную матрицу, поскольку поляризация атомного ансамбля

$$P = \text{Tr}_F \rho d^E, \quad d^E = \sum_{i,k,j} d_{kj} |E_k\rangle^{(i)} \langle E_j|^{(i)}.$$

Здесь d^E — оператор дипольного момента ансамбля частиц, а след берется по состояниям электромагнитного поля. Исходная матрица открытой системы и окружения, согласно (2) и определению матрицы плотности как $\rho = |\Psi^{P+F}\rangle \langle \Psi^{P+F}|$, дается выражением $\rho = e^{iS} \tilde{\rho} e^{-iS}$, так что, используя свойство следа, имеем

$$\begin{aligned} P &= \text{Tr}_F(\rho d^E) = \text{Tr}_F(e^{iS} \tilde{\rho} e^{-iS} d^E) = \\ &= \text{Tr}_F(\tilde{\rho} e^{-iS} d^E e^{iS}) = \text{Tr}_F(\tilde{\rho} \tilde{d}^E). \end{aligned}$$

Здесь мы вернули знак тильда, чтобы различать преобразованные и непреобразованные величины. Представленное выражение справедливо как в картине Шредингера, так и в картине Дирака.

Величину $D \equiv \tilde{d}^E = e^{-iS} d^E e^{iS}$ называем оператором эффективного дипольного момента системы и, применяя формулу Бейкера – Хаусдорфа, имеем

$$\begin{aligned} D &= e^{-iS} d^E e^{iS} = d - i[S, d] - \frac{1}{2}[S, [S, d]] + \dots = \\ &= \sum_{kj} D_{kj} |E_k\rangle \langle E_j|. \quad (6) \end{aligned}$$

Заметим, что в формуле (6) под величиной D можно понимать два выражения — оператор эффективного дипольного момента \tilde{d} одной квантовой частицы и оператор эффективного дипольного момента всего ансамбля квантовых частиц \tilde{d}^E . В нулевом порядке различие между этими выражениями состоит лишь в суммировании по частицам ансамбля $d^E = \sum_i d$. Однако, если учитывать более высокие порядки алгебраической теории возмущений, то для взаимодействующих между собой частиц будут отличия от простого суммирования, состоящие в появлении интерференционных слагаемых. В контексте рассматриваемой задачи в (6) понимается эффективный дипольный момент всего ансамбля $D \equiv \tilde{d}^E$.

Поскольку мы рассматриваем квантовые частицы, обладающие ПДМ, т.е. матричные элементы $d_{11} \neq 0$ и $d_{22} \neq 0$, получаем, что в средах с ПДМ появляется низкочастотная (LF) составляющая поляризации. Эта составляющая в первом неисчезающем порядке алгебраической теории возмущений имеет простой вид:

$$P^{LF} = \text{Tr}(\rho^P d^{CDM}). \quad (7)$$

Подчеркнем, что в формуле (7) ρ^P — преобразованная матрица плотности ансамбля частиц, а составляющая d^{CDM} оператора дипольного момента отвечает ПДМ ансамбля, так что в отсутствие разброса параметров частиц ансамбля

$$d^{CDM} = d_{11} \sum_i |E_1\rangle^{(i)} \langle E_1|^{(i)} + d_{22} \sum_i |E_2\rangle^{(i)} \langle E_2|^{(i)}.$$

Для вычисления поляризации P^{LF} и определения параметров генерируемого низкочастотного излучения необходимо знать кинетическое уравнение для матрицы плотности ансамбля одинаковых квантовых частиц $\rho^P = \text{Tr}_F \rho$. Здесь нетрудно обобщить результаты, полученные в [15], на учет ПДМ.

Выражение для низкочастотной поляризации P^{LF} в случае невзаимодействующих частиц может быть представлено через одночастичную преобразованную матрицу плотности ρ_{11}^{1P} :

$$P^{LF} = N_p (d_{11} \rho_{11}^{1P} + d_{22} \rho_{22}^{1P}).$$

Это представление отличается от (7) и справедливо лишь в задачах взаимодействия классических электромагнитных полей с ансамблем невзаимодействующих между собой квантовых частиц [12, 13].

3. НИЗКОЧАСТОТНАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ АНСАМБЛЯ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ С ПДМ

Будем рассматривать состояния ансамбля, симметричные по перестановкам частиц. Тогда их удобно описывать собственными векторами $|m\rangle$ оператора R_3 : $R_3|m\rangle = m|m\rangle$, $-r \leq m \leq r$. Здесь r — параметр, характеризующий неприводимое представление алгебры угловых моментов $\text{su}(2)$ для описания симметричных состояний ансамбля из $2r = N_p$ одинаковых квантовых частиц [17]. Состояние ансамбля из полностью возбужденных квантовых частиц дается вектором $|r\rangle$, а состояние ансамбля, все частицы которого находятся в основном состоянии, — вектором $| -r\rangle$.

Кинетическое уравнение для матрицы плотности ансамбля, отвечающее представленному выше эффективному гамильтониану (4), в марковском приближении [15], имеет замкнутый вид для диагональных матричных элементов $\rho_{mm}^P = \langle m|\rho^P|m\rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{mm}^P}{d\tau} &= -2\chi^2 g_{m-1} C_{m-1} \rho_{mm}^P + \\ &+ 2\chi^2 g_{m+1} C_m \rho_{m+1, m+1}^P, \quad (8) \end{aligned}$$

в котором присутствуют как операторы стандартной теории сверхизлучения [17]

$$g_{m\ m-1} = \langle m | R_+ | m-1 \rangle \langle m-1 | R_- | m \rangle = (r+m)(r-m+1),$$

так и множители C_m , определяемые слагаемыми $H^{(2)}$ эффективного гамильтониана (4), отвечающие второму порядку по взаимодействию с окружающим электромагнитным полем:

$$C_m = \frac{1 - \cos(r\eta_+ + \eta_- m)}{(r\eta_+ + \eta_- m)^2}.$$

Множители C_m определяют появление эффекта стабилизации возбужденных состояний, когда с ростом $2r = N_p \geq N_{cr}$ появляются коллективные состояния, для которых $C_{m_0} = 0$ за счет параметров ансамбля, удовлетворяющих условию

$$\frac{N_p}{2} \eta_+ + \eta_- m_0 = 2\pi, \quad -\frac{N_p}{2} < m_0 \leq \frac{N_p}{2}.$$

Тогда переход с коллективного уровня $m_0 + 1$ на низколежащий уровень m_0 подавлен и в отсутствие начальной когерентности в ансамбле динамика подсистем, заселяющих коллективные энергетические уровни $m_0 + 1 \leq m \leq r$ и $-r \leq m \leq m_0$, становится не зависимой друг от друга. Частицы «накапливаются» на уровнях $|m_0\rangle$ и $| -r \rangle$, так что часть энергии возбужденного ансамбля коллективно не высвечивается и сравнительно медленно диссипирует за счет некогерентных излучательных процессов, которыми в данном подходе пренебрегается. Данный эффект определяется параметрами штарковского взаимодействия η_{\pm} , которыми все пренебрегают, но которые, несмотря на свою малость, играют существенную роль из-за другой алгебраической природы штарковского взаимодействия с высокочастотными широкополосными квантовыми полями [15].

Уравнение (8) записано в безразмерном виде. Безразмерное время $\tau = \omega_{21} t$, параметр $\chi = \sqrt{2} \omega_{21} d_{12} / \mu c^{3/2} \sqrt{\hbar}$ представляет собой безразмерную константу взаимодействия с электромагнитным полем первого порядка, параметры $\eta_{\pm} = \Pi_{\pm}(\omega_{21}, \omega_{21}) / d_{12}^2 / (\hbar \omega_{21})$ характеризуют штарковское взаимодействие с электромагнитным полем и определяет второй порядок взаимодействия.

В пренебрежении двухквантовым распадом возбужденного уровня $|E_2\rangle$ основное отличие динамики рассматриваемой системы с ПДМ состоит в наведении низкочастотной поляризации, которая в первом порядке алгебраической теории возмущений имеет

вид (7). Составляющая d^{CDM} оператора дипольного момента ансамбля, отвечающая наличию ПДМ, может быть представлена в виде (с учетом соотношений $R_- R_+ + R_+ R_- = N_p$, $R_+ R_- - R_- R_+ = 2R_3$)

$$P^{LF} = \sum_{m=-r}^r [d_{22}(r+m) + d_{11}(r-m)] \rho_{mm} = p^{LF}(t) + p_0, \quad (9)$$

$$p^{LF}(t) = (d_{22} - d_{11}) \sum_{m=-r}^r m \rho_{mm} \quad (10)$$

(здесь и далее все снова дается в размерных величинах).

Постоянная составляющая поляризации квантового ансамбля $p_0 = \text{const}$ связана с существованием у частиц системы ПДМ и нашим предположением об их выстроенности вдоль определенной оси. На observable генерацию низкочастотного излучения это слагаемое не влияет.

Подчеркнем, что простое представление поляризации ансамбля квантовых частиц на низких частотах по сравнению с частотой квантового перехода ω_0 отвечает лишь наличию ПДМ и использованию в выражении для эффективного дипольного момента нулевого порядка по взаимодействию.

4. ИМПУЛЬС НИЗКОЧАСТОТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ СВЕРХИЗЛУЧЕНИИ

Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ все квантовые частицы ансамбля возбуждены, так что из матричных элементов матрицы плотности отличен от нуля только следующий: $\rho_{rr}(0) = 1$. Такие начальные условия отвечают обычному сверхизлучению Дике [17], однако в отличие от сверхизлучения Дике в уравнениях (7) учтен эффект подавления коллективной релаксации штарковским взаимодействием, который ярко проявляется в локализованных атомных ансамблях [15]. Кроме того, уравнения (8) и (9) учитывают наличие у атомов ПДМ.

Низкочастотное излучение можно найти, воспользовавшись классическими представлениями о дипольном излучении ансамбля диполей. Классическая формула для полной интенсивности дипольного излучения дает выражение

$$I^{LF} = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{d^2 P^{LF}(t)}{dt^2} \right)^2 = \frac{2(d_{22} - d_{11})^2}{3c^3} \left(\frac{d^2}{dt^2} \sum_{m=-r}^r m \rho_{mm} \right)^2. \quad (11)$$

Величина

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=-r}^r m \rho_{mm}$$

пропорциональна скорости изменения средней энергии атомной системы. Ее можно выразить через интенсивность высокочастотного сверхизлучения $I^{SR}(t)$, воспользовавшись стандартными представлениями [17] о связи убыли энергии в ансамбле с интенсивностью излучения:

$$\frac{d}{dt} \sum_{m=-r}^r m \rho_{mm} = -(\hbar\omega_{21})^{-1} I^{SR}(t),$$

$$I^{SR}(t) = \hbar\omega_{21} \frac{dn}{dt}.$$

В результате интенсивность I^{LF} низкочастотного излучения определяется интенсивностью сверхизлучения ансамбля с ПДМ:

$$I^{LF} = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{d^2 P^{LF}(t)}{dt^2} \right)^2 = \frac{2(d_{22} - d_{11})^2}{3c^3 \hbar^2 \omega_{21}^2} \left(\frac{dI^{SR}(t)}{dt} \right)^2. \quad (12)$$

В простейшем случае сверхизлучения ансамбля частиц, число которых $1 \ll N_p \ll N_{cr}$ недостаточно для проявления эффекта стабилизации возбужденных состояний, имеем простую двугорбую форму импульса терагерцевого излучения. Она может быть описана аналитически:

$$I^{LF} = \frac{(d_{22} - d_{11})^2}{6c^3} \omega_{21}^4 N_p^4 \chi^8 \beta^4 \frac{\text{sh}^2[\gamma N_p(t - t_D)/2]}{\text{ch}^6[\gamma N_p(t - t_D)/2]}.$$

Здесь мы использовали размерные обозначения (c — скорость света в вакууме, β — безразмерный геометрический фактор [17], $\gamma = \chi^2 \beta \omega_{21}$ — скорость спонтанного распада одиночной частицы, $t_D = (\gamma N_p)^{-1} \ln(\gamma N_p / \omega_{21})$ — время задержки максимума импульса сверхизлучения [17]). Из-за обращения гиперболического синуса в нуль при $t = t_D$ интенсивность импульса низкочастотного излучения также становится равной нулю, а его форма имеет двугорбовый симметричный вид. Временной интервал T между максимумами низкочастотного излучения $T = 2 \ln(2 + \sqrt{3}) / \gamma N_p$ уменьшается с ростом числа частиц (при числе частиц меньше критического значения).

Заметим, что симметрию выражения (12) в реальности не проявляется, поскольку излучение начинается с момента времени $t = 0$.

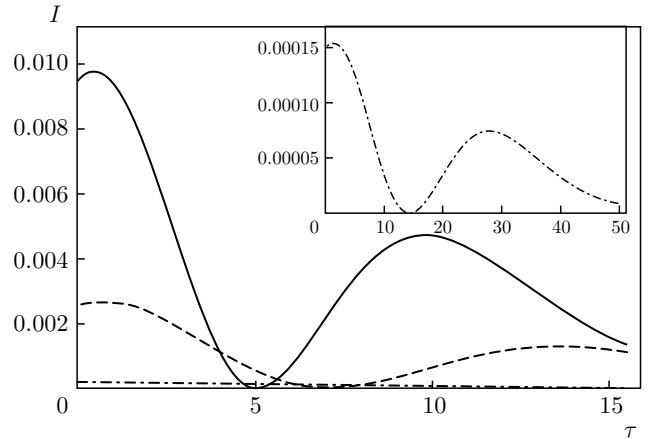


Рис. 1. Импульс низкочастотного излучения полностью возбужденного ансамбля с числом частиц, меньшим критического. Параметры штарковского взаимодействия рабочих уровней одинаковы $\eta_- = 0$. Сплошная кривая — $\eta_+ = 3\pi/4$, штриховая кривая — $\eta_+ = 3\pi/4 + 0.2$, штрихпунктирная кривая — $\eta_+ = 3\pi/4 + 0.4$. Штрихпунктирная кривая отвечает параметрам, наиболее близким к критическим из представленных, так что интенсивность этого сигнала очень мала. Эта кривая отдельно воспроизведена на вставке в другом масштабе

С ростом числа частиц в ансамбле меняется как высокочастотное сверхизлучение, так и низкочастотное (11). Характер изменений зависит и от числа частиц в ансамбле и от соотношения параметров штарковского взаимодействия η_{\pm} . Также существенным оказывается начальное возбуждение ансамбля. Здесь яркие различия характеризуют полностью возбужденное состояние $\rho_{rr}(0) = 1$ и полувозбужденное состояние $\rho_{00}(0) = 1$ (матричные элементы указаны в базе Дике).

При числе частиц меньше критического и одинаковых значениях параметров штарковского взаимодействия рассматриваемых квантовых уровней $\eta_- = 0$ типичную форму импульса низкочастотного излучения полностью возбужденного ансамбля характеризует рис. 1.

Эта же форма сохраняется для полностью возбужденного ансамбля и при превышении числом частиц критического значения, если различия в параметрах штарковского взаимодействия нет $\eta_- = 0$.

Различие в параметрах штарковского взаимодействия $\eta_- \neq 0$ усиливает формы низкочастотного излучения (рис. 2).

Крайним случаем указанного различия является переход к четкой одногорбой форме профиля низкочастотного излучения полностью возбужденного

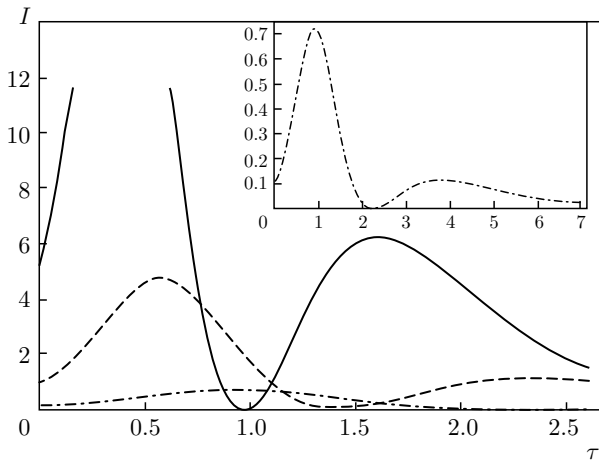


Рис. 2. Импульс низкочастотного излучения полностью возбужденного ансамбля с числом частиц, меньшим критического. Параметры штарковского взаимодействия рабочих уровней разные $\eta_- = \pi/8$. Сплошная кривая — $\eta_+ = \pi/4$, штриховая кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 0.1$, штрихпунктирная кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 0.2$. Штрихпунктирная кривая отвечает параметрам, наиболее близким к критическим из представленных, так что интенсивность этого сигнала очень малая. Эта кривая отдельно воспроизведена на вставке в другом масштабе

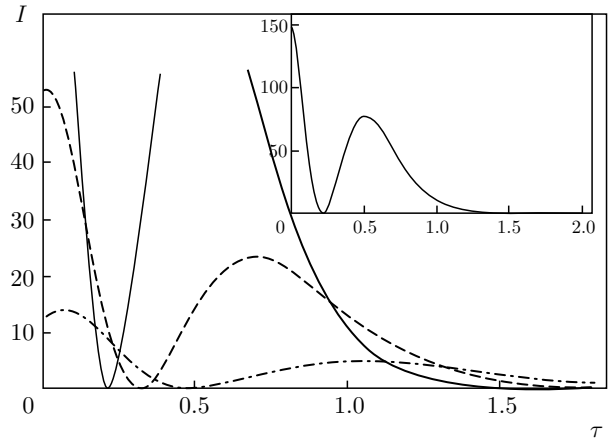


Рис. 4. Интенсивность низкочастотного импульса полувозбужденного ансамбля с числом частиц, меньшим критического. Параметры штарковского взаимодействия рабочих уровней разные $\eta_- = \pi/4$. Сплошная кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 0.4$ (эта кривая отдельно представлена на вставке), штриховая кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 0.5$, штрихпунктирная кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 0.6$

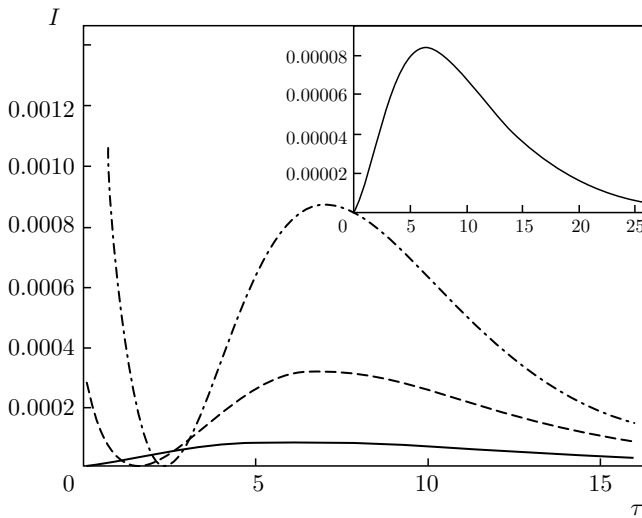


Рис. 3. Интенсивность низкочастотного импульса полностью возбужденного ансамбля с числом частиц, большим критического. Параметры штарковского взаимодействия рабочих уровней разные $\eta_- = \pi/8$. Сплошная кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 0.8$, штриховая кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 0.9$, штрихпунктирная кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 1.0$. Сплошная кривая отвечает параметрам, наиболее близким к критическим из представленных, так что интенсивность этого сигнала очень малая. Эта кривая отдельно воспроизведена на вставке в другом масштабе

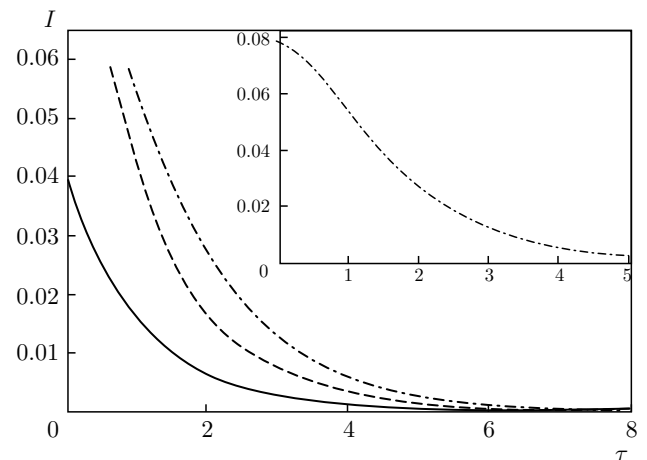


Рис. 5. Интенсивность низкочастотного импульса полувозбужденного ансамбля с числом частиц, большим критического. Параметры штарковского взаимодействия рабочих уровней различные $\eta_- = \pi/4$. Сплошная кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 1.3$, штриховая кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 1.45$, штрихпунктирная кривая — $\eta_+ = \pi/4 + 1.6$. Эта кривая отдельно представлена на вставке

ансамбля при числах частиц ансамбля больших критического (рис. 3).

Подчеркнем, что указанные изменения формы импульса низкочастотного излучения, а именно, переход от двугорбой формы к одногорбой, характеризовали ансамбль полностью возбужденных час-

тиц. Случай полувозбужденного ансамбля отличается переходом от четкой одногорбой (колоколообразной) формы низкочастотного сигнала к размытому профилю без каких-либо четких пиков профиля. Это видно на рис. 4, 5. Подчеркнем, что отсутствие пика отличает случай, когда число частиц ансамбля больше критического.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Системы с ПДМ всегда характеризуются низкочастотной составляющей поляризации. Представленное рассмотрение генерации низкочастотного излучения основано на применении алгебраической теории возмущений [23, 25–27] и классической теории излучения диполя. При этом проявляется особенность динамики многочастичных ансамблей, названная нами невинеровской [16] и состоящая в роли малых слагаемых второго порядка алгебраической теории возмущений. Эти слагаемые описывают взаимодействие частиц с широкополосным квантованным полем, про которое говорят как о высокочастотном эффекте Штарка [18] или штарковском взаимодействии [27]. Именно оно влияет на форму низкочастотного импульса, обеспечивая генерацию одногорбой и двугорбой формы импульсов и импульсов без отчетливых пиков. Помимо возможных практических приложений исследованные особенности низкочастотного излучения могут быть использованы для установления типа динамики — винеровской или невинеровской — открытых квантовых систем.

Финансирование. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 19-02-00234а).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Сазонов, Письма в ЖЭТФ **96**, 281 (2012).
2. А. Н. Бугай, ЭЧАЯ **50**, 185 (2019).
3. M. Agrotis, N. M. Ercolani, S. A. Glasgow, and J. V. Moloney, *Physica D* **138**, 134 (2000).
4. А. И. Маймистов, Ж. Капуто, *Опт. и спектр.* **94**, 275 (2003).
5. M. A. Agrotis, *Phys. Lett. A* **315**, 81 (2003).
6. M. A. Agrotis, *Physica D* **183**, 141 (2003).
7. M. A. Agrotis and N. M. Ercolani, *Physica D* **212**, 82 (2005).
8. А. А. Заболотский, ЖЭТФ **133**, 970 (2008).
9. S. V. Sazonov, *Opt. Commun.* **380**, 480 (2016).
10. С. В. Сазонов, Н. В. Устинов, ЖЭТФ **151**, 249 (2017).
11. S. V. Sazonov and N. V. Ustinov, *Phys. Rev. A* **98**, 063803 (2018).
12. А. М. Башаров, *J. Phys. CS* **714**, 012005 (2016).
13. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **103**, 16 (2016).
14. И. Ю. Честнов и др., Письма в ЖЭТФ **104**, 167 (2016).
15. А. М. Башаров, *Phys. Rev. A* **84**, 013801 (2011).
16. А. М. Башаров, А. И. Трубилко, ЖЭТФ **155**, 425 (2019).
17. M. G. Benedict, A. M. Ermolaev, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov, and E. D. Trifonov, *Super-Radiance: Multiatomic Coherent Emission*, Bristol and Philadelphia: IOP (1996).
18. В. С. Бутылкин, А. Е. Каплан, Ю. Г. Хронополо, Е. И. Якубович, *Резонансные взаимодействия света с веществом*, Наука, Москва (1977).
19. А. М. Башаров, Письма в ЖЭТФ **70**, 434 (1999).
20. C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum Noise*, Springer-Verlag, Berlin 2000 (2004).
21. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, *Введение в нелинейную механику*, РХД, Москва (2004) (переиздание книги 1937 г.).
22. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Гостехиздат, Москва (1958).
23. А. М. Башаров, А. И. Маймистов, Э. А. Манькин, ЖЭТФ **84**, 487 (1983).
24. Е. Ю. Перлин, Е. Ю. Федоров, М. Б. Кашевник, ЖЭТФ **85**, 1357 (1983).
25. А. М. Башаров, ЖЭТФ **102**, 1126 (1992).
26. A. I. Maimistov and A. M. Basharov, *Nonlinear Optical Waves*, Kluwer Academic, Dordrecht (1999).
27. А. М. Башаров, ЖЭТФ **142**, 419 (2012).

28. J. H. Van Vleck, *Phys. Rev.* **33**, 467 (1929).
29. H. Frohlich, *Phys. Rev.* **79**, 845 (1950).
30. W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, Clarendon Press, Oxford (1954).
31. Г. Л. Бир, Г. Е. Пикус, *Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках*, Наука, Москва (1972).
32. M. Wagner, *Unitary Transformations in Solid State Physics*, North-Holland, Amsterdam (1986).
33. F. Wegner, *Ann. Phys.* **3**, 77 (1994).
34. S. D. Glazek and K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **48**, 5863 (1993).
35. S. D. Glazek and K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **49**, 4214 (1994).
36. A. M. Basharov, *J. Phys. CS* **859**, 012003 (2017).
37. H.-P. Breuer and F. Petruccione, *Theory of Open Quantum Systems*, OUP, Oxford (2002).
38. L. Accardi, Y. G. Lu, and I. Volovich, *Quantum Theory and its Stochastic Limit*, Springer-Verlag, Berlin (2002).