ЖЭТФ, 2020, том 157, вып. 6, стр. 1063–1071

АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОНА В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ В ТОПОЛОГИЧЕСКИ МАССИВНОЙ ДВУМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

П. А. Эминов[*]

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, Россия

Поступила в редакцию 26 октября 2019 г.,
после переработки 26 ноября 2019 г.
Принята к публикации 27 ноября 2019 г.

В однопетлевом приближении получено аналитическое выражение для аномального магнитного момента электрона в постоянном магнитном поле в топологически массивной двумерной электродинамике. В предельном случае относительно слабого магнитного поля найдены асимптотические формулы, определяющие зависимость аномального магнитного момента от безразмерного параметра Черна – Саймонса и динамического полевого параметра. Установлены условия применимости расчетов аномального магнитного момента электрона, проведенных на основе вычисления вершинной функции в двумерной электродинамике с членом Черна – Саймонса.

DOI: 10.31857/S0044451020060085

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование квантовых процессов в пространстве-времени $(2+1)$-измерений, вызывающее большой интерес, связано и с практическими приложениями в физике конденсированного состояния вещества [1–3], и с необычными свойствами топологически массивных двумерных моделей квантовой теории поля [4, 5]. Актуальным является дальнейшее изучение радиационных и спиновых эффектов в $(2+1)$-мерной квантовой электродинамике (КЭД$_{2+1}$) при наличии внешних условий, таких как внешнее поле, конечная температура и плотность вещества.

Первые результаты исследований аномального магнитного момента (АММ) электрона в топологически массивной КЭД$_{2+1}$ с членом Черна – Саймонса были получены на основе расчета вершинной функции без учета влияния внешнего магнитного поля [6–10], причем в работе [10] рассмотрен также случай ненулевой температуры.

В работе [11] для анализа экспериментальных результатов, приведенных в [12, 13], АММ электрона вычисляется в рамках псевдоКЭД$_{2+1}$ в линейном по внешнему полю приближении, т. е. без учета динамической природы АММ электрона [14–19].

Отметим, что в работах [20–22], посвященных исследованию АММ электрона в P-четной двумерной модели квантовой электродинамики, для устранения инфракрасной расходимости вершинной функции в постоянном магнитном поле используется спектральное представление фотонного пропагатора. Радиационный сдвиг энергии основного состояния электрона в постоянном магнитном поле в рамках двумерной электродинамики как с членом Черна – Саймонса, так и без него вычислен в работах [23] и [24] соответственно.

В работе [25] с учетом спиновых свойств проведено полное описание стационарных состояний электрона в постоянном магнитном поле в модели КЭД$_{2+1}$ с удвоенным фермионным представлением [26,27]. Этот результат использован в [25] для расчета радиационного сдвига энергии основного состояния электрона в замагниченной плазме топологически массивной двумерной электродинамики, а также АММ электрона в сравнительно слабом магнитном поле. АММ возбужденных состояний электрона в постоянном магнитном поле в КЭД$_{2+1}$ с удвоенным фермионным представлением и без члена Черна – Саймонса исследован в работе [28].

[*] E-mail: peminov@mail.ru

В настоящей работе мы проводим исследование АММ возбужденных состояний электрона в постоянном магнитном поле в топологически массивной двумерной электродинамике с 2×2-матрицами [29,30]. В разд. 2 получены аналитические формулы для АММ электрона в рассматриваемой модели двумерной электродинамики с членом Черна – Саймонса в постоянном магнитном поле. В разд. 3 получены асимптотические формулы, описывающие зависимость АММ возбужденных состояний электрона в слабом магнитном поле от безразмерного параметра Черна – Саймонса и полевого параметра.

На основе проведенного в работе вычисления АММ в P-нечетной теории получены новые, не только количественные, но и качественные результаты о роли магнитного поля и параметра Черна – Саймонса при исследовании энергии взаимодействия АММ электрона с внешним магнитным полем в двумерной электродинамике. Обсуждение этих результатов проведено в заключение работы.

2. АММ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОНА В ДВУМЕРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ С ЧЛЕНОМ ЧЕРНА – САЙМОНСА

Лагранжиан двумерной электродинамики с членом Черна – Саймонса задается формулой [29,30]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(\widehat{p} + e\widehat{A} - m)\psi + \\ + \frac{1}{4}\Theta\varepsilon^{\mu\nu\lambda}F_{\mu\nu}A_\lambda - \frac{1}{2\varsigma}(\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (1)$$

Здесь $\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ — двухкомпонентный спинор, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ — тензор калибровочного поля, ς — параметр, фиксирующий калибровку, m — масса электрона, $-e < 0$ — заряд электрона, $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ — полностью антисимметричный единичный псевдотензор третьего ранга, $\varepsilon^{012} = 1$, Θ — параметр Черна – Саймонса, метрический тензор $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1)$.

Добавление к лагранжиану калибровочного поля A^μ члена Черна – Саймонса

$$L_{CS} = \frac{1}{4}\Theta\varepsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\mu\nu}A_\alpha$$

приводит к тому, что калибровочное поле приобретает массу, равную параметру Θ, но калибровочная инвариантность теории не нарушается [29,30].

В картине Фарри, которая используется в работе, в качестве невозмущенного гамильтониана при построении представления взаимодействия рассматривается гамильтониан, включающий взаимодействие электрон-позитронного поля с внешним полем. Обобщение схемы вторичного квантования для случая свободных частиц на случай наличия внешнего электромагнитного поля сводится к тому, что вторично квантованные операторы электрон-позитронного поля следует разлагать не по плоским волнам, а по полной системе решений уравнения Дирака в заданном внешнем поле [31,32].

Потенциал внешнего магнитного поля выберем в виде $A^\mu_{ext} = (0,0,xH)$ [23], а для двумерных гамма-матриц будем пользоваться представлением Дирака, в котором [27,30,32,33]

$$\gamma^0 = \sigma_3, \quad \gamma^1 = i\sigma_1, \quad \gamma^2 = i\sigma_2, \quad (2)$$

где $\sigma_k (k = 1,2,3)$ — матрицы Паули.

Тогда уравнение Дирака для электрона в постоянном однородном магнитном поле принимает вид

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \widehat{H}\psi, \quad \widehat{H} = \alpha_1\widehat{p}_x + \alpha_2(\widehat{p}_y + exH) + m\gamma^0, \quad (3)$$

где матрицы $\alpha_{1,2} = \gamma^0\gamma^{1,2}$, $\widehat{p}_x$ и $\widehat{p}_y$ — проекции оператора импульса, $H > 0$ — напряженность магнитного поля.

Матрицы γ^μ удовлетворяют соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\gamma_\lambda, \quad \mathrm{Sp}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho) = -2i\varepsilon^{\mu\nu\rho}. \quad (4)$$

Существенно, что, в отличие от КЭД$_{3+1}$, в двумерных моделях теории поля из-за отсутствия тензора четвертого ранга $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ нельзя построить дуальный тензор поля, а след нечетного числа двумерных гамма-матриц отличен от нуля.

Следует также отметить, что в системе покоя электрона уравнение Дирака в КЭД$_{2+1}$ в отсутствие внешнего магнитного поля можно преобразовать в уравнение для собственных векторов и собственных значений спинового оператора [34]

$$\sigma_3\Psi = \zeta\Psi, \quad (5)$$

где $\zeta = 2s = \pm 1$.

Но спин в $(2+1)$-измерении является псевдоскаляром по отношению к преобразованиям Лоренца, а не псевдовектором, как это имеет место в КЭД$_{3+1}$ [30,34]. Поэтому уравнение (5) определяет спин электрона в КЭД$_{2+1}$ в произвольной системе отсчета. Заметим также, что и магнитное поле в КЭД$_{2+1}$ является не псевдовектором, а псевдоскаляром [30].

В однопетлевом приближении массовый оператор и радиационный сдвиг энергии электрона определяются формулами [31, 35, 36]

$$\Sigma(x,x') = -ie^2\gamma^\mu S_c(H,x,x')\gamma^\nu D_{\mu\nu}(x-x'), \quad (6)$$

$$\Delta E_n = \int d^3x d^3x' \bar{\Psi}_{q\zeta}(x)\Sigma(x,x')\Psi_{q\zeta}(x'), \quad (7)$$

где

$$S_c(H,x,x') = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp[i\omega(t-t')] \times \\ \times \sum_{s,\varepsilon=\pm1} \frac{\Psi_s^{(\varepsilon)}(\mathbf{x})\bar{\Psi}_s^{(\varepsilon)}(\mathbf{x}')}{\omega+\varepsilon E_s(1-i\delta)} \quad (8)$$

— причинная функция Грина электрона в постоянном магнитном поле [31, 37], а фотонный пропагатор в импульсном представлении в калибровке Ландау определяется формулой [4, 38]

$$D_{\mu\nu}(p) = -\frac{i}{p^2-\Theta^2+i0} \times \\ \times \left[g_{\mu\nu} + i\theta\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\frac{p^\lambda}{p^2+i0} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2+i0}\right]. \quad (9)$$

Суммирование в формуле (8) проводится по всем квантовым числам $\{s\}$ положительно-частотных ($\varepsilon = +1$) и отрицательно-частотных ($\varepsilon = -1$) стационарных состояний электрона, $\Psi_s^\varepsilon(\mathbf{x})$ — координатная часть решения уравнения Дирака в постоянном магнитном поле в КЭД$_{2+1}$, E_s — энергия стационарных состояний электрона.

Решение уравнения Дирака в представлении (2) для гамма-матриц было получено, например, в работах [27, 32, 33], причем в [32] использован метод собственных функций в электродинамике произвольного постоянного поля, который развит в работах [36, 39, 40]. Спектр и нормированные положительно-частотные решения уравнения Дирака в калибровке $A_\mu = (0,0,xH)$ описываются формулами [32]

$$\Psi_s(x,y,t) = \frac{\exp(-iE_nt+iyp_y)}{\sqrt{2E_n}} \times \\ \times \begin{pmatrix} u_n(\eta)\sqrt{E_n+m} \\ u_{n-1}(\eta)\sqrt{E_n-m}\end{pmatrix}, \quad \{s\} = (p_y, n, \zeta), \quad (10)$$

$$E_n = \sqrt{m^2+2eHn}, \quad n = 0,1,2,\ldots \quad (11)$$

Здесь $u_n(\eta)$ — функция Эрмита [35],

$$u_n(\eta) = \frac{(eH)^{1/4}}{[2^n n!\pi^{1/2}]^{1/2}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) H_n(\eta), \quad (12)$$

а аргумент полиномов Эрмита

$$\eta = \sqrt{eH}\left(x + \frac{p_y}{eH}\right). \quad (13)$$

Если представить двумерное пространство как вложенное в обычное трехмерное пространство и положить $A_\mu = (0,0,xH,0)$, то проекция магнитного поля $H_z = -F_{12} = -H$, т. е. магнитное поле направлено против оси z. Для того чтобы воспользоваться результатом работы [32] и сохранить традиционную в КЭД$_{3+1}$ физическую интерпретацию, будем говорить, что в состоянии с $\psi_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ проекция спина на направление магнитного поля равна $-1/2$, т. е. спиновое квантовое число $\zeta = -1$, а в состоянии с $\psi_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, наоборот, $\zeta = +1$. Такая интерпретация согласуется с формулой для главного квантового числа n, определяющего спектр электрона в КЭД$_{2+1}$ [32, 36]:

$$n = k - \frac{\zeta}{2}\operatorname{sign}(eH) - \frac{1}{2}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

где $H > 0$.

Таким образом, разложив двухкомпонентную волновую функцию по собственным функциям матрицы σ_3, формулу (10) представим в наиболее удобном для дальнейших расчетов виде:

$$\Psi_{p_y,n,\zeta}(x,y,t) = \frac{\exp(-iE_nt+iyp_y)}{\sqrt{2E_n}} \times \\ \times \left[D_{-1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} u_n(\eta)\sqrt{E_n+m} + \right. \\ \left. + D_1\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} u_{n-1}(\eta)\sqrt{E_n-m}\right] = \\ = \frac{\exp(-iE_nt+iyp_y)}{\sqrt{2E_n}}\begin{pmatrix}D_{-1}u_n(\eta)\sqrt{E_n+m}\\ D_1u_{n-1}(\eta)\sqrt{E_n-m}\end{pmatrix}, \quad (14)$$

где при $\zeta = +1$ следует положить $D_1 = 1$, $D_{-1} = 0$, а при $\zeta = -1$, наоборот, $D_1 = 0$, $D_{-1} = 1$.

Используя (2), (14) и предложенный в работах [41, 42] метод расчета, электронную функцию Грина (8) в постоянном магнитном поле представим в виде

$$
\begin{gathered}
S_c(H,x,x') = \exp\left[-i\frac{eH}{2}(y-y')(x+x')\right] \times \\
\times \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\exp[i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]S(\mathbf{k}), \\
S(\mathbf{k}) = -i\int\limits_0^\infty ds_1 \times \\
\times \exp\left[-is_1\left(m^2 - k_0^2 + \mathbf{k}^2\frac{\operatorname{tg} eHs_1}{eHs_1} - i0\right)\right] \times \\
\times\left\{(m+ik^0) + \gamma^0(k^0 + im\operatorname{tg} eHs_1) - \right. \\
\left. - \frac{\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\gamma}}{\cos^2 eHs_1}\right\}.
\end{gathered} \tag{15}
$$

Этот результат совпадает с аналогичным результатом работ [27, 32, 43], в которых использован метод Швингера [44].

Рассмотрим также трансформационные свойства классического действия теории с лагранжианом (1) при дискретных преобразованиях пространственного отражения и обращения времени [20, 26, 30, 33]:

$$
\begin{gathered}
P: x^\mu = (x^0, x^1, x^2) \to x'^\mu = (x^0, -x^1, x^2), \\
\psi(x) \to \gamma^1\psi(x'), \quad A^0(x) \to A^0(x'), \\
A^1(x) \to -A^1(x'), \quad A^2(x) \to -A^2(x'),
\end{gathered} \tag{16}
$$

$$
\begin{gathered}
T: x^\mu = (x^0, x^1, x^2) \to x'^\mu = (-x^0, x^1, x^2), \\
\psi(x) \to \gamma^2\psi(x'), \quad A^0(x) \to A^0(x'), \\
A^1(x) \to -A^1(x'), \quad A^2(x) \to -A^2(x').
\end{gathered} \tag{17}
$$

Мы видим, что классическое действие в случае безмассового фермиона в КЭД$_{2+1}$ без члена Черна – Саймонса инвариантно относительно операции инверсии, в то время как в случае массивного фермиона, когда $m \neq 0$, массовый член $m\bar\psi\psi$ в формуле (1) с двумерными гамма-матрицами (2) не инвариантен относительно операций инверсии и обращения времени:

$$
P: \ \bar\psi\psi \to -\bar\psi\psi, \quad T: \ \bar\psi\psi \to -\bar\psi\psi. \tag{18}
$$

При этом член Черна – Саймонса в формуле (1) имеет такие же трансформационные свойства при дискретных P- и T-преобразованиях, как и массовый член [30].

Поэтому вычисление АММ электрона в КЭД$_{2+1}$ с членом Черна – Саймонса, являющейся теорией с нарушенной пространственной четностью, начнем с определения той части Δm_ζ радиационного сдвига массы, которая явно зависит от спина электрона. Далее, представим полученное выражение в виде суммы скалярной и псевдоскалярной величин:

$$
\Delta m_\zeta = \frac{E_n}{m}\Delta E_n^\zeta = \Delta m_\zeta^{(s)} + \Delta m_\zeta^{(ps)}. \tag{19}
$$

Нас будет интересовать слагаемое $\Delta m_\zeta^{(s)}$, которое является истинным скаляром и определяет АММ электрона [31, 36, 45]:

$$
\Delta\mu = -\frac{m}{E_n}\,\frac{\Re\left(\Delta m_\zeta^{(s)}\right)}{\zeta H}. \tag{20}
$$

Расчет радиационного сдвига энергии электрона, определяемого формулой (7) с учетом (6), (9), (14) и (15), проведем методом работ [25, 28].

Используя швингеровскую параметризацию

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - \Theta^2 + i0} = \\
= -i\int\limits_0^\infty ds_2\exp[is_2(p_0^2 - \mathbf{p}^2 - \Theta^2 + i0)],
\end{gathered} \tag{21}
$$

вычисление интегралов по пространственно-временным переменным проводим с помощью формулы [25]

$$
\begin{gathered}
\int d^3x\, d^3x' \times \\
\times\exp\left[-i(p+k)(x-x') - i\frac{eH}{2}(y-y')(x+x') - \right. \\
\left. - iE_n(t-t') + i(p_y - p'_y)\right] u_n(\eta)u_m(\eta') = \\
= (2\pi)^2 LT\delta(p_0 + k_0 - E_n)\frac{2}{eH} \times \\
\times (-1)^m\exp[i(n-m)\chi]I_{n,m}\left(\frac{2\kappa^2}{eH}\right),
\end{gathered} \tag{22}
$$

где $p^\mu = (p^0, \mathbf{p})$ — импульс виртуального фотона, $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{p} + \mathbf{k}$, T — время взаимодействия, которое в дальнейшем полагаем равным единице, L — длина периодичности в направлении оси y, δ-функция Дирака $\delta(p^0 + k^0 - E_n)$ выражает закон сохранения энергии, $\chi = \pi/2 - \phi$, $\phi = \operatorname{arctg}(\kappa_2/\kappa_1)$, а функция Лагерра $I_{n,m}(\tau)$ связана с полиномом Лагерра $L_n^{n-m}(\tau)$ соотношением [35]

$$
\begin{gathered}
I_{n,m}(\tau) = \sqrt{\frac{m!}{n!}}\exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)\tau^{(n-m)/2}L_m^{n-m}(\tau), \\
\tau = \frac{2\boldsymbol{\kappa}^2}{eH}.
\end{gathered} \tag{23}
$$

Интеграл по переменной k^0 убирается с помощью δ-функции Дирака, а интегралы по переменной p^0 являются гауссовыми. Далее переходим от интегрирования по переменной $\mathbf{p}$ к интегрированию по $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{p} + \mathbf{k}$, т. е.

$$d\mathbf{k}\,d\mathbf{p} = d\mathbf{k}\,d\boldsymbol{\kappa} = k\,dk\,d\alpha\kappa\,d\kappa\psi \to \to 2\pi k\,dk\,\kappa\,d\kappa\,d\psi, \quad (24)$$

где $\psi = \phi - \alpha$, $\psi \in [0, 2\pi]$, α и ϕ — полярные углы векторов $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\kappa}$. Интегралы по переменной ψ дают функции Бесселя $J_\nu(b)$ действительного аргумента

$$b = 2s_2 k\kappa$$

нулевого и первого порядка, а интегрирование по переменной k проводится с помощью формулы Вебера [46]

$$\int_0^\infty \exp[-px^2]x^{\nu+1}J_\nu(cx)\,dx = = \frac{c^\nu}{(2p)^{\nu+1}}\exp\left[-\frac{c^2}{4p}\right], \quad p > 0, \quad c > 0, \quad \Re\nu > -1. \quad (25)$$

Выделим далее в сдвиге энергии электрона вклады слагаемых в пропагаторе фотона (9), пропорциональных $g^{\mu\nu}$ и $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$, и проведем замену переменных s_1 и s_2 на u и y согласно формулам

$$u = \frac{s_1}{s_1+s_2}, \quad y = u(s_1+s_2), \quad 0 \le u \le 1, \quad 0 \le y < \infty, \quad ds_1 ds_2 = \frac{y}{u^2}du\,dy. \quad (26)$$

Поставленная задача определения величины $\Re\Delta m_\zeta^{(s)}$ в формуле (20) находит решение после проведения интегрирования по переменной κ.

Интегралы по переменной κ при этом представляют собой линейную комбинацию различных пар слагаемых, каждое из которых определяется одним из интегралов

$$\begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix} = \int_0^\infty \kappa\,d\kappa \Big[I_{n,n}(t)\exp[i(\pm\alpha z - \operatorname{arctg}\lambda)] \pm \pm I_{n-1,n-1}(t)\exp[-i(\pm\alpha z - \operatorname{arctg}\lambda)] \Big] = = (-1)^n \frac{eH}{\sqrt{1+\lambda^2}}\exp[-i2n\operatorname{arctg}\lambda] \times \times \begin{pmatrix} i\sin(\pm\alpha z - \operatorname{arctg}\lambda) \\ \cos(\pm\alpha z - \operatorname{arctg}\lambda) \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где

$$t = \frac{2\kappa^2}{eH}, \quad \alpha = 0, 1, \quad \lambda = \frac{\operatorname{tg} z}{1 + \dfrac{u}{1-u}\dfrac{\operatorname{tg} z}{z}}, \quad z = eHy. \quad (28)$$

Из двух типов таких слагаемых, пропорциональных соответственно $\sin(\pm\alpha z - \operatorname{arctg}\lambda)$ и $\cos(\pm\alpha z - \operatorname{arctg}\lambda)$, вклад в АММ электрона дают только слагаемые первого типа, являющиеся нечетными функциями напряженности магнитного поля.

В результате в формуле (19) величина

$$\Delta m_\zeta^s = \Delta m_\zeta^s(g^{\mu\nu}) + \Delta m_\zeta^s(\Theta), \quad (29)$$

определяющая в однопетлевом приближении АММ электрона в двумерной квантовой электродинамике с членом Черна – Саймонса в постоянном магнитном поле, описывается формулами

$$\begin{pmatrix} \Delta m_\zeta^s(g^{\mu\nu}) \\ \Delta m_\zeta^s(\Theta) \end{pmatrix} = -\zeta \frac{me^2\exp[i\pi/4]}{16\cdot 2\pi^{3/2}} \times \times \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} \int_0^\infty \frac{dy}{\sqrt{y}} \exp[-i\phi] \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\Omega_1 = \frac{2 - u + 2u\exp[-2iz]}{1 - u + u\exp[-iz]\dfrac{\sin z}{z}} - - \frac{\exp[2i\operatorname{arctg}\lambda]\big[2u + (2-u)\exp[-2iz]\big]}{1 - u + u\exp[-iz]\dfrac{\sin z}{z}}, \quad (31)$$

$$\Omega_2 = -i\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}(1-u)\sin z}\frac{4}{m\Theta} \times \times \left(1 - \exp\left[iy\Theta^2\frac{1-u}{u}\right]\right) \times \times \left[-i\left(m^2u^2 + i\frac{u}{2y}\right)\sin(z + \operatorname{arctg}\lambda) + + \frac{\lambda^2 u}{y(1-u)\sin z}\left(1 + \frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda)^{3/2}}\right)\right], \quad (32)$$

$$\phi = m^2uy + y\frac{1-u}{u}\Theta^2 + 2n\operatorname{arctg}\lambda - - 2eHny(1-u). \quad (33)$$

Отметим, что результаты (30)–(33) получены в модели топологически массивной двумерной электродинамики, описываемой формулами (1) и (2) статьи, а не в модели с удвоенным фермионным представлением, в рамках которой выполнены работы [25, 28].

Формулы (30)–(33) для возбужденных состояний электрона, как и в обычной КЭД$_{3+1}$, не содержат расходимостей и являются конечными во всей области изменения магнитного поля, причем результат (30), (31) для величины $\Delta m_\zeta^s(g^{\mu\nu})$ совпадает с соответствующим результатом работы [28].

3. АММ ЭЛЕКТРОНА В КЭД$_{2+1}$ С ЧЛЕНОМ ЧЕРНА–САЙМОНСА: ВКЛАД СЛАГАЕМОГО С $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ В ПРОПАГАТОРЕ ФОТОНА

Сначала рассмотрим случай относительно слабого магнитного поля и нерелятивистских значений энергии электрона, когда выполнены условия

$$\beta = \frac{H}{H_0} \ll 1, \quad n \ll \beta^{-1} \tag{34}$$

и введено критическое поле для электрона $H_0 = m^2c^3/e\hbar \approx 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс. Величина $\Delta m_\zeta^s(g_{\mu\nu})$ в этом случае имеет асимптотики, определяемые формулами (3.7) и (4.6) работы [28]:

$$\Re(\Delta m_\zeta^{(s)}(g_{\mu\nu})) = \begin{pmatrix} -\zeta\dfrac{e^2\beta}{8\pi}\left[\dfrac{3}{2}+\ln\dfrac{\beta}{2}\right], \quad \rho=0, \quad \beta\ll 1, \quad n \ll \beta^{-1}, \\ \zeta\dfrac{e^2\beta}{16\pi}\left[3-3\rho-\left(2-\dfrac{3\rho^2}{2}\right)\ln\dfrac{\rho+2}{\rho}\right], \quad \beta \ll 2\rho\left(1-\dfrac{\rho}{2}\right) \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Здесь мы получим сначала соответствующие асимптотики для величины $\Delta m_\zeta^{(s)}(\Theta)$ в формулах (30) и (32), определяющих вклад в АММ электрона слагаемого с $\varepsilon^{\mu\nu\lambda}$ в пропагаторе (9).

В предельном случае (34) в формуле (28) в первом приближении $\lambda \simeq eHy(1-u)$ и, соответственно, показатель экспоненты в (30) представляется в виде

$$\begin{gathered} -i\phi \simeq -\frac{t}{\beta}F(u,\rho), \\ F(u,\rho) = u + \left(\frac{1}{u}-1\right)\rho^2, \quad t = eHy, \end{gathered} \tag{36}$$

где для определенности будем считать, что $\rho = \Theta/m < 2$. Функция $F(u,\rho)$ переменной $u \in [0,1]$ принимает значения от 1 при $u=1$ до $+\infty$ при $u \to +0$ для всех $\rho \neq 0$ и достигает наименьшего значения $F(u_0,\rho) = 2\rho\big(1-\rho/2\big) > 0$ в точке $u_0 = \rho = \Theta/m$.

Это означает, что если выполнено условие

$$\frac{F(u_0,\rho)}{\beta} \gg 1, \tag{37}$$

т. е. если полевой параметр β мал по сравнению с параметром ρ, то в предэкспоненциальном множителе Ω_2 в формулах (30) и (32) основной вклад в интеграл дает область $t \ll 1$. Для первого члена разложения получаем

$$\Omega_2 = \frac{eHu}{m\Theta}\left[6-5u-i(4u-2u^2)\frac{t}{\beta}\right] \times \left(1-\exp\left[i\frac{ty(1-u)\rho^2}{\beta u}\right]\right). \tag{38}$$

Интегрирование по переменной t проводится с учетом бесконечно малой мнимой части электронной массы δ в причинном пропагаторе [46]:

$$\lim_{\delta\to+0}\int_0^\infty t^{\mu-1}\exp[-\delta t]\begin{pmatrix}\sin\alpha t\\ \cos\alpha t\end{pmatrix}dt = \frac{\Gamma(\mu)}{\alpha^\mu}\begin{pmatrix}\sin\dfrac{\pi\mu}{2}\\ \cos\dfrac{\pi\mu}{2}\end{pmatrix}. \tag{39}$$

Выполнив интегрирование по переменной t, находим

$$\Delta m_\zeta^{(s)} = \frac{\zeta e^2}{4\pi}\,\frac{eH}{4m\Theta}\int_0^1 u\,du \times \left[\frac{5u-6}{(u^2+(1-u)\rho^2)^{1/2}} + \frac{u^2(2-u)}{(u^2+(1-u)\rho^2)^{3/2}} - \frac{4(u-1)}{u}\right]. \tag{40}$$

Таким образом, в предельном случае (34) асимптотика радиационного сдвига массы электрона $\Delta m_\zeta^{(s)}(\Theta)$ при выполнении условия (37) описывается формулой

$$\Delta m_\zeta^{(s)}(\Theta) = \frac{\zeta e^2}{4\pi}\,\frac{eH}{4m^2}\left[2-\rho\ln\frac{\rho+2}{\rho}\right], \quad \beta \ll \rho. \tag{41}$$

Рассмотрим далее важный случай квазиклассического приближения, когда выполнены условия

$$\beta \ll 1, \quad p_\perp = \sqrt{2eHn} \gg m. \tag{42}$$

В этом приближении в показателе экспоненты формулы (30) следует сохранить два первых члена разложения для величины $\operatorname{arctg}\lambda$ по малому параметру t. В результате получим лоренц-инвариантное выражение

$$\Delta m_\zeta^{(s)}(\Theta) = -\frac{\zeta e^2 H \exp[i\pi/4]}{16\pi^2 \rho H_0} \times \\ \times \int_0^1 du \sqrt{z_0} \Big\{ (6-5u)\big[F(z) - F(z_0)\big] + \\ + 2(2-u) z_0 \big[F'(z) - F'(z_0)\big] \Big\}. \quad (43)$$

Здесь функция $F(z)$ определяется формулой

$$F(z) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \exp\left[-i\left(\tau z + \frac{\tau^3}{3} \right) \right], \quad (44)$$

$F'(z) = dF/dz$, а также приняты обозначения:

$$z_0 = \left(\frac{u}{\chi(1-u)} \right)^{2/3}, \quad z = z_0 \left[1 + \rho^2 \frac{1-u}{u^2} \right]. \quad (45)$$

Отметим, что подынтегральное выражение в (43) зависит только от безразмерного параметра Черна – Саймонса ρ и инвариантного динамического параметра синхротронного излучения

$$\chi = \frac{e}{m^3} \sqrt{-(F_{\mu\nu} p^\nu)^2} = \frac{p_\perp}{m} \frac{H}{H_0}, \quad (46)$$

а результат (43) получен в предположении, что наряду с (42) выполняется условие

$$\chi \ll \rho. \quad (47)$$

Из лагранжиана (1) непосредственно следует, что если параметр Θ положить равным нулю, мы переходим к случаю массивной двумерной электродинамики без члена Черна – Саймонса, в рамках которой однопетлевой вклад в АММ электрона исследован в [28]. Хотя радиационные поправки и приводят к генерации члена Черна – Саймонса [47], это не дает вклада в однопетлевой АММ электрона.

С учетом условий справедливости результатов (41) и (43), представляет интерес исследование асимптотики величины $\Re\Delta m_\zeta^{(s)}(\Theta)$ в случае, допускающем предельный переход, когда $\rho \to 0$. Рассмотрим нерелятивистский электрон, когда выполнены условия (34), и предположим, что также выполнено условие

$$\rho \ll \beta \ll 1. \quad (48)$$

Разбиваем область интегрирования по переменной u в формулах (30) и (32) для величины $\Delta m_\zeta^{(s)}(\Theta)$ на два отрезка. В первой области $u \in [0, u_0]$, а во второй — $u \in [u_0, 1]$, где значение величины u_0 удовлетворяет условию

$$\rho, \beta \ll u_0 \ll 1.$$

Тогда в первой области подынтегральное выражение в формуле (30) для $\Delta m_\zeta^{(s)}(\Theta)$ разлагается, кроме соответствующего показателя экспоненты, в ряд по переменной u, так как $u \le u_0 \ll 1$, а во второй области, где $u \ge u_0 \gg \rho, \beta$, основной вклад в интеграл дает область, где переменная $t \ll 1$, и подынтегральную функцию разлагаем в ряд по переменной t. Далее интегралы по переменной t берутся с помощью формул [46]

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} \sin at \begin{pmatrix} \sin bt \\ \cos bt \end{pmatrix} dt = \frac{\Gamma(\mu)}{2} \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi\mu}{2}(|b-a|^{-\mu} - (b+a)^{-\mu}), \quad a \ne b, \quad -2 < \Re\mu < 1, \\ \sin\dfrac{\pi\mu}{2}((a+b)^{-\mu} + |a-b|^{-\mu}\,\mathrm{sign}(a-b)), \quad |\Re\mu| < 1 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

где $a > 0$, $b > 0$.

После интегрирования по переменной t получаем

$$\Re(\Delta m_\zeta^{(s)}) = \zeta \frac{m e^2}{16\pi^{3/2}} [T_1 + T_2], \quad (50)$$

где приняты обозначения

$$T_1 = \sqrt{\pi} \frac{2\beta}{m\rho} \int_{u_0}^1 u\, du \left[\frac{6-5u}{(u^2 + \rho^2(1-u))^{1/2}} - \\ - \frac{u^2(2-u)}{(u^2+\rho^2(1-u))^{3/2}} \right] + \ldots,$$

$$T_2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{m\rho} \int_0^{u_0} du \left\{ \left[\frac{u^2}{\sqrt{u^2 + 2\beta u + \rho^2}} + \\ + 3\sqrt{u^2 + 2\beta u + \rho^2} \right] - \\ - l \left[\frac{u^2}{\sqrt{u^2 - 2\beta u + \rho^2}} + \\ + 3\sqrt{u^2 - 2\beta u + \rho^2} \right] \right\} + \ldots, \quad (51)$$

$$l = \begin{pmatrix} 1, & u \in [0, u_1] \cup [u_2, u_0], & u_1 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \rho^2} \\ 0, & u \in [u_1, u_2], & u_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \rho^2} \end{pmatrix}, \quad (52)$$

а многоточия в формулах (51) соответствуют вкладу членов более высокого порядка малости при разложении подынтегральной функции.

В результате вычисления интегралов по переменной u слагаемые, зависящие от величины u_0, взаимно сокращаются и в логарифмическом приближении получаем

$$\Re(\Delta m_{\zeta}^{(s)}(\Theta)) = -\zeta \frac{e^2}{4\pi}\rho \ln(2\beta), \quad \rho \ll \beta \ll 1, \quad (53)$$

$$\frac{\Delta\mu(\Theta)}{\mu_B} = \frac{e^2}{2\pi m}\,\frac{\rho}{\beta}\ln(2\beta). \quad (54)$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование радиационного сдвига массы электрона в КЭД$_{2+1}$ с членом Черна – Саймонса в постоянном магнитном поле показывает, что в нерелятивистском приближении АММ электрона согласно формулам (35), (41) и (54) имеет следующие асимптотики:

$$\frac{\Delta\mu(g_{\mu\nu})}{\mu_B} = -\frac{e^2}{8\pi m}\left[-(3-3\rho) + \left(2 - \frac{3}{2}\rho^2\right) \times \right. \\ \left. \times \ln\frac{\rho+2}{\rho}\right], \quad \beta \ll \rho, \quad \beta \ll 1, \quad (55)$$

$$\frac{\Delta\mu(g_{\mu\nu})}{\mu_B} = \frac{e^2}{4\pi m}\left[\frac{3}{2} + \ln\frac{\beta}{2}\right], \quad \rho = 0, \quad \beta \ll 1, \quad (56)$$

$$\frac{\Delta\mu(\Theta)}{\mu_B} = -\frac{e^2}{8\pi m}\left[2 - \rho\ln\frac{\rho+2}{\rho}\right], \\ \beta \ll \rho, \quad \beta \ll 1, \quad (57)$$

$$\frac{\Delta\mu(\Theta)}{\mu_B} = \frac{e^2}{2\pi m}\,\frac{\rho}{\beta}\ln 2\beta, \\ \rho \ll \beta \ll 1, \quad \ln\frac{1}{2\beta} \gg 1. \quad (58)$$

Заметим, что формулы (55) и (57) имеют вид, совпадающий с соответствующими результатами (16) и (24) из работы [10], которые получены на основе расчета вершинной функции. Но принципиальное отличие этих результатов состоит в том, что в работе [10] не исследованы условия применимости формул (16) и (24). В результате этого в [10] делается вывод о том, что вклад в АММ электрона, описываемый формулой (16) этой работы, содержит инфракрасную логарифмическую расходимость при $\rho \to 0$, которая устраняется благодаря члену Черна – Саймонса в лагранжиане (1). Что касается формулы (24), то в [10] делается вывод, что при $\rho \to 0$ вклад в АММ электрона слагаемого с $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ в пропагаторе фотона стремится к конечному, отличному от нуля, предельному значению.

Наши результаты (55) и (57) показывают, что предельный переход $\rho \to 0$ в этих формулах невозможен в принципе, а поведение АММ нерелятивистского электрона в предельном случае $\rho \to 0$ описывается формулами (56) и (58). Как следует из этих формул, не параметр ρ Черна – Саймонса, а внешнее магнитное поле играет роль регуляризатора инфракрасной расходимости, причем энергия взаимодействия АММ электрона с внешним магнитным полем пропорциональна величине $\beta \ln \beta$.

Наряду с этим, согласно формуле (58), однопетлевой вклад в АММ электрона слагаемого с $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ в пропагаторе фотона стремится при $\rho \to 0$ к нулю, а не к результату, следующему из формулы (24) работы [10].

Рассмотрение АММ электрона в топологически массивной двумерной электродинамике завершим двумя замечаниями. Во-первых, в отличие от КЭД$_{3+1}$, в двумерной электродинамике отсутствует свободное движение вдоль поля и спектр энергии электрона в магнитном поле является полностью дискретным. Во-вторых, как это следует из формулы (17) из работы [10], магнитный формфактор электрона в топологически массивной КЭД$_{2+1}$ в свободном случае, когда нет внешнего магнитного поля, содержит при $\Theta = 0$ инфракрасную расходимость логарифмического типа. Поэтому, как это нам представляется, при исследовании энергии взаимодействия АММ с внешним магнитным полем на основе расчета вершинной функции переход к малым значениям переданного импульса в КЭД$_{2+1}$ должен совершаться с учетом его зависимости от магнитного поля.

Благодарности. Автор выражает благодарность рецензенту статьи за сделанные замечания, В. Ч. Жуковскому и А. В. Борисову за обсуждение результатов работы и Г. В. Китаевой за помощь в оформлении рукописи.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. K. Pyatkovskiy and V. P. Gusynin, Phys. Rev. B **83**, 075422 (2011).

2. M. A. H. Vozmediano, M. I. Katsnelson, and F. Guinea, Phys. Rep. **496**(3–4), 109 (2010).

3. I. V. Fialkovsky and D. V. Vassilevich, Int. J. Mod. Phys A **27**, 1260007 (2012).

4. S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. (N. Y.) **140**, 372 (1982).

5. C. R. Hagen, Ann. Phys. **157**, 342 (1984).

6. I. I. Kogan, Phys. Lett. B **262**, 83 (1991).

7. I. I. Kogan and G. W. Semenoff, Nucl. Phys. B **368**, 718 (1992).

8. M. Chaichian, W. F. Chen, and V. Ya. Fainberg, Eur. Phys. J. C **5**, 545 (1998).

9. M. Fleck, A. Foerster, H. O. Girotti, M. Gomes, J. R. Nascimento, and A. J. da Silva, Int. J. Mod. Phys. A **12**, 2889 (1997).

10. A. Das and S. Perez, Phys. Lett. B **581**, 182 (2004).

11. N. Menezes, V. S. Alves, and C. M. Smith, Eur. Phys. J. B **89**, 271 (2016).

12. E. V. Kurganova, H. J. van Elferen, A. McCollam, L. A. Ponomarenko, K. S. Novoselov, A. Veligura, B. J. vanWees, J. C. Maan, and U. Zeitler, Phys. Rev. B **84**, 121407 (2011).

13. Y. J. Song, A. F. Otte, Y. Kuk, Y. Hu, D. B. Torrance, P. N. First, A. W. de Heer, H. Min, S. Adam, M. D. Stiles, A. H. MacDonald, and J. A. Stroscio, Nature **467**, 185 (2010).

14. И. М. Тернов, И. Г. Багров, В. А. Бордовицын, О. Ф. Дорофеев, ЖЭТФ **55**, 2273 (1968).

15. В. И. Ритус, ЖЭТФ **57**, 2176 (1969).

16. В. Н. Байер, В. М. Катков, В. М. Страховенко, ЯФ **24**, 379 (1976).

17. B. Jancovici, Phys. Rev. **187**, 2275 (1969).

18. E. J. Ferrer, V. la Incera, D. Paret, A. Martinez, and A. Sanchez, Phys. Rev. D **91**, 085041 (2015).

19. E. J. Ferrer and V. de la Incera, Nucl. Phys. B **824**, 217 (2010).

20. K. Farakos, G. Koutsoumbas, N. E. Mavromatos, and A. Momen, Phys. Rev. D **61**, 045505 (2000).

21. N. Mavromatos and A. Momen, Mod. Phys. Lett. A **13**, 1765 (1998).

22. J. Alexandre, K. Farakos, and N. E. Mavromatos, New J. Phys. **7**, 48 (2005).

23. И. М. Тернов, А. В. Борисов, К. В. Жуковский, Вестник МГУ, сер. 3, Физика, Астрономия №1, 71 (1997).

24. V. R. Khalilov, Eur. Phys. J. C **79**, 196 (2019).

25. P. A. Eminov, Phys. Rev. D **95**, 075029 (2017).

26. T. Appelquist, M. Bowick, D. Karabali, and L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. D **33**, 3704 (1986).

27. V. P. Gusynin, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. D **52**, 4718 (1995).

28. P. A. Eminov, Phys. Rev. D **97**, 095019 (2018).

29. S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982).

30. G. Dunne, in *Proceedings of Topological Aspects of Low Dimensional Systems*, Springer-Verlag, Berlin (2000), pp. 3–76.

31. А. В. Борисов, А. С. Вшивцев, В. Ч. Жуковский, П. А. Эминов, УФН **167**, 241 (1997).

32. В. Р. Халилов, ТМФ **125**, 132 (2000).

33. Paolo Cea, Phys. Rev. D **32**, 2785 (1985).

34. A. Neagu and A. M. J. Schakel, Phys. Rev. D **48**, 1785 (1993).

35. А. А. Соколов, И. М. Тернов, *Релятивистский электрон*, Наука, Москва (1974), с. 392.

36. В. И. Ритус, Труды ФИАН **111**, 5 (1979).

37. И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, П. А. Эминов, П. Г. Мидодашвили, ЯФ **43**, 764 (1986).

38. K. V. Zhukovskii and P. A. Eminov, Phys. Lett. B **359**, 155 (1995).

39. А. И. Никишов, Труды ФИАН **111**, 152 (1979).

40. А. Е. Шабад, Труды ФИАН **192**, 52 (1986).

41. В. Ч. Жуковский, Т. Л. Шония, П. А. Эминов, ЖЭТФ **107**, 299 (1995).

42. А. В. Борисов, В. Ч. Жуковский, П. А. Эминов, ЖЭТФ **78**, 530 (1980).

43. К. В. Жуковский, П. А. Эминов, ЯФ **59**, 1265 (1996).

44. J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, 664 (1951).

45. П. А. Эминов, ЖЭТФ **149**, 76 (2016).

46. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Наука, Москва (1971), с. 1108.

47. V. R. Khalilov and I. V. Mamsurov, Eur. Phys. J. C **75**, 167 (2015).