

СПЕКТРЫ ШТАРКА – ЗЕЕМАНА И БЛОХИНЦЕВА В РИДБЕРГОВСКИХ АТОМАХ

*А. Ю. Летунов**, *В. С. Лисица*

*Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»
123182, Москва, Россия*

*Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
115409, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 12 мая 2020 г.,
после переработки 12 мая 2020 г.
Принята к публикации 19 июня 2020 г.

Рассматривается проблема ридберговских атомных спектров в скрещенных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{B} полях (комбинация эффектов Штарка и Зеемана), а также в осциллирующем электрическом поле. Ключевой проблемой является гигантский массив радиационных переходов между ридберговскими атомными состояниями. Для решения этой задачи были применены различные квазиклассические подходы. Найдены новые приближенные правила отбора для радиационных переходов и они в дальнейшем применены для упрощения сложных формул Гордона, содержащих гипергеометрические ряды, до тривиальных тригонометрических функций. Получены простые аналитические выражения для дипольных матричных элементов в водородоподобном атоме для серии $H_{n\alpha}$. Представлены результаты расчетов для радиационного перехода с уровня $n = 10$ на $n = 9$ для случаев параллельных и перпендикулярных полей \mathbf{E} и \mathbf{B} . Результат Блохинцева для одной штарковской компоненты обобщен на случай большого массива радиационных переходов между ридберговскими атомными состояниями. Проведено сравнение данных спектров в случае больших индексов модуляции со спектрами в статическом случае.

DOI: 10.31857/S0044451020110048

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема водородных спектров во внешних полях, рассматриваемая в этой работе, формально имеет квантовомеханическое решение. Однако его применение для определенных радиационных переходов, особенно между высоковозбужденными уровнями (ридберговскими), вынуждает работать с большим числом матричных элементов. Случай постоянного электрического поля глубоко изучен с различных сторон. Общие выражения для сдвига энергии и интенсивности радиационных переходов хорошо известны в случаях сферической [1–3] и параболической [4–6] систем координат. Для сферического квантования вычисления упрощены существованием правила отбора для орбитального квантового числа l , которое позволяет делать быстрые расчеты вероятностей перехода и изучать их соот-

ветствие с классическими результатами [2]. В присутствии электрического поля, переходя к параболической системе координат, приходится иметь дело с отсутствием правил отбора для параболических квантовых чисел n_1, n_2 , что приводит к обязательным трудностям в вычислениях, особенно для ридберговских атомных состояний, где массив радиационных переходов растет очень быстро (пропорционально n^4). Вопросы переходов между ридберговскими атомными состояниями представляют интерес как с точки зрения фундаментальной науки, так и с позиции приложений в вычислении профилей интенсивности для лабораторной [7–9] и астрофизической [10] плазмы. Целью настоящей работы является сравнение различных подходов для вычисления дипольных матричных элементов, получение приближенных правил отбора радиационных переходов между ридберговскими состояниями в присутствии электрического поля. С учетом этих результатов будет показано, как сложные формулы для интенсивности в электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{B} полях могут быть упрощены. В данной работе

* E-mail: letunovandrey11@yandex.ru

рассматриваются сравнительно сильные магнитные поля. Следовательно, поправками, связанными со спин-орбитальным взаимодействием, можно пренебречь.

Общий подход для водородоподобных систем основан на свойствах симметрии кулоновского поля. Эволюция атомных состояний определяется дополнительными интегралами движения, имеющими свойства углового момента $\mathbf{J}_{1,2}$, которые являются комбинацией векторов обычного углового момента \mathbf{L} и специфического интеграла движения в кулоновском потенциале — вектора Лапласа – Рунге – Ленца \mathbf{A} [11]:

$$\mathbf{J}_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} \pm \mathbf{A}), \tag{1}$$

где «1» относится к знаку +, а «2» к знаку –.

Сдвиг энергии для атома водорода в электрическом поле \mathbf{F} определяется проекциями векторов (1) на ось z (ось z совпадает с направлением электрического поля):

$$\Delta E^{(1)} = \frac{3}{2}nF(i_2 - i_1), \tag{2}$$

где n — главное квантовое число, $i_{1,2}$ — проекции векторов (1) на ось z .

В формуле (2) и во всех выражениях этой статьи используются атомные единицы. Также нам необходимо только первый порядок теории возмущения, так что верхний индекс «(1)» будет опускаться в формулах для сдвига энергии. Между параболическими квантовыми числами и $i_{1,2}$ существует связь [1]

$$\begin{aligned} i_2 - i_1 &= n_1 - n_2, \\ i_2 + i_1 &= m, \end{aligned} \tag{3}$$

где n_1, n_2 — параболические квантовые числа.

Сдвиг атомной энергии в скрещенных полях \mathbf{F} и \mathbf{B} определяется направлением векторов (1) на направления $\omega_{1,2}$:

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2c}\mathbf{B} \mp \frac{3}{2}n\mathbf{F}. \tag{4}$$

Причиной этому служит тот факт, что мы можем переписать возмущенную часть гамильтониана

$$H_1 = \frac{1}{2c}\mathbf{B} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$$

в следующем виде:

$$H_1 = \omega_1\mathbf{J}_1 + \omega_2\mathbf{J}_2, \tag{5}$$

$$E = \omega_1n' + \omega_2n'', \tag{6}$$

где n' и n'' — проекции (1) на векторы (4).

Это становится возможным благодаря наличию связи в случае кулоновского поля между вектором Рунге – Ленца и координатой:

$$\mathbf{A} = -\frac{2}{3n}\mathbf{r}. \tag{7}$$

Используя свойства углового момента векторов (1), с помощью параболических состояний мы можем выразить волновые функции электрона в представлении чисел n, n', n'' :

$$|n, n', n''\rangle = \sum_{i_1=-j}^j \sum_{i_2=-j}^j d_{i_1 n'}^j(\alpha_1) d_{i_2 n''}^j(\alpha_2) |n i_1 i_2\rangle, \tag{8}$$

где $d_{m_1 m_2}^j(\beta)$ — d -функция Вигнера,

$$j = \frac{n-1}{2}. \tag{9}$$

В формуле (8) $\alpha_{1,2}$ — углы между векторами $\mathbf{J}_{1,2}$ и $\omega_{1,2}$. Формулы записаны в системе координат, в которой направление магнитного поля совпадает с осью z :

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{\frac{1}{2c}B \mp \frac{3}{2}nF \cos \theta}{\omega_{1,2}}, \tag{10}$$

где θ — угол между электрическим \mathbf{F} и магнитным \mathbf{B} полями.

Выражение для координатного матричного элемента в представлении состояний (8) имеет сложную структуру. Оно содержит четыре суммы с большим числом слагаемых ($\sim n^4$), четыре функции Вигнера (эти математические объекты выражаются через полиномы Якоби [12]) и громоздкие матричные элементы Гордона [4]. Однако использование свойств симметрии кулоновского поля позволяет упростить финальные выражения до сравнительно коротких формул.

Вычисление матричных элементов дипольного момента с помощью волновых функций, соответствующих проекциям векторов (1) на направления (4), является очень громоздким. Тем не менее для случая $\Delta n \ll n$ мы можем использовать новые правила отбора для параболических квантовых чисел и приближенные выражения для координатных матричных элементов и упростить формулы для интенсивности излучения (интенсивность излучения в дипольном приближении пропорциональна квадрату модуля координатного матричного элемента).

Благодаря уникальным свойствам кулоновского поля, классические результаты начинают работать с хорошей точностью, даже когда $n \sim 1$. Точные выражения для дипольных матричных элементов

были получены Гордоном [4–6]. Связь между различными выражениями для матричного элемента Z была продемонстрирована в [13, 14]. В данных работах автор показал, что точный квантовый результат может быть выражен с помощью полиномов Якоби. Используя этот прием, для больших n удается показать, что формулы Гордона переходят в классические борновские выражения для интенсивности. Подобные вычисления, оказывается, можно просто проделать для серии $n\alpha$ ($\Delta n = 1$) для матричного элемента X (см. Приложение).

Вычисление интенсивности излучения водорода в осциллирующем электрическом поле — очень актуальная проблема для атомной физики. Данная ситуация может быть реализована, например, в турбулентной плазме. Также переменное поле может генерироваться лазерным излучением. Впервые данная проблема рассматривалась в работе [15]. Блохинцев получил выражение для интенсивности в случае одной штарковской компоненты. Данная работа дала толчок как для теоретических [16, 17], так и для экспериментальных исследований [18, 19]. Подробный анализ данной задачи представлен в [20–23]. Ниже будет представлена краткая теория, связанная с этим вопросом.

Как было показано в [15], штарковская компонента распадается на множество сателлитов, находящихся друг от друга на расстоянии $p\Omega$ (p — целое число, Ω — частота поля).

Рассмотрим водородоподобный атом во внешнем поле:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0 \cos(\Omega t). \tag{11}$$

Так, приведенная к безразмерному виду интенсивность одной штарковской компоненты будет равна

$$S\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p^2\left(\frac{\Delta\omega_F}{\Omega}\right) \delta\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega} - p\right), \tag{12}$$

где $J_p(z)$ — функция Бесселя порядка p ,

$$\Delta\omega_F = \frac{3}{2}F_0 \left[n(n_1 - n_2) - \bar{n}(\bar{n}_1 - \bar{n}_2) \right].$$

В действительности индекс « p » пробегает конечное число значений. Данное обстоятельство определяется условием

$$\int S(z) dz = 1. \tag{13}$$

Проблема числа сателлитов обсуждается в [20].

В случае $\frac{\Delta\omega_F}{\Omega} \gg 1$ величина $J_p^2(z)$ ($\frac{\Delta\omega_F}{\Omega}$ называется индексом модуляции) имеет резкий максимум

при $z = p$ и может оказаться, что удобнее пользоваться следующим приближением для распределения интенсивности вместо квадрата функции Бесселя:

$$I_s(\Delta\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(\Delta\omega_F)^2 - (\Delta\omega)^2}} \theta((\Delta\omega_F)^2 - (\Delta\omega)^2), \tag{14}$$

где $\theta(z)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

Одно из важнейших свойств этого приближения — то, что полный интеграл от (14) по всем частотам совпадает с интегралом от дельта-функционального распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_s(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) d\omega = 1.$$

Это демонстрирует соответствие между постоянным электрическим полем и случаем $\Omega \rightarrow 0$.

2. ПРАВИЛА ОТБОРА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ЧИСЕЛ В РИДБЕРГОВСКОМ АТОМЕ ВОДОРОДА

Классическое выражение для координатных матричных элементов между параболическими состояниями в атоме водорода было получено Борном и Крамерсом [24, 25]:

$$z_{n_1 \bar{n}_2 m}^{\bar{n}_1 \bar{n}_2 m} = \frac{1}{n\Delta n} (\sigma_2 J_{\Delta n_1}(\Delta n \sigma_1) J'_{\Delta n_2}(\Delta n \sigma_1) - \sigma_1 J_{\Delta n_2}(\Delta n \sigma_1) J'_{\Delta n_1}(\Delta n \sigma_1)), \tag{15}$$

$$x_{n_1 \bar{n}_2 m}^{\bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{m}} = \frac{1}{2n\Delta n} (\sigma_3 J_{\Delta n_1}(\Delta n \sigma_1) J_{\Delta n_2}(\Delta n \sigma_1) - \sigma_4 J_{\Delta n_2+1}(\Delta n \sigma_1) J_{\Delta n_1+1}(\Delta n \sigma_1)), \tag{16}$$

$$\Delta n = n - \bar{n},$$

$$\langle \bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{m} | x | n_1 n_2 m \rangle = (-1)^{\Delta m} \langle \bar{n}_1 \bar{n}_2 \bar{m} | y | n_1 n_2 m \rangle, \tag{17}$$

где $J_v(x)$ и $J'_v(x)$ — функция Бесселя и ее производная соответственно

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{n} \sqrt{n_1(n_1 + m)}, \\ \sigma_2 &= \frac{1}{n} \sqrt{n_2(n_2 + m)}, \\ \sigma_3 &= \frac{1}{n} \sqrt{(n_1 + m)(n_2 + m)}, \\ \sigma_4 &= \frac{1}{n} \sqrt{n_1 n_2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Выражение (17) является общим для всех типов дипольных матричных элементов.

Точное выражение для координатных матричных элементов содержит гипергеометрические ряды:

$$\psi_m(n_i, \bar{n}_i) = F\left(-n_i, -\bar{n}_i, m + 1, \frac{-4n\bar{n}}{(n - \bar{n})^2}\right), \quad (19)$$

где $F(a, b, c, z)$ – гипергеометрическая функция, n и \bar{n} – главные квантовые числа, относящиеся к двум различным состояниям.

Наличие этих сумм делает вычисление дипольных матричных элементов очень затруднительным для больших значений n . Для того чтобы решить эту проблему, Гуляев получил другую асимптотику для координатных матричных элементов [26, 27]. В этих работах автор заметил, что последнее слагаемое в (19) много больше остальных ($\Delta n \ll n$). Для серии $n\alpha$ данный подход позволяет получить простые результаты:

$$X_m^{m-1} = \frac{1}{4}b\sqrt{(n_1 + m)(n_2 + m)} \times \left[1 - \frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{b^2}\right], \quad (20)$$

$$X_m^{m+1} = \frac{1}{4}b\sqrt{n_1 n_2} \left[1 - \frac{(n_1 + m)(n_2 + m)}{b^2}\right], \quad (21)$$

$$Z_m^m = \frac{1}{4}b \left[\sqrt{(n_1 + m)n_1} \delta_{K,+1} + \sqrt{(n_2 + m)n_2} \delta_{K,-1} \right], \quad (22)$$

где $b^2 = 4n\bar{n}/(n - \bar{n})^2$,

$$K = (n_1 - n_2) - (\bar{n}_1 - \bar{n}_2). \quad (23)$$

Здесь величины с чертой относятся к состояниям с более низкой энергией.

Финальной процедурой, которую необходимо проделать для анализа приближения, является сравнение матричных элементов Гуляева и Борна для σ -серии (X). Сдвиг энергии в этом случае равен

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_F} = \bar{n}(\bar{n}_1 - \bar{n}_2) - n(n_1 - n_2), \quad (24)$$

где $\omega_F = 3F/2$.

Во-первых, график, представленный на рис. 1, демонстрирует, что мы можем использовать любое ранее упомянутое квазиклассическое приближение. Во-вторых, это сравнение – хорошая иллюстрация принципа соответствия в квантовой механике. Из

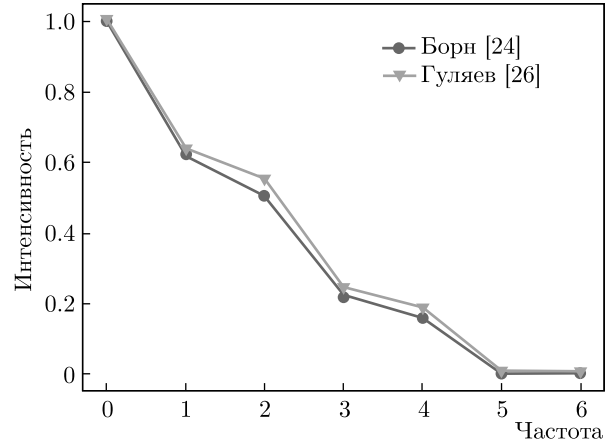


Рис. 1. Интенсивность излучения сигма-компоненты (деленная на максимум I) как функция энергетического сдвига (приведенная к безразмерному виду частота – сдвиг энергии, деленный на $\omega_F = 3F/2$, где F – модуль электрического поля). Переход с уровня $n = 7$ на $n = 6$

данного расчета видно, что приближение ридберговского атома применимо для водорода, даже если $n \sim 1$.

Одно из важнейших преимуществ сферической системы координат – это наличие правила отбора для орбитального числа l . Как мы увидим ниже, хотя исследование эффекта Штарка гораздо проще в параболической системе координат, отсутствие правил отбора для чисел n_1 и n_2 является большой проблемой для вычисления интенсивности излучения во внешних электрических и магнитных полях. Однако для больших n это неудобство может быть устранено. Для решения этой задачи будет использован подход из [26, 27]. Для начала рассмотрим новое квантовое число K (23).

Сдвиг энергии может быть переписан в следующем виде:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_F} = Kn + \Delta nk, \quad (25)$$

где $k = \bar{n}_1 - \bar{n}_2$ – электрическое квантовое число.

Для каждого значения Δn квантовое число K может принимать ограниченный ряд значений. Более того, в классическом пределе интенсивность излучения сильно зависит от этого числа. Например, для серии $n\beta$ [27] абсолютное значение дипольных матричных элементов с числами $K = \pm 1$ и $K = \pm 2$ на несколько порядков больше, чем остальных. Следовательно, с ростом n нужно вычислять лишь небольшую часть всех матричных элементов. Для серии $n\alpha$ есть только три возможности: $K = +1, -1$ и $K = 0$.

Для $K = 0$ магнитное квантовое число должно меняться. Правило отбора в параболических координатах для m остается тем же. Формулы для дипольных матричных элементов выражены через модуль магнитного квантового числа, так что, если это особо не оговаривается, используется обозначение $|m| = m$. Имеем

$$n_1 = \bar{n}_1, \quad n_2 = \bar{n}_2, \quad (26)$$

если $\Delta m = -1$,

$$n_1 = \bar{n}_1 + 1, \quad n_2 = \bar{n}_2 + 1, \quad (27)$$

если $\Delta m = +1$,

$$n_1 = \bar{n}_1 + 1, \quad n_2 = \bar{n}_2 \quad (28)$$

для $K = +1$,

$$n_1 = \bar{n}_1, \quad n_2 = \bar{n}_2 + 1 \quad (29)$$

для $K = -1$.

Из-за правила отбора для числа m случай $K = 0$ соответствует матричному элементу X , а $K = \pm 1$ — элементу Z .

Покажем во всех подробностях процесс получения правил отбора для дипольных переходов в случае серии $n\alpha$. Начнем с π -компоненты (матричный элемент Z):

$$\begin{aligned} (i_2 - i_1) - (\bar{i}_2 - \bar{i}_1) &= \pm 1, \\ i_2 + i_1 &= \bar{i}_2 + \bar{i}_1. \end{aligned} \quad (30)$$

Первое уравнение в (30) соответствует определению числа K (см. (23)) и тому обстоятельству, что число K для дипольных матричных элементов Z в случае серии $n\alpha$ может принимать только два значения ± 1 . Второе уравнение описывает правило отбора для магнитного квантового числа. Решение системы (30) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} i_2 &= \bar{i}_2 \pm \frac{1}{2}, \\ i_1 &= \bar{i}_1 \mp \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Для σ -компоненты (X) ситуация более сложная. Причиной служит то обстоятельство, что формулы (20), (21) записаны для модуля Δm , другими словами, в этих выражениях $\Delta m = |\bar{m} - m|$. Таким образом, система уравнений, соответствующая дипольному матричному элементу X , имеет вид

$$\begin{aligned} (i_2 - i_1) - (\bar{i}_2 - \bar{i}_1) &= 0, \\ |i_2 + i_1| &= |\bar{i}_2 + \bar{i}_1| \pm 1. \end{aligned} \quad (32)$$

Решение (32) представлено в Приложении:

$$\begin{aligned} i_2 &= \bar{i}_2 \pm \frac{1}{2}, \\ i_1 &= \bar{i}_1 \pm \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь знак «+» соответствует $m, \bar{m} \geq 0$ и $-m, \bar{m} \leq 0$. В данном случае m не обозначает модуль магнитного квантового числа! Другими словами, верхний знак в (33) соответствует возрастанию магнитного квантового числа, а нижний — убыванию.

3. ДИПОЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНОГО АТОМА ВО ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

В работе [11] атом водорода в скрещенных электрическом и магнитном полях был впервые рассмотрен в рамках квантовой механики. Идеи этой работы были использованы в [8] для вычисления профилей интенсивности спектральных линий. Согласно формуле (8) координатный матричный элемент может быть записан с помощью d -функций Вигнера:

$$\begin{aligned} a_{nm'n''}^{\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} &= \sum_{\bar{i}_1=-\bar{j}}^{\bar{j}} \sum_{\bar{i}_2=-\bar{j}}^{\bar{j}} \sum_{i_1=-j}^j \sum_{i_2=-j}^j d_{\bar{i}_1\bar{n}'}^{\bar{j}}(\bar{\alpha}_1) \times \\ &\times d_{i_2n''}^j(\alpha_2) d_{i_1n'}^j(\alpha_1) d_{i_2n''}^j(\alpha_2) a_{n\bar{i}_1\bar{i}_2}^{\bar{n}\bar{i}_1\bar{i}_2}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $a = X, Y, Z$.

Далее будет продемонстрирован процесс упрощения (34) для случая $\Delta n = 1$. Для того чтобы это сделать, необходимо использовать результаты Гуляева. Покажем выкладки для π -компоненты. Для начала рассмотрим первый квадратный корень в (22):

$$\sqrt{(n_1 + m)n_1}.$$

Существует связь между главным и параболическими квантовыми числами:

$$n = n_1 + n_2 + |m| + 1. \quad (35)$$

Используя (3) и (35), получим

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{n - |i_1 + i_2| + i_2 - i_1 - 1}{2}, \\ n_2 &= \frac{n - |i_1 + i_2| + i_1 - i_2 - 1}{2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь $\Delta n \ll n$, так что $i_1 + i_2 \approx \bar{i}_1 + \bar{i}_2$ и $i_1 - i_2 \approx \bar{i}_1 - \bar{i}_2$. Второе равенство справедливо из-за правил отбора для серии $n\alpha$:

а) $\bar{i}_1 + \bar{i}_2 \geq 0$,
 $n_1 \approx \frac{n}{2} - \bar{i}_1$,
 $n_2 + m \approx \frac{n}{2} + \bar{i}_2$;

б) $\bar{i}_1 + \bar{i}_2 \leq 0$,
 $n_1 \approx \frac{n}{2} + \bar{i}_2$,
 $n_2 + m \approx \frac{n}{2} - \bar{i}_1$.

В итоге

$$(n_1 + m)n_1 = \left(\frac{n}{2} - \bar{i}_1\right) \left(\frac{n}{2} + \bar{i}_2\right). \quad (37)$$

Проделав аналогичные преобразования для второго слагаемого в (22), получим

$$(n_2 + m)n_2 = \left(\frac{n}{2} + \bar{i}_1\right) \left(\frac{n}{2} - \bar{i}_2\right). \quad (38)$$

Из формулы (10) нетрудно видеть, что $\alpha_{1,2} \approx \bar{\alpha}_{1,2}$, когда $\Delta n \ll n$.

Далее следует использовать правила отбора для чисел i_1, i_2 . Это позволит редуцировать (34) к двойной сумме. Подстановка (37) и (38) в (34) для $a = Z$ разбивает выражение для матричного элемента на две независимые суммы:

$$Z_{nn'n''}^{\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} = Z_{1nn'n''}^{\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} + Z_{2nn'n''}^{\bar{n},\bar{n}',\bar{n}''}, \quad (39)$$

$$Z_{1,2nn'n''}^{\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} = \sum_{\bar{i}_1=-\bar{j}}^{\bar{j}} \sum_{\bar{i}_2=-\bar{j}}^{\bar{j}} d_{\bar{i}_1\bar{n}'}^{\bar{j}}(\alpha_1) \times \\ \times d_{\bar{i}_2\bar{n}''}^{\bar{j}}(\alpha_2) d_{\bar{i}_1 \pm \frac{1}{2}n'}^{\bar{j}}(\alpha_1) d_{\bar{i}_2 \mp \frac{1}{2}n''}^{\bar{j}}(\alpha_2) F_{1,2}(\bar{i}_1, \bar{i}_2), \quad (40)$$

где

$$F_1 = \sqrt{\left(\frac{n}{2} - \bar{i}_1\right) \left(\frac{n}{2} + \bar{i}_2\right)}, \\ F_2 = \sqrt{\left(\frac{n}{2} + \bar{i}_1\right) \left(\frac{n}{2} - \bar{i}_2\right)}.$$

Следующим шагом для упрощения является использование рекуррентных соотношений для d -функций [12]:

$$d_{m_1, m_2}^j(\beta) = \sqrt{\frac{j - m_2}{j - m_1}} \cos \frac{\beta}{2} d_{m_1+1/2, m_2+1/2}^{j-1/2}(\beta) - \\ - \sqrt{\frac{j + m_2}{j - m_1}} \sin \frac{\beta}{2} d_{m_1+1/2, m_2-1/2}^{j-1/2}(\beta), \quad (41)$$

$$d_{m_1, m_2}^j(\beta) = \sqrt{\frac{j - m_2}{j - m_1}} \sin \frac{\beta}{2} d_{m_1-1/2, m_2+1/2}^{j-1/2}(\beta) - \\ - \sqrt{\frac{j + m_2}{j - m_1}} \cos \frac{\beta}{2} d_{m_1-1/2, m_2-1/2}^{j-1/2}(\beta). \quad (42)$$

Здесь $j \neq m_1$, но мы можем пренебречь этими вкладками в случае $n \gg 1$. Для того чтобы можно было использовать (41) и (42), необходимо также поменять местами нижние индексы у d -функций. Это можно осуществить, используя свойства симметрии функций Вигнера:

$$d_{m_1, m_2}^j(\beta) = (-1)^{m_1 - m_2} d_{m_2, m_1}^j(\beta). \quad (43)$$

Последним необходимым для упрощения свойством d -функций является соотношение ортогональности:

$$\sum_{m_3=-j}^j (-1)^{m_3 - m_2} d_{m_2, m_3}^j(\beta) d_{m_3, m_1}^j(\beta) = \delta_{m_1, m_2}. \quad (44)$$

Во всех формулах считаем, что $j \approx n/2$. После подстановки (41), (42) в (40) легко увидеть, что множители в $F_{1,2}$ совпадают со знаменателями в рекуррентных формулах и, следовательно, их можно сократить. Поэтому коэффициенты в суммах (40) не зависят от индексов суммирования. Теперь можно свободно использовать (44) и получить следующие выражения:

$$Z_{nn'n''}^{\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} = (-1)^{\Delta\bar{n}' + \Delta\bar{n}''} \times \\ \times \frac{1}{4} b \left[Z_{nn'n''}^{(1)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} + Z_{nn'n''}^{(2)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} \right], \quad (45)$$

$$Z_{nn'n''}^{(1)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} = \left(\sqrt{\frac{n}{2} - n'} \cos \frac{\alpha_1}{2} \delta_{\bar{n}', n'+1/2} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{n}{2} + n'} \sin \frac{\alpha_1}{2} \delta_{\bar{n}', n'-1/2} \right) \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{n}{2} - n''} \sin \frac{\alpha_2}{2} \delta_{\bar{n}'', n''+1/2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{n}{2} + n''} \cos \frac{\alpha_2}{2} \delta_{\bar{n}'', n''-1/2} \right),$$

$$Z_{nn'n''}^{(2)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} = \left(\sqrt{\frac{n}{2} - n'} \sin \frac{\alpha_1}{2} \delta_{\bar{n}', n'+1/2} + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{n}{2} + n'} \cos \frac{\alpha_1}{2} \delta_{\bar{n}', n'-1/2} \right) \times \\ \times \left(\sqrt{\frac{n}{2} - n''} \cos \frac{\alpha_2}{2} \delta_{\bar{n}'', n''+1/2} - \right. \\ \left. - \sqrt{\frac{n}{2} + n''} \sin \frac{\alpha_2}{2} \delta_{\bar{n}'', n''-1/2} \right).$$

Делая аналогичные действия для X , получаем

$$X_{nn'n''}^{\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} = (-1)^{\Delta\bar{n}' + \Delta\bar{n}'' - 1} \times \\ \times \frac{1}{4} b \left[X_{nn'n''}^{(1)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} - X_{nn'n''}^{(2)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} \right], \quad (46)$$

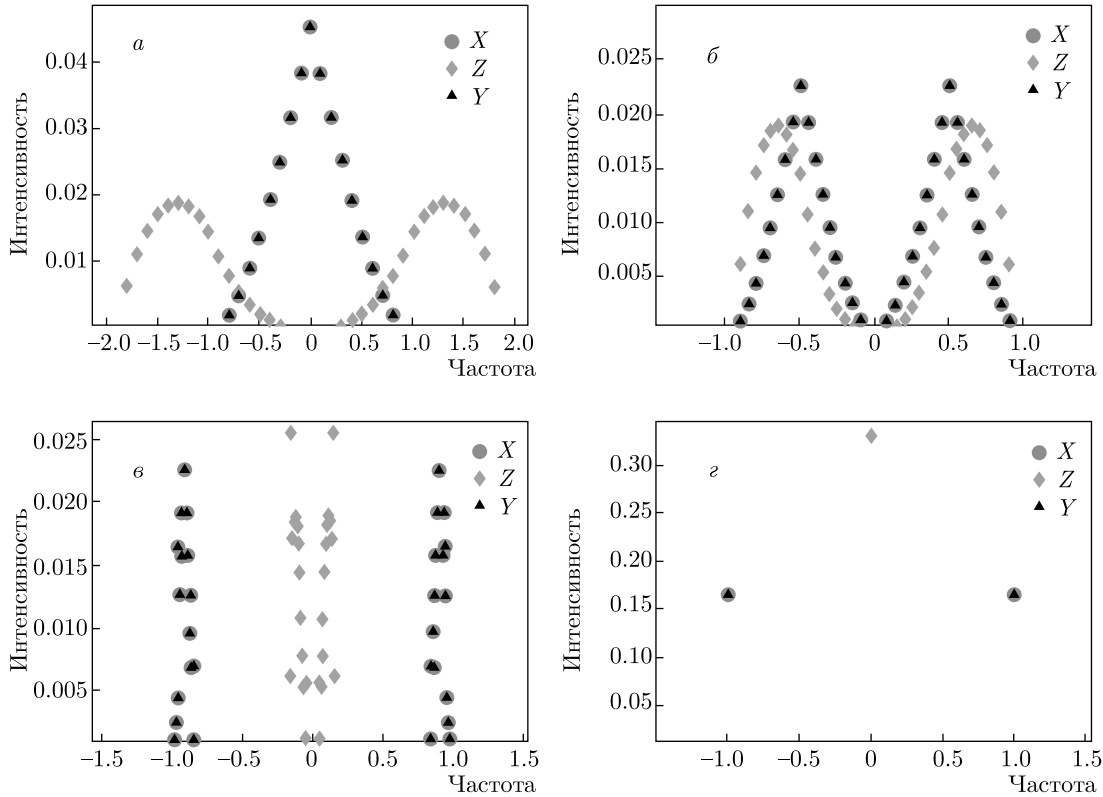


Рис. 2. Переход с уровня $n = 10$ на $n = 9$. Интенсивность, деленная на сумму всех компонент как функция сдвига энергии (48), (49) с $\theta = 0$: $u = 0$ (а), 1 (б), 10 (в), 1000 (г); $u = \frac{B}{3cnE}$

$$\begin{aligned}
 X_{nn'n''}^{(1)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} &= \left(\sqrt{\frac{n}{2} - n' \sin \frac{\alpha_1}{2}} \delta_{\bar{n}', n'+1/2} + \right. \\
 &+ \left. \sqrt{\frac{n}{2} + n' \cos \frac{\alpha_1}{2}} \delta_{\bar{n}', n'-1/2} \right) \times \\
 &\times \left(\sqrt{\frac{n}{2} - n'' \sin \frac{\alpha_2}{2}} \delta_{\bar{n}'', n''+1/2} + \right. \\
 &+ \left. \sqrt{\frac{n}{2} + n'' \cos \frac{\alpha_2}{2}} \delta_{\bar{n}'', n''-1/2} \right), \\
 X_{nn'n''}^{(2)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} &= \left(\sqrt{\frac{n}{2} - n' \cos \frac{\alpha_1}{2}} \delta_{\bar{n}', n'+1/2} - \right. \\
 &- \left. \sqrt{\frac{n}{2} + n' \sin \frac{\alpha_1}{2}} \delta_{\bar{n}', n'-1/2} \right) \times \\
 &\times \left(\sqrt{\frac{n}{2} - n'' \cos \frac{\alpha_2}{2}} \delta_{\bar{n}'', n''+1/2} - \right. \\
 &- \left. \sqrt{\frac{n}{2} + n'' \sin \frac{\alpha_2}{2}} \delta_{\bar{n}'', n''-1/2} \right).
 \end{aligned}$$

Согласно (17) и (37),

$$\begin{aligned}
 Y_{nn'n''}^{\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} &= (-1)^{\Delta\bar{n}' + \Delta\bar{n}'' - 1} \times \\
 &\times \frac{1}{4} b \left[X_{nn'n''}^{(1)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} + X_{nn'n''}^{(2)\bar{n}\bar{n}'\bar{n}''} \right]. \quad (47)
 \end{aligned}$$

Как мы можем видеть из формул (45)–(47), для больших значений n появляются правила отбора для чисел n' и n'' (из-за наличия дельта-символов в формулах). Это является следствием свойств углового момента векторов (1).

Для того чтобы показать связь между выражениями (45)–(47) с эффектами Штарка и Пашена–Бака, вычислим интенсивность как функцию ω с фиксированным значением угла θ между магнитным \mathbf{B} и электрическим \mathbf{F} полями с различными значениями параметра u :

$$u = \frac{B}{3cnE}, \quad (48)$$

$$\omega = (\bar{\omega}_1 \bar{n}' + \bar{\omega}_2 \bar{n}'' - \omega_1 n' - \omega_2 n'') / \Omega_{FB}, \quad (49)$$

$$\Omega_{FB} = \frac{1}{2c} B + \frac{3}{2} nF. \quad (50)$$

Интенсивность излучения атома водорода как функция сдвига энергии (49) во внешних параллельных \mathbf{F} и \mathbf{B} полях представлена на рис. 2. Нулевое значение магнитного поля соответствует $u = 0$ (рис. 2а). В этом случае формулы (49)–(51) приводят к обычному эффекту Штарка. Этот результат находится в согласии с [26]. Более того, подстановка

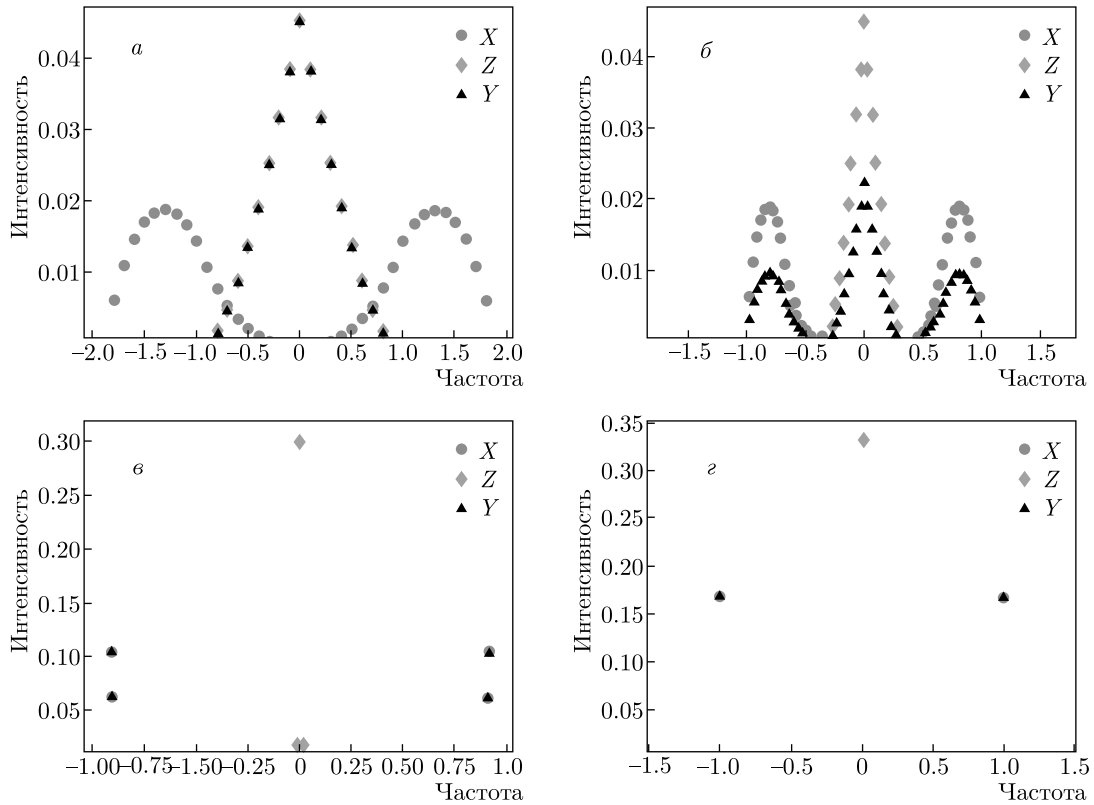


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но для $\theta = \pi/2$

$\theta = 0$ и $B = 0$ в (10) обращает полученные выражения в формулы (20)–(22). С ростом u матричный элемент X остается равным Y (рис. 2). Это заранее очевидно из аккуратного анализа формул (45)–(48). Физическое объяснение этого обстоятельства — наличие оси симметрии системы, роль которой играет направление z . В случае $B \gg F$ полученные выражения для дипольных матричных элементов воспроизводят эффект Пашена – Бака (рис. 2г).

Случай перпендикулярных полей показывает более низкую степень симметрии. С ростом параметра u могут возникать попарно неравные серии матричных элементов (рис. 3б). Когда магнитное поле равно нулю, \mathbf{F} направлено по оси x . Это теперь приводит к замене X на Z (рис. 3а). Для больших значений u мы опять приходим к чисто зеемановским компонентам (рис. 3г).

На рис. 2 и 3 представлены графики интенсивности, деленной на сумму всех компонент. Из-за того, что представлены вычисления сразу для трех поляризации, в расчетах присутствует несохранение полного интеграла интенсивности.

4. СПЕКТРЫ БЛОХИНЦЕВА В РИДБЕРГОВСКОМ АТОМЕ

Для того чтобы вычислить интенсивность излучения ридберговского атома, находящегося во внешнем поле (11), необходимо использовать соотношения (12), (13) и матричные элементы из [26, 27]. Рассмотрим следующий параметр:

$$r = \frac{3 F}{2 \Omega}. \tag{51}$$

Практика показывает, что в реальных физических ситуациях обычно $r \gtrsim 1$ или даже $r \gg 1$ (см., например, [28]). В случае ридберговского атома с большими значениями индекса модуляции возникает большое число спутников. Также, если спектральная линия имеет центральную компоненту (например, $H_{n\alpha}$) и $r \gtrsim 1$, то распределение интенсивности асимптотически приближается к дельта-функции. Боковыми компонентами можно пренебречь по сравнению с центральной. Это обстоятельство подробно обсуждается в [21, 23].

Для того чтобы выявить новые интересные эффекты, сфокусируемся на вычислении линий без

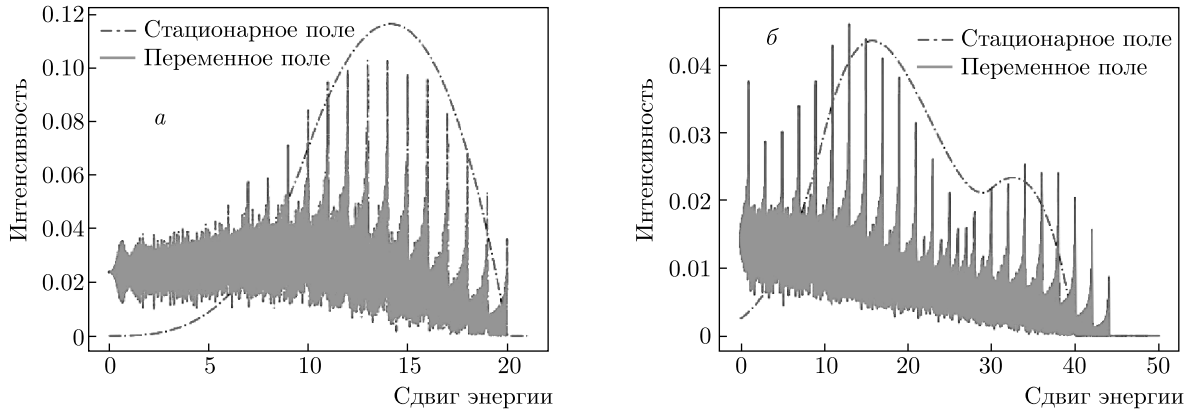


Рис. 4. Интенсивность (деленная на сумму всех компонент) как функция сдвига энергии (приведенная к безразмерному виду частота — сдвиг энергии, деленный на $\frac{3}{2}F_0$; $\frac{3}{2}\frac{F}{\Omega} = 1000$). а) Переход с $n = 10$ на $n = 9$ (только π -компонента!). б) Переход с $n = 10$ на $n = 8$

центральной компоненты. Найдем профили интенсивности $H_{n\beta}$ и π -компоненты $H_{n\alpha}$ в случае больших значений n . Сравним полученные результаты с интенсивностью излучения в постоянном поле.

Распределение интенсивности всех штарковских компонент имеет вид

$$I(\Delta\omega) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\tau} a_{\tau}^2 J_{\Delta\omega/\Omega}^2 \left(\frac{\Delta\omega\tau}{\Omega} \right), \quad (52)$$

где τ — полный набор квантовых чисел, a_{τ} — координатный матричный элемент.

Используя результаты из [27], соотношения (3), (9) и положив $n \gtrsim 1$, получим матричные элементы для серии $H_{n\beta}$:

$$(X_m^{m-1})^2 + (X_m^{m+1})^2 = (j \mp i_1)(j \pm i_2) \times \left[(j - i_1)(j - i_2) + (j + i_1)(j + i_2) \right]. \quad (53)$$

Здесь $K = +1$ для верхнего знака и $K = -1$ — для нижнего. Это $\sigma_{\pm 1}$. Имеем

$$(Z_m^m)^2 = (j \mp i_1)^2 (j \pm i_2)^2. \quad (54)$$

Здесь $K = +2$ для верхнего знака и $K = -2$ — для нижнего. Это $\pi_{\pm 2}$.

Сдвиг энергии зависит только от двух квантовых чисел i_1 и i_2 для фиксированного K (в действительности от \bar{i}_1 и \bar{i}_2 , но это не имеет значения для ридберговского атома). Таким образом, в (52) $\tau = i_1, i_2$. В спектре есть вырождение, поэтому суммирование по оставшимся квантовым числам приводит только к общему коэффициенту и не влияет на форму профиля.

Как было сказано выше, необходимо учитывать только серии элементов с $K = \pm 1$ и $K = \pm 2$. Интенсивностью остальных компонент можно пренебречь. Используя полученные результаты для матричных элементов (для $H_{n\alpha}$ см. (20)–(23)) и (51), можем вычислить распределение интенсивности.

Как можно увидеть из рис. 4, спутники, которые соответствуют каждой штарковской компоненте, воспроизводят форму стационарного контура. Из (14) следует, что при $\Delta\omega_F \rightarrow \Delta\omega$ распределение интенсивности имеет пик. Это наглядно продемонстрировано на рис. 4б: спутники приходят с «крыльев» в точку $\Delta\omega = 0$ и формируют центральную компоненту. Для $H_{n\alpha}$ это приводит к аномальному росту функции распределения в центре (рис. 5а). Выражение для интенсивности в постоянном поле можно найти в [26, 27].

Сравнение точных [20] и квазиклассических расчетов представлено на рис. 5б. Даже для перехода 4–2 можно наблюдать соответствие между двумя подходами. В действительности здесь не соблюдено условие $\Delta n \lesssim n$. Однако расположение всех пиков совпадает. Также существует большая область частот, где классический результат совпадает с квантовым.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для различных квазиклассических подходов с использованием параболического представления проведено подробное исследование ридберговских атомных спектров в скрещенных электрическом и магнитном полях. С помощью связи полиномов

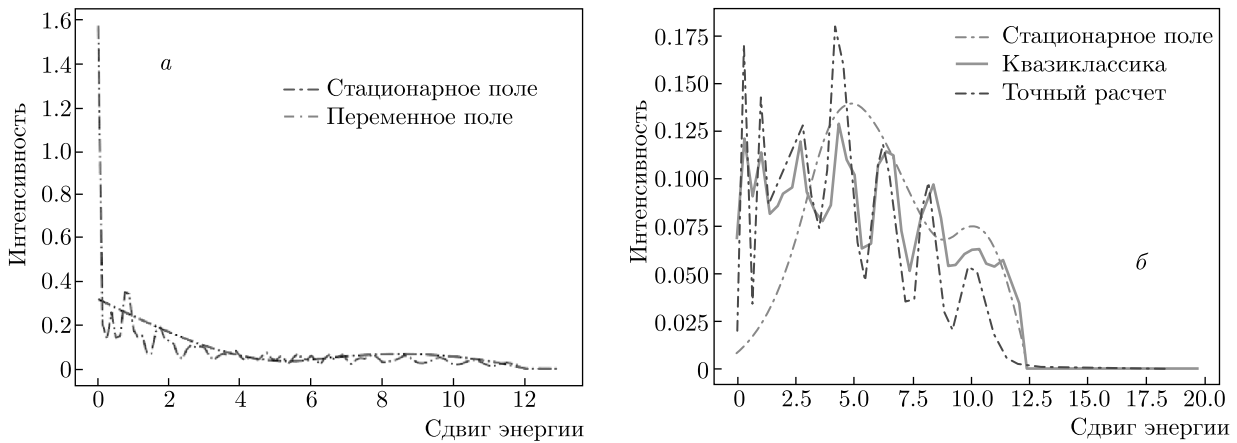


Рис. 5. Сравнение квазиклассического расчета, точных квантовых результатов [20] и стационарного случая. Интенсивность (деленная на сумму всех компонент) как функция сдвига энергии (приведенная к безразмерному виду частота — сдвиг энергии, деленный на $\frac{3}{2}F_0$). а) Переход с $n = 6$ на $n = 5$, $\frac{3}{2} \frac{F}{\Omega} = 8$. б) Переход с $n = 4$ на $n = 2$, $\frac{3}{2} \frac{F}{\Omega} = 3$

Якоби и гипергеометрической функции точные выражения Гордона для матричных элементов сведены к классическому результату Борна не только для Z - (как в [13]), но и для X (сигма)-компонент. Сравнение классического выражения Борна для интенсивности и квазиклассического [26] для сигма-компонент продемонстрировано на рис. 1. Это дает свободу в выборе приближения для дальнейших преобразований. Квазиклассическое приближение дает возможность получить приближенные правила отбора для параболических квантовых чисел и затем упростить выражения для вероятностей радиационных переходов до элементарных функций (тригонометрия и квадратные корни). Так, сложное выражение (34) переходит в формулы (45)–(48). Этот факт открывает простой путь к работе с ридберговскими атомными спектрами. Все эти результаты показывают классические и симметричные свойства кулоновского поля. Для того чтобы обобщить этот метод на случай $\Delta n > 1$, необходимо использовать рекуррентные соотношения для функций Вигнера (41), (42) несколько раз.

Результаты, полученные Блохинцевым в [15], обобщены на случай большого массива радиационных переходов. Подобные спектры реализуются в турбулентной плазме или в поле лазерного излучения. Квазиклассический подход может быть особенно полезен для диагностики водородоподобных ионов, так как частота излучения растет как Z^2 (Z — заряд ядра). Для того чтобы работать в пределах видимого диапазона, необходимо исследовать переходы с большим значением n , так что квази-

классические выражения для интенсивности упростят вычисления. Если в спектральной серии отсутствует центральная компонента, контур огибающей линии спутников будет повторять кривую стационарного профиля (рис. 4). Рисунок 5б показывает классические свойства кулоновского поля. Даже для перехода 4–2 имеется хорошее соответствие между классическими и квантовыми результатами. Для более высоких уровней можно свободно использовать приближение Гуляева вместо сложных формул Гордона.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Матричный элемент X в представлении полиномов Якоби

Существует связь между гипергеометрической функцией и полиномами Якоби:

$$F\left(-k, -k - \alpha, 1 + \beta, -\text{ctg}^2 \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{k! \Gamma(1 + \beta)}{k + 1 + \beta} \times \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}\right)^k P_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \varphi), \quad (55)$$

где $P_k^{(\alpha, \beta)}(z)$ — полином Якоби, $\Gamma(z)$ — гамма-функция.

Используя соотношение (55), можно переписать формулу Гордона с помощью полиномов Якоби:

$$X_{n_1, n_2, m-1}^{\bar{n}_1 \bar{n}_2, m} = \Pi_x [\Upsilon_{x_1}^J - \Upsilon_{x_2}^J], \quad (56)$$

где

$$\Pi_x = (-1)^{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \frac{a_0}{4((m-1)!)^2} \times \sqrt{\frac{(n_1+m)!(n_2+m)!(\bar{n}_1+m-1)!(\bar{n}_2+m-1)!}{n_1!n_2!\bar{n}_1!\bar{n}_2!}} \times \left(\frac{4n\bar{n}}{(n-\bar{n})^2}\right)^{m+1} \left(\frac{n-\bar{n}}{n+\bar{n}}\right)^{n+\bar{n}},$$

$$\Upsilon_{x_1}^J = \frac{N_1!N_2![(m-1)!]^2}{(N_1+m)!(N_2+m)!} \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}\right)^{N_1+N_2} \times P_{N_1}^{(\Delta_1, m-1)}(\cos \varphi) P_{N_2}^{(\Delta_2, m-1)}(\cos \varphi),$$

$$\Upsilon_{x_2}^J = \left(\frac{\Delta n}{n+\bar{n}}\right)^2 \frac{\bar{N}_1!\bar{N}_2![(m-1)!]^2}{(\bar{N}_1+m-1)!(\bar{N}_2+m-1)!} \times P_{\bar{N}_1}^{(\bar{\Delta}_1, m-1)}(\cos \varphi) P_{\bar{N}_2}^{(\bar{\Delta}_2, m-1)}(\cos \varphi),$$

$$\Delta_1 = |n_1 - \bar{n}_1|, \quad \Delta_2 = |n_2 - \bar{n}_2|, \quad \bar{\Delta}_1 = |n_1 - \bar{n}_1 - 1|, \\ \bar{\Delta}_2 = |n_2 - \bar{n}_2 - 1|, \quad \Delta = n - \bar{n}, \\ N_1 = \min(n_1, \bar{n}_1), \quad N_2 = \min(n_2, \bar{n}_2), \\ \bar{N}_1 = \min(n_1 + 1, \bar{n}_1), \quad \bar{N}_2 = \min(n_2 + 1, \bar{n}_2).$$

В этих выражениях приняты во внимание следующие соотношения:

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{4n\bar{n}}{\Delta^2}, \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{\Delta}{n+\bar{n}}, \quad \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \\ \cos \varphi = \frac{4n\bar{n} - \Delta^2}{(n+\bar{n})^2}. \tag{57}$$

Теперь не составляет никакого труда показать для серии $n\alpha$, что в случае $n \ll \Delta n$ выражение (55) совпадает с классическим результатом Борна. Для этого надо использовать асимптотику полиномов Якоби:

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(\cos \varphi) \approx \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{k!U^\alpha} \times \sqrt{\frac{\varphi}{\sin \varphi}} \frac{J_\alpha(U\varphi)}{\left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^\alpha \left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^\beta}, \quad \varphi \ll 1, \tag{58}$$

где

$$U^2 = A_0^2 - \left(\frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^2}{12} - \frac{1}{12}\right), \quad A_0 = k + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}.$$

Далее нужно упростить U в случае $n \gg 1$:

$$U_1 = \sqrt{\left(N_1 + \frac{\Delta_1}{2}\right)^2 - \frac{(m-1)^2}{2} + \frac{\Delta_1^2}{12} - \frac{1}{12}} = \sqrt{\left(N_1 + \frac{m + \Delta_1}{2} + \frac{m-1}{2}\right) \left(N_1 + \frac{m + \Delta_1}{2} - \frac{m-1}{2}\right) + \frac{\Delta_1^2 - 1}{12}}.$$

Если мы примем во внимание, что $\Delta_1 \sim 1$, то получим

$$U_1 \approx \sqrt{N_1(N_1 + m)}.$$

Аналогично для $U_1 = U_3, U_2 = U_4$.

После подстановки (57) в (55) и простых алгебраических преобразований получаем выражение, которое совпадает с формулой Борна (16).

Правила отбора σ -компоненты для серии $H_{n\alpha}$

Рассмотрим систему (32) с +1 во втором уравнении:

$$(i_2 - i_1) - (\bar{i}_2 - \bar{i}_1) = 0, \\ |i_2 + i_1| = |\bar{i}_2 + \bar{i}_1| + 1.$$

Решение имеет вид

а) $i_2 + i_1 \geq 0, \bar{i}_2 + \bar{i}_1 \geq 0$:

$$i_2 = \bar{i}_2 + \frac{1}{2}, \\ i_1 = \bar{i}_1 + \frac{1}{2};$$

б) $i_2 + i_1 \leq 0, \bar{i}_2 + \bar{i}_1 \geq 0$: эти переходы запрещены правилом отбора для m ;

в) $i_2 + i_1 \geq 0, \bar{i}_2 + \bar{i}_1 \leq 0$: существует только один переход, который удовлетворяет правилу отбора m : $0 \rightarrow -1$; его можно включить в пункт г);

г) $i_2 + i_1 \leq 0, \bar{i}_2 + \bar{i}_1 \leq 0$:

$$i_2 = \bar{i}_2 - \frac{1}{2}, \\ i_1 = \bar{i}_1 - \frac{1}{2}.$$

Проведя аналогичные действия, легко получить решение системы (32) с -1:

$$i_2 = \bar{i}_2 - \frac{1}{2},$$

$$i_1 = \bar{i}_1 - \frac{1}{2},$$

когда $i_2 + i_1 \geq 0$, $\bar{i}_2 + \bar{i}_1 \geq 0$;

$$i_2 = \bar{i}_2 + \frac{1}{2},$$

$$i_1 = \bar{i}_1 + \frac{1}{2},$$

когда $i_2 + i_1 \leq 0$, $\bar{i}_2 + \bar{i}_1 \leq 0$.

Можно записать решение в виде

$$i_2 = \bar{i}_2 \pm \frac{1}{2},$$

$$i_1 = \bar{i}_1 \pm \frac{1}{2}. \quad (59)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Vol. 3, Elsevier (2013).
2. N. B. Delone, S. P. Goreslavsky, and V. P. Krainov, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **27**, 4403 (1994).
3. I. I. Sobelman, *Introduction to the Theory of Atomic Spectra: International Series of Monographs in Natural Philosophy*, Vol. 40, Elsevier (2016).
4. Г. Бете, Э. Солпитер, *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*, Физматлит, Москва (1960).
5. W. Gordon, *Ann. Phys.* **394**, 1031 (1929).
6. A. B. Underhill, *Publ. Dominion Astrophys. Obs.* **8**, 386 (1951).
7. G. Mathys, *Astron. Astrophys.* **141**, 248 (1984).
8. V. G. Novikov, V. S. Vorobyov, L. G. Dyachkov, and A. F. Nikiforov, *JETP* **92**, 441 (2001).
9. J. Rosato, Y. Marandet, and R. Stamm, *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer* **187**, 333 (2017).
10. M. A. Gordon and R. L. Sorochenko, *Radio Recombination Lines: Their Physics and Astronomical Applications*, Vol. 282, Springer Sci. & Business Media (2009).
11. Y. N. Demkov, B. S. Monozon, and V. N. Ostrovsky, *JETP* **30**, 775 (1970).
12. D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, World Sci. (1988).
13. D. P. Dewangan, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **41**, 015002 (2007).
14. D. P. Dewangan, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **36**, 2479 (2003).
15. D. I. Blochinzew, *Phys. Z. Sow. Union* **4**, 501 (1933).
16. E. V. Lifshits, *Technical Report*, Physical-Technical Inst., Kharkov (1967).
17. E. A. Oks and G. V. Sholin, *Zh. Tekhnich. Fiz.* **46**, 254 (1976).
18. A. S. Antonov, O. A. Zinovev, V. D. Rusanov, and A. V. Titov, *Sov. Phys. JETP* **31**, 838 (1970).
19. E. K. Zavoyskiy, Yu. G. Kalinin, V. A. Skorupin, V. V. Shapkin, and G. V. Sholin, in *Reports of the Academy of Sciences*, Vol. **194**, pp. 55–58, Russian Academy of Sciences (1970).
20. E. A. Oks, *Plasma Spectroscopy: The Influence of Microwave and Laser Fields*, Vol. 9, Springer Sci. & Business Media (2012).
21. А. Б. Березин, Б. В. Люблин, Д. Г. Яковлев, *Штарковская спектроскопия водородных линий в плазме*, НИИЭФА (1983).
22. Л. А. Буреева, В. С. Лисица, *Возмущенный атом*, ИздАТ (1997).
23. V. S. Lisitsa, *Atoms in Plasmas*, Vol. 14, Springer Sci. & Business Media (1995).
24. M. Born, F. Hund, and P. Jordan, *Vorlesungen über Atommechanik*, Vol. 1, Springer (1925).
25. H. A. Kramers, *Intensities of Spectral Lines*, Kobenhavn, A. F. Host (1919).
26. S. A. Gulyaev, *Sov. Astron.* **20**, 573 (1976).
27. S. A. Gulyaev, *Sov. Astron.* **22**, 572 (1978).
28. E. A. Oks, *Atoms* **7**(1), 25 (2019).