

ЗАРЯДОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ МАГНИТНЫХ ОРБИТ

Ж.-И. Фортэн * **

*Department of Physics and Astronomy and Center for Theoretical Physics, Seoul National University
08826, Seoul, Korea*

Поступила в редакцию 23 августа 2019 г.,
после переработки 22 декабря 2019 г.
Принята к публикации 24 января 2020 г.

(Перевод с английского)

CHARGE OSCILLATIONS IN A SIMPLE MODEL OF INTERACTING MAGNETIC ORBITS

Jean-Yves Fortin

Исследуются точные собственные состояния для двух или более взаимодействующих электронных орбит в магнитном поле для класса факторизуемых гамильтонианов с взаимодействующими поверхностями Ферми. Исследованы условия существования операторов рождения и уничтожения, позволяющие получить собственные состояния. Для случая двух взаимодействующих циклотронных орбит рассмотрены зависимости от обратного поля колебаний функции перекрытия и переноса зарядовой плотности между орбитами. В квазиклассическом режиме получены выражения для частот Фурье, которые зависят от геометрической структуры электронной зоны. Получено обобщение этого построения для цепочки из нескольких взаимодействующих орбит с точными собственными функциями.

DOI: 10.31857/S0044451020060073

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача двух состояний в квантовой механике, например, двухуровневая модель Розена – Зенера, позволяет получать точную информацию о том, как волновая функция распространяется через контакт, и, кроме того, имеет много важных применений в квантовых системах с зависимостью от времени, см., например работы [1–4], в которых подробно изучаются резонансные и фазовые сдвиги для тех потенциалов, для которых имеется точное решение. Эту общую задачу можно также использовать в случае магнитного пробоя, когда квазичастица движется по поверхности Ферми, состоящей из нескольких листов, связанных контактами, через которые частица

может туннелировать. Реализация таких поверхностей Ферми, напоминающих линейную цепочку связанных орбит, представлена на рис. 1 для органического проводника (BEDO-TTF)₅[CsHg(SCN)₄]₂ (би-этилендиокси-тетрагидрофульвален) [5]: входящий волновой пакет, находящийся на гигантской орбите β (a), переходит на циклотронную орбиту α (b) и отражается на ту же орбиту β (c) в пределах цепочки. Также существуют поверхности Ферми с конечным числом взаимодействующих орбит, причем фурье-спектр их магнитных колебаний подробно изучен. Например, компенсированные ферми-структуры, имеющие только три зоны, состоящие из одной дырочной и двух электронных зон, можно найти в соединении α -“псевдо- κ ”-(ET)₄H₃O[Fe(C₂O₄)₃](C₆H₄Br₂), где слои типа α и типа “псевдо- κ ” соответствуют слоям проводника и изолятора [6]. При магнитопробойном контакте гамильтониан можно линеаризовать, тогда два листа гибридизуются с некоторой энергией взаимодействия g . Такой простейший вид двухуровнево-

* E-mail: jean-yves.fortin@univ-lorraine.fr

** Permanent address: Laboratoire de Physique et Chimie Théoriques, CNRS (UMR 7019), Université de Lorraine, BP 70239 F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex, France

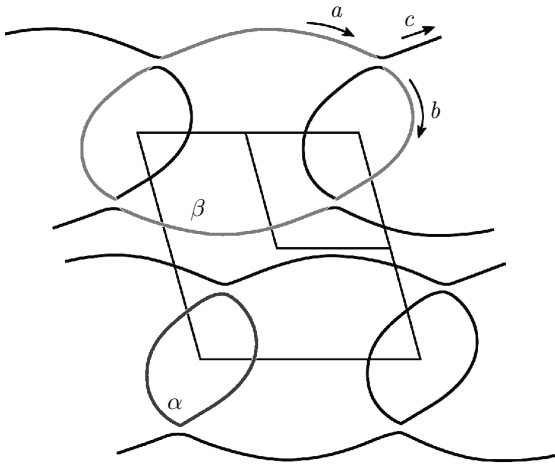


Рис. 1. Поверхность Ферми органического проводника (BEDO-TTF)₅[CsHg(SCN)₄]₂ [5, 23]. Она состоит из цепочки небольших орбит α и орбит с магнитным пробоем β . Траекториям электронов соответствуют приходящие волновые пакеты (a), которые рассеиваются (b) и распространяются дальше (c)

го гамильтониана был получен для различных случаев в работе [7] с использованием аппроксимации вблизи области туннелирования. Вероятность туннелирования экспоненциально мала, если рассматривать отношение пробойного поля к магнитному [8], а также полевою зависимость фазы Онзагера [9, 10] (в дополнение к тому, что фаза изменяется на $\pi/2$ каждый раз, когда частица отражается от контакта).

В настоящей работе получены простые и точные выражения для собственных состояний для многозонных проводников, для которых имеет место магнитное туннелирование на таких поверхностях Ферми, состоящих, например, из цепочки из двух или более связанных орбит [11].

Вообще говоря, для решения гамильтонианов при комплексных потенциалах, кроме квазиклассического подхода, основанного на методе ВКБ [12,13], где используется матрица рассеяния для взаимодействующих орбит, имеются и другие подходы. Например, метод факторизации, или метод Дарбу [14–19], основанный на рассмотрении гамильтониана, который можно факторизовать как

$$H_1 = \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} = -\partial_x^2 + V_1(x),$$

где $\mathcal{D} = \partial_x + Q(x)$, $\mathcal{D}^\dagger = -\partial_x + Q(x)$

— операторы первого порядка. Теперь рассмотрим партнерский гамильтониан H_2 , построенный путем перестановки двух операторов \mathcal{D} и \mathcal{D}^\dagger :

$$H_2 = \mathcal{D} \mathcal{D}^\dagger = -\partial_x^2 + V_2(x).$$

$V_1(x)$ и $V_2(x)$ — потенциалы, являющиеся суперсимметричными партнерами, они выражаются через $Q(x)$ и ее производную. Собственные функции и собственные значения гамильтониана H_2 тесно связаны с соответствующими собственными функциями и собственными значениями гамильтониана H_1 . Если для H_1 можно получить точное выражение, то его можно получить и для H_2 [15, 20, 21]. Это позволяет получить точные решения уравнения Шредингера с нетривиальными потенциалами $V_2(x)$, например, для классов потенциалов с двумя ямами [22].

Еще одна возможность, которую мы используем в настоящей работе, заключается в рассмотрении факторизованного гамильтониана такого же вида, $H = \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D}$, когда $Q(x)$ представляет собой обобщенную комплексную матрицу, структура которой определяется следующим условием: коммутатор операторов \mathcal{D} и \mathcal{D}^\dagger удовлетворяет соотношению $[\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger] = 1$. В этом случае \mathcal{D} и \mathcal{D}^\dagger называются лестничными операторами или операторами уничтожения и рождения, так что, зная основное состояние, можно немедленно получить собственные состояния, при этом энергетический спектр является дискретным. В случае единственной зоны это условие просто означает, что $Q(x)$ является линейной функцией x (гармонический осциллятор), однако для систем с двумя или многими зонами $Q(x)$ может иметь более сложный вид. Кроме того, как мы увидим, матрицу $Q(x)$ можно выбрать так, что два листа поверхности Ферми для данного гамильтониана будут образовывать магнитный зазор. Решение такой задачи является целью настоящей работы. Мы также покажем, что просто переходя к многозонному гамильтониану, мы получаем модель приведенной на рис. 1 линейной цепочки связанных орбит, которая обсуждалась выше.

2. МОДЕЛЬ

Блоховские электроны в магнитном поле обычно описываются с помощью подстановки Пайерлса [24, 25]. При этом блоховский гамильтониан $H(\mathbf{k})$ для дисперсии энергии заменяется на $H(-i\nabla + e\mathbf{A}/\hbar)$, где $-e$ — заряд электрона. Такое приближение обычно работает вблизи поверхности Ферми или для гамильтонианов в случае сильной связи [26]. Оценка квазиимпульса $-i\nabla + e\mathbf{A}/\hbar$ в калибровке Ландау $\mathbf{A} = (0, Bx_1, 0)$ приводит к аналогии с движением одномерной частицы в потенциале [27], если отождествить безразмерные операторы

$$\hat{x} = a_2 (-i\partial_2 + x_1/l_B^2)$$

и

$$\hat{p} = -ia_1\partial_1$$

с эффективными координатой и импульсом; здесь (a_1, a_2) — типичные размеры зоны Бриллюэна единичной ячейки, а $l_B^{-2} = eB/\hbar$ — обратный квадрат магнитной длины. Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{x}, \hat{p}] = ia_1a_2eB/\hbar \equiv ih,$$

где $h = a_1a_2/l_B^2$ — безразмерная эффективная постоянная Планка. Его также можно определить как отношение магнитного потока через единичную ячейку к квантовому потоку h/e , и часто его рассматривают как малый контрольный параметр в квазиклассических теориях, если размер ячеек в зоне Бриллюэна порядка 1 \AA или если магнитное поле порядка 1 Тл. Следует заметить, что в случае положительных зарядов, заряд e , наоборот, отрицательный, поэтому чтобы эффективная постоянная Планка h была положительной, можно поменять местами \hat{x} и \hat{p} для сохранения коммутационного соотношения.

Возьмем за основу выражение для гамильтониана для электрона в равномерном магнитном поле B , где $H(\mathbf{k})$ квадратичен по импульсу \mathbf{k} и описывает простой гармонический осциллятор вблизи поверхности Ферми, поэтому его можно факторизовать в терминах лестничных операторов или операторов рождения и уничтожения [28]. Введем представление

$$\hat{p} = -ih\partial_x$$

и рассмотрим класс дифференциальных операторов для многозонных систем, которые определяются как

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2h}} [-h\sigma_0\partial_x + Q^\dagger(x)], \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{\sqrt{2h}} [h\sigma_0\partial_x + Q(x)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Тогда можно построить факторизованный эрмитов гамильтониан \hat{H} :

$$\hat{H} = 2h\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D} = -\sigma_0h^2\partial_x^2 + [Q^\dagger(x) - Q(x)]h\partial_x - hQ'(x) + Q^\dagger(x)Q(x), \quad (2)$$

где $Q(x)$ — матрица общего вида, зависящая от x , а $\sigma_{i=0,\dots,3}$ — матрицы Паули. Известно, что с точки зрения суперсимметрии [15] произведение $Q^\dagger(x)Q(x)$ описывает взаимодействие между бозонами, а член $hQ'(x)$ соответствует фермион-бозонному взаимодействию, при этом оба они зависят от

одной и той же функции $Q(x)$. Если $Q'(x)$ — константа, то постоянное фермион-бозонное взаимодействие отсутствует, как для случая бозонного гармонического осциллятора. Классический гамильтониан H_c в пределе $\hbar \rightarrow 0$ получается заменой оператора \hat{p} на импульсную переменную p :

$$\begin{aligned} H_c(x, p) &= (Q^\dagger(x) - i\sigma_0p)(Q(x) + i\sigma_0p) = \\ &= \sigma_0p^2 + Q^\dagger(x)Q(x) + ip[Q^\dagger(x) - Q(x)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Поверхность Ферми $H_x(x, p) = E\sigma_0$ на плоскости (x, p) задается собственными значениями H_c при постоянной энергии E и обычно образована двумя замкнутыми поверхностями. Ниже мы рассмотрим примеры матриц $Q(x)$, для которых имеет место магнитное туннелирование между двумя листами поверхности Ферми. Коммутационное соотношение для операторов \mathcal{D} и \mathcal{D}^\dagger определяется матрицей $P(x)$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}, \mathcal{D}^\dagger] &= \frac{1}{2} (\partial_x Q(x) + \partial_x Q^\dagger(x)) + \\ &+ \frac{1}{2h} [Q(x), Q^\dagger(x)] = P(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Если $P(x)$ — единичная матрица, то это соотношение представляет собой обычный бозонный коммутатор для операторов рождения и уничтожения \mathcal{D}^\dagger и \mathcal{D} . При этом собственные состояния

$$\Psi_n = (\phi_n, \tilde{\phi}_n)^\top$$

можно построить из основного состояния Ψ_0 , для которого $\mathcal{D}\Psi_0 = 0$, действуя на него лестничным оператором \mathcal{D}^\dagger . Например, это имеет место в случае, когда система состоит из двух независимых гармонических осцилляторов, расположенных в точках $\pm x_c$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q^\dagger(x) = \begin{pmatrix} x + x_c & 0 \\ 0 & x - x_c \end{pmatrix}, \\ P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Исследуем условие, при котором может иметь место туннелирование, а именно, если для матрицы общего вида $Q(x)$ коммутатор $P(x) = 1$. Сначала разложим матрицу $Q(x)$ в базисе матриц Паули:

$$Q(x) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i(x)\sigma_i,$$

где α_i — комплексные функции, причем для этой матрицы коммутатор $P(x)$ равен

$$P(x) = \frac{1}{2} \partial_x (\alpha_0(x) + \bar{\alpha}_0(x)) \sigma_0 + \frac{1}{2} \partial_x (\alpha + \bar{\alpha}) \cdot \sigma + \frac{i}{h} (\alpha \times \bar{\alpha}) \cdot \sigma. \quad (6)$$

Выберем функции α_i так, что $P(x) = \sigma_0$. Тогда получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x \operatorname{Re}(\alpha_0) &= 1, \\ \partial_x \operatorname{Re}(\alpha) + \frac{2}{h} \operatorname{Re}(\alpha) \times \operatorname{Im}(\alpha) &= 0, \\ \partial_x \operatorname{Re}(\alpha)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Эта система аналогична уравнению движения частицы, расположенной в точке $\operatorname{Re}(\alpha)$, которая вращается вокруг углового вектора $\Omega = (2/h) \operatorname{Im}(\alpha)$ на сфере постоянного радиуса $\|\operatorname{Re}(\alpha)\|$, при этом x играет роль переменной динамического времени. Решение для α_0 с точностью до константы имеет вид

$$\alpha_0(x) = x + i w(x),$$

где $w(x)$ — любая вещественная функция x . Ограничимся решением

$$\alpha_0(x) = x,$$

которое в гармоническом случае соответствует смещению осциллятора. Ниже мы покажем, что наличие $w(x)$ эквивалентно добавлению к волновой функции калибровочного члена

$$\exp \left\{ i h^{-1} \int^x w(y) dy \right\}.$$

$$H_c(x, p) = \begin{pmatrix} (p + \omega)^2 + (x + x_c)^2 + g^2 & 2ge^{-i\theta}(x - i\omega) \\ 2ge^{i\theta}(x + i\omega) & (p - \omega)^2 + (x - x_c)^2 + g^2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Поверхность Ферми, образованная двумя листами, определяется решением уравнения $\det(H_c - \sigma_0 E) = 0$:

$$E = p^2 + \omega(x)^2 + x^2 + x_c^2 + g^2 \pm 2\sqrt{(p\omega(x) + xx_c)^2 + g^2(x^2 + \omega(x)^2)}. \quad (12)$$

В качестве примера на рис. 2 показана поверхность Ферми, образованная двумя листами при $E = 3$, $x_c = 1$, $g = 0.05$ и $\omega(x) = 1$. Две зоны разделены зазором, размер которого зависит от g . На рис. 3 приведен еще один пример поверхности Ферми при $\omega(x) = x$, $x_c = 1$, $g = 0.5$, $E = 5$. В этом случае поверхности пересекаются при $x = 0$, потому что $\omega(0) = 0$ и квадратный корень в уравнении (12)

Для других компонент рассмотрим решение

$$\alpha = (u(x), v(x), i\omega(x) + x_c)^\top,$$

где u , v и ω — вещественные функции. Константа x_c определяет, где находятся центры обоих осцилляторов, а именно, при $x = \pm x_c$. Система уравнений с условием (7) имеет вид

$$u'(x) + \frac{2}{h} \omega(x) v(x) = 0, \quad v'(x) - \frac{2}{h} \omega(x) u(x) = 0. \quad (8)$$

Выберем ее решения в виде

$$u(x) = g \cos \theta(x), \quad v(x) = g \sin \theta(x),$$

где

$$\theta(x) = 2h^{-1} \int^x \omega(y) dy,$$

а g — постоянный параметр (постоянная взаимодействия). Отсюда

$$\alpha = (g \cos \theta(x), g \sin \theta(x), i\omega(x) + x_c)^\top. \quad (9)$$

Тогда матрица $Q(x)$ имеет вид

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x + x_c + i\omega(x) & ge^{-i\theta(x)} \\ ge^{i\theta(x)} & x - x_c - i\omega(x) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

а классический гамильтониан имеет вид

равен нулю. Вообще говоря, если $\omega(0) \neq 0$, то две поверхности не пересекаются и появляется зазор.

Следует отметить, что H_c зависит от h через недиагональные элементы $e^{\pm i\theta(x)}$, которые в классическом пределе, когда $h \rightarrow 0$, становятся быстро осциллирующими, однако уравнение (12) для поверхности Ферми в этом пределе не зависит от h , поскольку две экспоненты в уравнении (11) взаимно сокращаются. Вид матрицы Q в уравнении (10) обеспечивает, что коммутатор $P(x) = \sigma_0$ и что собственные функции $\Psi_n = (\phi_n, \check{\phi}_n)^\top$ могут быть построены точно, если подействовать оператором \mathcal{D}^\dagger на основное состояние Ψ_0 :

$$\Psi_n = \mathcal{D}^{\dagger n} \Psi_0 / \sqrt{n!},$$

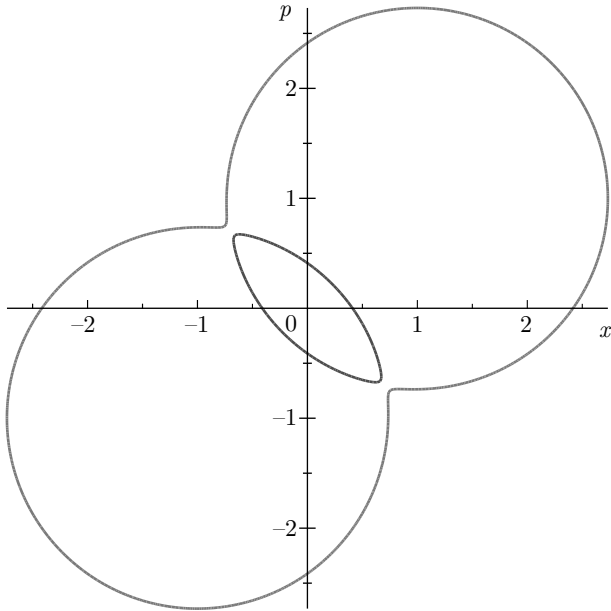


Рис. 2. Поверхность Ферми, определяемая уравнением (12), при $E = 3$, $\omega(x) = 1$, $x_c = 1$ и $g = 0.05$. Красная зона соответствует знаку минус, а синяя — знаку плюс в уравнении (12)

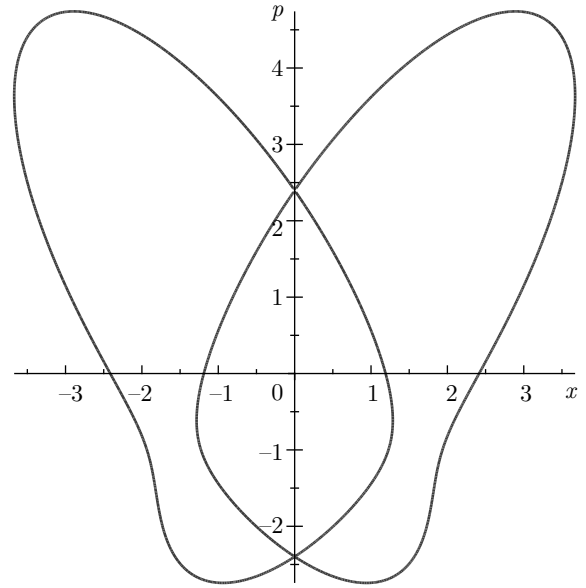


Рис. 3. Поверхность Ферми, определяемая уравнением (12), при $E = 5$, $\omega(x) = x$, $x_c = 1$ и $g = 0.5$. В этом случае между двумя зонами нет зазора, листы пересекаются в точке $x = 0$

при этом энергии уровней Ландау равны $E_n = 2hn$. Энергия основного состояния равна $E_0 = 0$, в отличие от обычного гармонического осциллятора, которому соответствует спектр $E_n = (2n + 1)h$ и энергия в нулевой точке $E_0 = h$. Энергия в нулевой точке зависит от слагаемого $hQ'(x)$ в уравнении (2), обуславливающего взаимодействие между бозонами и фермионами в суперсимметричных теориях [15].

Чтобы вычислить собственные функции, введем преобразование

$$Q(x) = U^\dagger(x)Q_0(x)U(x) + hU^\dagger(x)\partial_x U(x),$$

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} x + \delta & 0 \\ 0 & x - \delta \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$U(x) = e^{\frac{1}{2}\varphi\sigma_2} e^{\frac{1}{2}\theta(x)\sigma_3},$$

где $U(x)$ — унитарная матрица, а $(\varphi, \delta \geq 0)$ — параметры, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$g = \delta \sin(\varphi), \quad x_c = \delta \cos(\varphi). \quad (14)$$

Тогда гамильтониан можно выразить как

$$H = U^\dagger H_0 U,$$

где

$$H_0 = 2h\mathcal{D}_0^\dagger \mathcal{D}_0,$$

$$\mathcal{D}_0 = (h\sigma_0\partial_x + Q_0(x))/\sqrt{2h}.$$

Поэтому собственные функции связаны с элементарной парой гармонических осцилляторов с полиномами Эрмита:

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \phi_n \\ \tilde{\phi}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n!2^n(\pi h)^{1/4}}} \times$$

$$\times U^\dagger \begin{pmatrix} AH_n \left(\frac{x + \delta}{\sqrt{h}} \right) e^{-\frac{1}{2}(x+\delta)^2/h} \\ BH_n \left(\frac{x - \delta}{\sqrt{h}} \right) e^{-\frac{1}{2}(x-\delta)^2/h} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где A и B — комплексные постоянные. U^\dagger принимает явный вид:

$$U^\dagger =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\theta(x)} & -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{-\frac{i}{2}\theta(x)} \\ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{i}{2}\theta(x)} & \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) e^{\frac{i}{2}\theta(x)} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

а компоненты Ψ_n имеют вид

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \frac{e^{-\frac{i}{2}\theta(x)}}{\sqrt{n!2^n(\pi h)^{1/4}}} \times \\ &\times \left(A \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) H_n\left(\frac{x+\delta}{\sqrt{h}}\right) \times \right. \\ &\times e^{-\frac{1}{2h}(x+\delta)^2} - B \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) H_n\left(\frac{x-\delta}{\sqrt{h}}\right) \times \\ &\left. \times e^{-\frac{1}{2h}(x-\delta)^2} \right), \\ \tilde{\phi}_n(x) &= \frac{e^{\frac{i}{2}\theta(x)}}{\sqrt{n!2^n(\pi h)^{1/4}}} \times \\ &\times \left(A \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) H_n\left(\frac{x+\delta}{\sqrt{h}}\right) \times \right. \\ &\times e^{-\frac{1}{2h}(x+\delta)^2} + B \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) H_n\left(\frac{x-\delta}{\sqrt{h}}\right) \times \\ &\left. \times e^{-\frac{1}{2h}(x-\delta)^2} \right). \end{aligned} \tag{17}$$

Следует заметить, что если учитывать функцию общего вида $w(x)$ из решений уравнения (7), то матрица $Q_0(x)$ примет вид

$$Q_0(x) = \begin{pmatrix} x + iw(x) + \delta & 0 \\ 0 & x + iw(x) - \delta \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Легко показать, что решения $(\phi_n, \tilde{\phi}_n)$ преобразуются в

$$(\phi_n, \tilde{\phi}_n) \exp \left\{ ih^{-1} \int^x w(y) dy \right\}.$$

Определим также токи

$$J_n(x) = \frac{1}{2} h \operatorname{Im}(\phi_n^*(x) \partial_x \phi_n(x))$$

и

$$\tilde{J}_n(x) = \frac{1}{2} h \operatorname{Im}(\tilde{\phi}_n^*(x) \partial_x \tilde{\phi}_n(x)).$$

Сумма двух токов удовлетворяет соотношению

$$J_n(x) + \tilde{J}_n(x) = \frac{1}{2} \omega(x) \left(|\tilde{\phi}_n(x)|^2 - |\phi_n(x)|^2 \right).$$

Функция $\omega(x)$ с физической точки зрения эквивалентна внутреннему току, пропорциональному разности заселенностей двух орбиталей. A и B выбраны так, что для каждой орбитали ρ_0 и $\tilde{\rho}_0$ электроны находятся в основном состоянии:

$$\int dx |\phi_0|^2 = \rho_0$$

и

$$\int dx |\tilde{\phi}_0|^2 = \tilde{\rho}_0.$$

Наконец, можно выбрать ρ_0 и $\tilde{\rho}_0$ как функции A и B , они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} &|A|^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + |B|^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \\ &- \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) (A^* B + AB^*) e^{-\frac{\delta^2}{h}} = \rho_0, \\ &|A|^2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + |B|^2 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \\ &+ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) (A^* B + AB^*) e^{-\frac{\delta^2}{h}} = \tilde{\rho}_0. \end{aligned} \tag{19}$$

Можно параметризовать коэффициенты A и B так, что

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\rho_0 + \tilde{\rho}_0} \cos(\phi) e^{i\theta_A}, \\ B &= \sqrt{\rho_0 + \tilde{\rho}_0} \sin(\phi) e^{i\theta_B}, \end{aligned} \tag{20}$$

где ϕ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \cos(2\phi) - \frac{g}{x_c} \cos(\theta_A - \theta_B) \sin(2\phi) e^{-\delta^2/h} &= \\ &= \frac{\rho_0 - \tilde{\rho}_0}{\rho_0 + \tilde{\rho}_0} \frac{\delta}{x_c}. \end{aligned} \tag{21}$$

Можно выбрать θ_A и θ_B так, что

$$\cos(\theta_A - \theta_B) = 0,$$

тогда ϕ не будет зависеть от h . Получающееся уравнение для $\cos(2\phi)$ имеет решения, откуда следует

$$\frac{|\rho_0 - \tilde{\rho}_0|}{\rho_0 + \tilde{\rho}_0} < \frac{x_c}{\delta}.$$

Это исключает конфигурации, для которых, например, $\rho_0 = 1$ и $\tilde{\rho}_0 = 0$, поскольку $x_c/\delta < 1$ при $g > 0$. В этом случае две компоненты волновой функции «запутываются»: при $g > 0$ каждая квазичастица в одной зоне имеет ненулевую компоненту в другой зоне, это связано с туннельным эффектом, вызванным унитарным поворотом в уравнении (13), когда $\varphi \neq 0$, даже в отсутствие магнитного поля. При $\cos(2\phi) = \pm 1$ отношение плотностей равно

$$\frac{\rho_0}{\tilde{\rho}_0} = \frac{\delta \pm x_c}{\delta \mp x_c}.$$

Это означает, что при $g \ll 1$ небольшая доля плотности ρ_0 , пропорциональная $g^2 \rho_0$, переносится с первой орбитали на вторую. Например, при $B = 0$ отношение между плотностями имеет простой вид:

$$\frac{\tilde{\rho}_0}{\rho_0} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{g^2}{x_c + \delta}. \tag{22}$$

Когда $\rho_0 = |A|^2$ и $\tilde{\rho}_0 = 0$, переносимая часть $\tilde{\rho}_0$ пропорциональна $g^2\rho_0$, кроме случая $g = 0$. Пусть $\rho_0 = \tilde{\rho}_0$. Рассмотрим вещественные решения системы (20) при $\theta_A = \theta_B = 0$ и ϕ , определяемом как

$$\text{tg}(2\phi) = \frac{x_c}{g} e^{\frac{\delta^2}{h}}. \quad (23)$$

Если $\omega(x)$ постоянна, то интеграл от полного тока обращается в нуль. В пределе слабого взаимодействия g получаем

$$|A|^2 \simeq \rho_0, \quad |B|^2 \simeq \tilde{\rho}_0, \quad \phi \simeq \pi/4.$$

При этом функции ϕ_0 и $\tilde{\phi}_0$ разделяются, если каждый электрон локализован на своей орбитали.

2.1. Функция перекрытия

В качестве первого приложения рассмотрим случай, приведенный на рис. 2, когда $\omega(x) = 1$, и найдем коэффициенты перекрытия и прохождения для двух волновых функций (17). Это нужно для того, чтобы показать, что система осцилляторов зависит от обратного магнитного поля. Для этого определим внутреннее произведение или функцию переноса между состояниями Ландау m и n :

$$T_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_m(x) \overline{\tilde{\phi}_n(x)} dx.$$

Вычисляя произведение с использованием формулы для полиномов Эрмита [29], получим

$$\begin{aligned} T_{m \leq n} &= \sqrt{\frac{m!2^n}{n!2^m}} (i\sqrt{h})^{m-n} \frac{ge^{-1/h}}{\delta} \times \\ &\times \left[\left(\cos(\phi)^2 e^{2i\delta/h} - \sin(\phi)^2 e^{-2i\delta/h} \right) \times \right. \\ &\times L_m^{n-m} \left(\frac{2}{h} \right) - e^{-\delta^2/h} \sin(\phi) \cos(\phi) \times \\ &\times \left(\frac{g}{x_x + \delta} (1+i\delta)^{n-m} - \frac{x_x + \delta}{g} (1-i\delta)^{n-m} \right) \times \\ &\left. \times L_m^{n-m} \left(\frac{2}{h} (1 + \delta^2) \right) \right], \end{aligned}$$

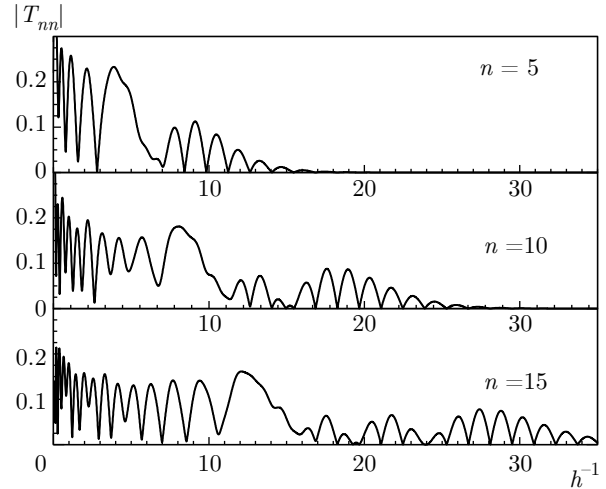


Рис. 4. Зависимости модуля функции перекрытия $|T_{nn}|$, $n = 5, 10, 15$, от обратного поля h^{-1} при $g = 0.5$ и $x_c = 1$

$$\begin{aligned} T_{m \geq n} &= \sqrt{\frac{n!2^m}{m!2^n}} (i\sqrt{h})^{n-m} \frac{ge^{-1/h}}{\delta} \times \\ &\times \left[\left(\cos(\phi)^2 e^{2i\delta/h} - \sin(\phi)^2 e^{-2i\delta/h} \right) \times \right. \\ &\times L_n^{m-n} \left(\frac{2}{h} \right) - e^{-\delta^2/h} \sin(\phi) \cos(\phi) \times \\ &\times \left(\frac{g}{x_x + \delta} (1-i\delta)^{m-n} - \frac{x_x + \delta}{g} (1+i\delta)^{m-n} \right) \times \\ &\left. \times L_n^{m-n} \left(\frac{2}{h} (1 + \delta^2) \right) \right], \quad (24) \\ T_{nn} &= \frac{ge^{-1/h}}{\delta} \times \\ &\times \left[\left(\cos(\phi)^2 e^{2i\delta/h} - \sin(\phi)^2 e^{-2i\delta/h} \right) \times \right. \\ &\times L_n \left(\frac{2}{h} \right) + \frac{x_c e^{-\delta^2/h}}{g} \sin(2\phi) L_n \left(\frac{2}{h} (1 + \delta^2) \right) \left. \right], \end{aligned}$$

где L_m^{n-m} — полиномы Лагерра. Зависимости модуля функции перекрытия $|T_{nn}|$, $n = 5, 10, 15$, от обратного поля h^{-1} при $g = 0.5$ и $x_c = 1$ приведены на рис. 4. Определим функцию пропускания $T(h)$ при заданной энергии E :

$$T(h) = \sum_{n \geq 0} \delta \left(n - \frac{E}{2h} \right) T_{nn}(h). \quad (25)$$

Для численных расчетов, результаты которых приведены на рис. 5, мы использовали уширение уровней Ландау с помощью гауссовой функции ширины $\Gamma \ll 1$ вместо дельта-функции,

$$\delta(x) \rightarrow e^{-x^2/2\Gamma^2} (2\pi\Gamma^2)^{-1/2}.$$

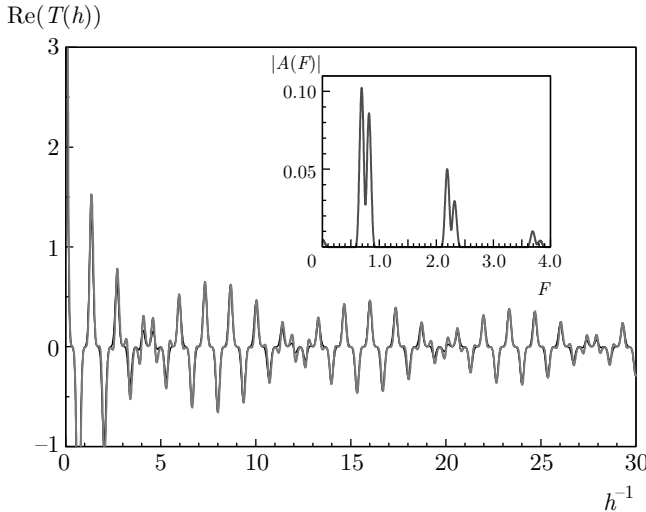


Рис. 5. Зависимости вещественной части функции перекрытия T от обратного поля h^{-1} при $E = 3$, $g = 0.2$, $\omega(x) = 1$ и $x_c = 1$. Параметр уширения $\Gamma = 0.1$. Красная кривая соответствует квазиклассическому выражению (32). На вставке: фурье-преобразование $\text{Re}(T(h))$. Первый двойной пик находится на частоте $F = 0.68$, второй — на частоте $F = 0.82$

Колебания, зависящие от обратного поля, характеризуются частотами F фурье-спектра. Например, в квазиклассической теории де Гааза–ван Альфена фурье-спектр колебаний намагниченности определяется набором дискретных основных частот F и их гармоник, пропорциональных площади области \mathcal{A} всех замкнутых циклотронных орбит на поверхности Ферми (x, p) при заданной энергии. Они равны $F = \mathcal{A} \hbar / 2\pi$. Однако в членах, зависящих от обратного эффективного поля h^{-1} , они равны $F = \mathcal{A} / 2\pi$. В отсутствие взаимодействия, $g = 0$, и при постоянной ω можно получить геометрические выражения для площади области \mathcal{A}_α , ограниченной синей кривой, и площади области $\mathcal{A}_\beta > \mathcal{A}_\alpha$, ограниченной красной кривой (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha &= 2E \arcsin \left(\sqrt{\frac{E - \omega^2 - x_c^2}{E}} \right) - \\ &\quad - 2\sqrt{(E - \omega^2 - x_c^2)(\omega^2 + x_c^2)}, \\ \mathcal{A}_\beta &= 2\pi E - \mathcal{A}_\alpha = 2\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_\alpha, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\mathcal{A}_0 = \pi E$ — площадь области, ограниченной двумя круговыми циклотронными орбитами радиуса \sqrt{E} в случае отсутствия взаимодействия.

На рис. 5 приведены зависимости вещественной части функции перекрытия T от обратного поля h^{-1} при $E = 3$, $g = 0.2$, $\omega(x) = 1$ и $x_c = 1$. Видно, что в квазиклассическом пределе амплитуда $T(h)$ убыва-

ет с ростом h . Для двух частот, одной малой и одной большой, в присутствии поля наблюдается эффект биений. Для рассматриваемых значений параметров и при $g = 0$ получаем частоту де Гааза–ван Альфена $F_0 = E/2 = 1.5$, а также частоты $F_\alpha \simeq 0.138$, $F_\beta \simeq 2.862$ ¹⁾. Также предполагается, что при малых g площади областей все еще имеют приблизительно те же значения. Тогда можно вычислить амплитуду фурье-преобразования функции $T(h)$ по h^{-1} :

$$\begin{aligned} A(F) &= \int_0^\infty dh^{-1} T(h) e^{-2i\pi F/h} = \\ &= \frac{1}{F_0} \sum_{n \geq 1} T_{nn}(F_0/n) e^{-2i\pi n F/F_0}. \end{aligned} \quad (27)$$

На вставке на рис. 5 приведена зависимость $|A(F)|$. Имеются двойные пики, соответствующие $nF_0 + (F_0 \pm F_\alpha)/2$, где $(F_0 - F_\alpha)/2 \simeq 0.68$ и $(F_0 + F_\alpha)/2 \simeq 0.82$. Каждая пара пиков разделена частотой F_0 , а частота биений равна F_α . С физической точки зрения можно считать, что F_α соответствует области пересечения двух орбит и поэтому характеризует функцию $T_{nn}(h)$ при слабом взаимодействии g , в то время как F_0 соответствует периодичности плотности энергии.

В квазиклассическом режиме $h \ll 1$ функцию $T(h)$ можно найти аналитически методом седловой точки. Для этого будем использовать интегральное представление дельта-функции и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} G(h, w) &= e^{-w/h} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2\pi} \sum_{n \geq 0} L_n \left(\frac{2w}{h} \right) \times \\ &\quad \times e^{ix(n - E/2h)} \end{aligned} \quad (28)$$

при $w > 0$. Используя производящую функцию для полинома Лагерра, можно преобразовать ряд и формально получить²⁾

$$\begin{aligned} G(h, w) &= e^{-w/h} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{2\pi} \frac{e^{-i\varphi(x)/h}}{1 - e^{ix}}, \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2} E x - \frac{2iw}{e^{-ix} - 1}. \end{aligned} \quad (29)$$

¹⁾ Применение теории де Гааза–ван Альфена для намагниченности к линейному спектру $E_n = 2\hbar n$ дает доминирующую частоту $F_0 = \mathcal{A}_0/2\pi$

²⁾ Обычно, чтобы ряд в выражении (28) сходил, требуется использовать малый параметр $0 < \epsilon \ll 1$, такой что $e^{i(x+i\epsilon)} < 1$, который затем кладется равным нулю.

Теперь, чтобы найти решения уравнения $\varphi'(x) = 0$, применим метод седловой точки. Получим, что решения определяются уравнением

$$\sin(x/2)^2 = w/E$$

и имеют вид

$$x = \pm 2 \arcsin(\sqrt{w/E}) + 2\pi k,$$

где k — целое число. Используя выражение для второй производной

$$\varphi''(x) = \frac{1}{2}w \cos(x/2) / \sin(x/2)^3$$

и проведя некоторые вычисления, получаем

$$G(h, w) \simeq \sqrt{\frac{h}{\pi}} \frac{1}{(w(E-w))^{1/4}} \times \sin\left(2\pi \frac{F(w)}{h} + \frac{\pi}{4} + \gamma_w\right) \Omega(h), \quad (30)$$

$$\Omega(h) = \sum_n \delta\left(n - \frac{E}{2h}\right), \quad \text{tg } \gamma_w = \sqrt{\frac{w}{E-w}}.$$

Частота $F(w)$ имеет вид

$$2\pi F(w) = E \arcsin\left(\sqrt{\frac{w}{E}}\right) + \sqrt{w(E-w)}. \quad (31)$$

Из этого выражения в рассматриваемом пределе для $T(h)$ получаем

$$T(h) \simeq \left[\frac{g}{\delta} \left(\cos(\phi)^2 e^{2i\delta/h} - \sin(\phi)^2 e^{-2i\delta/h} \right) G(h, 1) + \frac{x_c}{\delta} \sin(2\phi) G(h, 1 + \delta^2) \right] \Omega(h). \quad (32)$$

Поэтому из-за периодичности $\Omega(h)$ фурье-спектр должен представлять собой ряд пиков на частотах, соответствующих гармоникам частоты $F = F_0$ и двух частот биения $F(1)$ и $F(1 + \delta^2) \simeq (F_0 - F_\alpha)/2$, причем при малых g последняя является доминирующей по амплитуде. Красная кривая на рис. 5 соответствует выражению (32), которое хорошо согласуется с решениями, определяемыми уравнением (25) для поля заданного диапазона.

2.2. Колебания переноса заряда

В качестве второго приложения вычислим для каждой орбитали электронную плотность

$$\rho_n = \int dx |\phi_n|^2$$

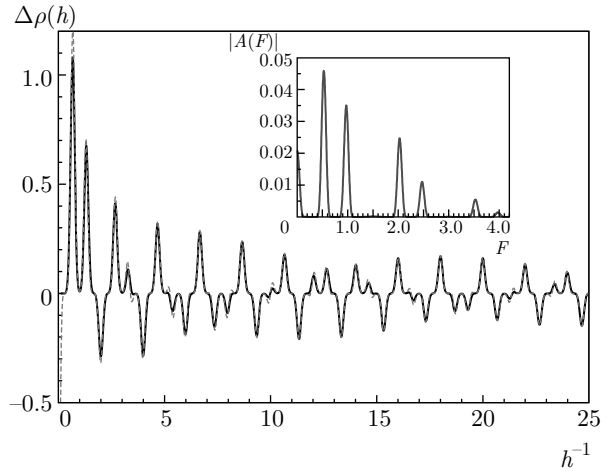


Рис. 6. Зависимости флуктуаций плотности $\Delta\rho(h)$, см. уравнение (34), от обратного поля h^{-1} (черная кривая) при $\rho_0 = \tilde{\rho}_0 = 1$, $E = 3$, $g = 0.2$ и $x_c = 1$. Параметр уширения $\Gamma = 0.1$. Красная кривая соответствует квазиклассическому результату (35). На вставке: фурье-преобразование, соответствующее черной кривой. Основная частота $F = 0.527$, что соответствует $F(\delta^2)$ (см. текст), гармоникам соответствуют частоты $nF_0 \pm F(\delta^2)$, n — целое

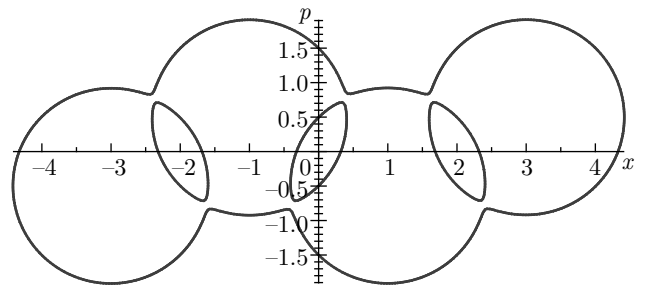


Рис. 7. Поверхность Ферми, определяемая уравнением (36), при $N = 1$, состоящая из четырех связанных орбит, при $E = 2$, $g = 0.1$, $\omega(x) = 1/2$ и $x_c = 1$

и зарядовую плотность

$$\tilde{\rho}_n = \int dx |\tilde{\phi}_n|^2$$

в зависимости от уровня Ландау n . Можно, как и раньше, проинтегрировать полиномы Эрмита. Получим

$$\rho_n = \rho_0 + g \frac{\rho_0 + \tilde{\rho}_0}{2\delta} \sin(2\phi) \times \left(1 - L_n\left(\frac{2\delta^2}{h}\right)\right) e^{-\delta^2/h}, \quad (33)$$

$$\tilde{\rho}_n = \tilde{\rho}_0 - g \frac{\rho_0 + \tilde{\rho}_0}{2\delta} \sin(2\phi) \times \left(1 - L_n\left(\frac{2\delta^2}{h}\right)\right) e^{-\delta^2/h}.$$

Сумма плотностей является сохраняющейся величиной, однако имеет место перенос заряда, зависящий от индекса n . Можно рассмотреть функцию переноса заряда (далее будем полагать $\rho_0 = \tilde{\rho}_0 = 1$)

$$\delta\rho(h) = \sum_{n \geq 0} \delta\left(n - \frac{E}{2h}\right) (\rho_n - \tilde{\rho}_n), \quad (34)$$

как и ранее, в квазиклассическом пределе $h \ll 1$ с использованием функции $G(h, \delta^2)$, см. уравнение (28). Получим выражение для $\delta\rho(h)$ в этом пределе:

$$\delta\rho(h) \simeq \frac{2g}{\delta} \sin(2\phi) \left[e^{-\delta^2/h} - \sqrt{\frac{h}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\delta(E - \delta^2)^{1/4}}} \times \right. \\ \left. \times \sin\left(2\pi \frac{F(\delta^2)}{h} + \frac{\pi}{4} + \gamma_{\delta^2}\right) \right] \Omega(h). \quad (35)$$

Очевидно, $\Delta\rho(h)$ соответствует биению колебаний с частотой $F(\delta^2)$. На рис. 6 показаны зависимости флуктуаций плотности от обратного поля для случая $\rho_0 = \tilde{\rho}_0 = 1$ при $E = 3$, $g = 0.2$ и $x_c = 1$. Как видно, частота биений $F(\delta^2) \simeq 0.527$, что согласуется с фурье-спектром, приведенным на вставке.

3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

В данном разделе мы обобщим модель двух осцилляторов, рассматривая обобщение матрицы $Q(x)$ из уравнения (10), соответствующее системе $2(N+1)$ взаимодействующих орбит, где $N \geq 0$, а именно,

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x + (2N + 1)x_c + i\omega(x) & ge^{-i\theta(x)} & 0 & \dots \\ ge^{i\theta(x)} & x + (2N - 1)x_c - i\omega(x) & ge^{i\theta(x)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & ge^{i\theta(x)} & x - (2N + 1)x_c - i\omega(x) \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Обобщенная матрица удовлетворяет коммутационному соотношению $P(x) = 1$, при условии, как и ранее, что

$$\theta(x) = 2h^{-1} \int^x \omega(y) dy.$$

На каждой орбитали имеется знакопеременный внутренний ток, порожденный $\pm\omega(x)$. На рис. 7 показана классическая поверхность Ферми, состоящая из линейной цепочки четырех связанных орбит. Решая дифференциальное уравнение $\mathcal{D}\Psi_0 = 0$, можно получить основное состояние. Заметим, что $(2N + 2)$ -компонентный вектор

$$\Psi_0 = \left(\phi_0^{(N)}, \dots, \phi_0^{(-N-1)}\right)^T$$

систему уравнений

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} (2N + 1)x_c & g & 0 & \dots \\ g & (2N - 1)x_c & g & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & g & -(2N + 1)x_c \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Эту матрицу можно диагонализировать, если найти соответствующие собственные векторы v_k^λ , $k = -N - 1, \dots, N$:

$$v_{k-1}^\lambda + v_{k+1}^\lambda + \frac{(2k + 1 - \lambda)x_c}{g} v_k^\lambda = 0. \quad (38)$$

$$h\partial_x \Psi_0 + Q(x)\Psi_0 = 0$$

можно редуцировать, используя преобразование

$$\Psi_0 \rightarrow \tilde{\Psi}_0,$$

где

$$\tilde{\Psi}_0 = \left(\tilde{\phi}_0^{(N)}, \dots, \tilde{\phi}_0^{(-N-1)}\right)^T,$$

$$\Psi_0 = e^{-\frac{\theta^2}{2h}} \text{diag}\left(e^{-\frac{i}{2}\theta(x)}, e^{\frac{i}{2}\theta(x)}, \dots, e^{\frac{i}{2}\theta(x)}\right) \tilde{\Psi}_0.$$

Это упрощает систему дифференциальных уравнений

$$-h\partial_x \tilde{\Psi}_0 = \tilde{Q}\tilde{\Psi}_0,$$

где \tilde{Q} — постоянная матрица вида

Решения даются функциями Бесселя:

$$v_k^\lambda = aJ_{\mu-k}(g/x_c) + bY_{\mu-k}(g/x_c), \quad (39)$$

где мы положили $\lambda = 2\mu + 1$. Наложим граничные условия

$$v_{N+1}^\lambda = v_{-N-2}^\lambda = 0.$$

Тогда получим уравнение для дискретных собственных значений μ :

$$\begin{aligned} J_{\mu+N+2}(g/x_c)Y_{\mu-N-1}(g/x_c) = \\ = Y_{\mu+N+2}(g/x_c)J_{\mu-N-1}(g/x_c). \end{aligned} \quad (40)$$

$$v_k^\lambda = \frac{Y_{\mu-N-1}(g/x_c)J_{\mu-k}(g/x_c) - J_{\mu-N-1}(g/x_c)Y_{\mu-k}(g/x_c)}{Y_{\mu-N-1}(g/x_c)J_{\mu-N}(g/x_c) - J_{\mu-N-1}(g/x_c)Y_{\mu-N}(g/x_c)}. \quad (41)$$

Например, при $N = 1$ из уравнения (40) получаем квадратное уравнение для μ :

$$\begin{aligned} 16\mu^4 + 32\mu^3 - 4\{3(g/x_c)^2 + 4\}\mu^2 - \\ - 4\{3(g/x_c)^2 + 8\}\mu + (g/x_c)^4 = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Отсюда нетрудно показать, что компоненты Ψ_0 можно выразить как

$$\phi_0^{(k)}(x) = e^{\pm \frac{i}{2}\theta(x)} \sum_{l=-N-1}^N C_l v_k^{\lambda_l} e^{-\frac{(x+\lambda_l x_c)^2}{2h}}, \quad (43)$$

где C_k — константы, определяемые $(2N+2)$ условиями сохранения плотности

$$\int dx |\phi_0^{(k)}|^2 = \rho_0^{(k)}.$$

Знак фазы волновой функции $\theta(x)$ зависит от положения осциллятора, причем первому осциллятору, расположенному в точке $x = -\lambda_{-N-1}$, соответствует знак минус. Тогда возбужденные состояния $\phi_{n \geq 0}^{(k)}(x)$ с энергией $E_n = 2hn$ можно построить путем сравнения с уравнением (17) с полиномами Эрмита:

$$\begin{aligned} \phi_n^{(k)}(x) = \frac{e^{\pm \frac{i}{2}\theta(x)}}{\sqrt{n!2^n}} \sum_{l=-N-1}^N C_l v_k^{\lambda_l} H_n \left(\frac{x+\lambda_l x_c}{\sqrt{h}} \right) \times \\ \times e^{-\frac{(x+\lambda_l x_c)^2}{2h}}. \end{aligned} \quad (44)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что можно построить точные решения для взаимодействующих зон в магнитном поле, используя факторизованный гамильтониан и унитарное преобразование, действующее на независимые орбитали зоны, см. уравнение

(13). Простое расширение модели дает матрицу (36), которая соответствует поверхности Ферми, состоящей из нескольких связанных орбит, и позволяет найти собственные векторы. В частности, для простого случая двух связанных орбит мы вычислили функцию перекрытия (25), колебания которой описывают геометрические характеристики циклотронных траекторий на поверхности Ферми. Кроме того, мы рассмотрели перенос заряда между двумя орбиталями и показали, что имеют место его колебания в зависимости от обратного поля, причем для энергетического спектра Ландау колебания происходят не только с доминирующей частотой де Гааза-ван Альфена, но и с частотой биений $F(\delta^2)$.

$$\mu_N > \dots > \mu_{-N-1}$$

У этого уравнения есть $2(N+1)$ решений $\lambda_k = 2\mu_k + 1$, поскольку оно представляет собой многочлен по μ :

(при малых g можно использовать аппроксимацию $\mu_k \simeq k$). Каждое решение $x = -\lambda_k$ соответствует положению k -го осциллятора в цепочке. Тогда можно выбрать следующие собственные векторы:

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Brain Pool Program, National Research Foundation of Korea (NRF-2018H1D3A2065321).

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Bambini and P. R. Berman, Phys. Rev. A **23**, 2496 (1981).
2. P. Hänggi, *Quantum Transport and Dissipation*, ed. by T. Dittrich, P. Hänggi, G.-L. Ingold, B. Kramer, G. Schön, and W. Zwerger, Ch. 5, p. 249, Wiley-VCH, Weinheim (1998).
3. B. T. Torosov and N. V. Vitanov, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 155309 (2008).
4. B. T. Torosov and N. V. Vitanov, Phys. Rev. A **84**, 1 (2011).
5. R. B. Lyubovskii, S. I. Pesotskii, V. I. Nizhankovskii, W. Biberacher, and R. N. Lyubovskaya, ЖЭТФ **98**, 1037 (2004).

6. A. Audouard, J. Y. Fortin, V. N. Laukhin, D. Vignolles, T. G. Prokhorova, E. B. Yagubskii, and E. Canadell, *Eur. Phys. J. B* **87**, 200 (2014), <http://arxiv.org/abs/1408.1331>, arXiv:1408.1331.
7. N. Rosen and C. Zener, *Phys. Rev.* **40**, 502 (1932).
8. W. Chambers, *Phys. Rev.* **165**, 799 (1968).
9. A. Slutskin and A. Kadigrobov, *Sov. Phys. Sol. State* **9** (1967).
10. A. Kochkin, *Sov. Phys. JETP* **27**, 324 (1968).
11. A. B. Pippard, *Proc. Roy. Soc. A: Math. Phys.* **270**, 1 (1962).
12. M. Kaganov and A. Slutskin, *Phys. Rep.* **98**, 189 (1983).
13. A. Kadigrobov, A. Slutskin, and S. Vorontsov, *J. Phys. Chem. Sol.* **53**, 387 (1992).
14. L. Infeld and T. E. Hull, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 21 (1951).
15. L. É. Gendenshteĭn and I. V. Krive, *Sov. Phys. Uspekhi* **28**, 645 (1985), <http://arxiv.org/abs/0409003>, arXiv:0409003 [math-ph].
16. J. Casahorrán, *Physica A* **217**, 429 (1995).
17. F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, *Phys. Rep.* **251**, 267 (1995).
18. F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, *Supersymmetry and Quantum Mechanics*, World Scientific Publishing Company, Singapore (2001).
19. J. M. Fellows and R. A. Smith, *J. Phys. A: Math. Theor.* **42**, 335303 (2009).
20. F. Cannata, G. Junker, and J. Trost, *Phys. Lett. A* **246**, 219 (1998).
21. B. F. Samsonov, V. V. Shamshutdinova, and A. V. Osipov, *Phys. Lett. A* **374**, 1962 (2010).
22. C. A. Downing, *J. Math. Phys.* **54**, 072101 (2013), <http://arxiv.org/abs/1211.0913>, arXiv:1211.0913 [math-ph].
23. J.-Y. Fortin and A. Audouard, *Low Temp. Phys.* **43**, 173 (2017).
24. R. Peierls, *Z. Physik* **80**, 763 (1933).
25. E. I. Blount, *Phys. Rev.* **126**, 1636 (1962).
26. A. Alexandrov and H. Capellmann, *Zeitschrift für Phys. B Condens. Matter* **83**, 237 (1991).
27. L. Landau, E. Lifshitz, and L. Pitaevskij, *Statistical Physics: Part 2: Theory of Condensed State*, Pergamon Press (1980).
28. D. Yoshioka, *The Quantum Hall Effect*, Springer Series in Solid-State Sciences 133, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg (2002).
29. A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integrals and Series, Vol. 2, Special Functions*, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1992).