ЖЭТФ, 2020, том 158, вып. 5 (11), стр. 962–967 

# РЕЛАКСАЦИЯ И РЕКОМБИНАЦИЯ АНТИПРОТОНОВ И ПОЗИТРОНОВ В СИЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

***А. А. Бобров*** [*]

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук*
*125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 25 марта 2020 г.,
после переработки 9 июля 2020 г.
Принята к публикации 11 июля 2020 г.

Предложена физическая модель, позволяющая при заданных параметрах антипротон-позитронной плазмы определять распределения по скоростям образующихся в результате трехчастичной рекомбинации атомов антиводорода. Релаксация скоростей частиц учитывается в рамках подхода Дербенева и Скринского. Скорость рекомбинации калибруется по имеющимся результатам расчетов молекулярной динамики. Получено хорошее согласие с экспериментальными результатами. Модель позволяет оценивать эффективность захвата атомов в условиях экспериментов по получению антиводорода.

**DOI:** 10.31857/S0044451020110000

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В экспериментах по получению антиводорода [1–3] антипротоны инжектируются в облако холодных позитронов с температурой $\sim 10$ К и концентрацией $\sim 10^8$ см$^{-3}$, удерживаемых в сильном магнитном поле порядка 1–3 Тл. В образующейся заряженной плазме (число позитронов на несколько порядков превышает число антипротонов) в процессах взаимодействия частиц происходит обмен энергиями между антипротонами и позитронами и рекомбинация с образованием атомов антиводорода. Образующиеся атомы захватываются в магнитные ловушки глубиной около 0.5 К.

Начальные значения кинетической энергии антипротонов в этих экспериментах составляют от 40 К до $\sim 10$ эВ, поэтому для увеличения доли захваченных атомов важно знать, как зависит скоростное распределение образующихся атомов от параметров эксперимента.

Экспериментам по получению антиводорода предшествовали теоретические исследования процессов релаксации и рекомбинации в антипротон-позитронной плазме, в которых определялись оптимальные экспериментальные условия (см. обзор [4]).

[*] E-mail: abobrov@inbox.ru

Дальнейшие исследования кинетики антипротон-позитронной плазмы и сравнение с полученными экспериментальными результатами обсуждались в ряде работ, см., например, [5, 6]. Особенностью этих работ является использование численных методов моделирования, результаты которого трудно сопоставлять с экспериментом.

В настоящей работе предложена аналитическая модель, позволяющая оценивать скоростные распределения как антипротонов, так и атомов, а также эффективность захвата атомов антиводорода в ловушку.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 с использованием подхода Дербенева и Скринского [7] и стохастических уравнений определена зависимость от времени распределения антипротонов по скоростям. Показано, как, зная скорость рекомбинации, перейти к распределению атомов по скоростям. В разд. 3 найденные распределения сопоставлены с экспериментальными результатами. И далее показано, как можно оценить эффективность захвата атомов.

## 2. ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

### 2.1. Скоростная релаксация

Как уже отмечено выше, в рассматриваемых экспериментах число антипротонов много меньше числа позитронов. В силу этого взаимодействием антипротонов между собой можно пренебречь и задачу о релаксации скорости антипротонов можно свести к задаче об одиночном антипротоне.

Рассмотрим антипротон, появляющийся в начальный момент времени в бесконечной однородной плазме позитронов, находящейся в сильном однородном постоянном магнитном поле. Будем искать вероятность того, что антипротон будет иметь определенную скорость через время $t$. Для этого сначала нам необходимо знать диффузионные коэффициенты для антипротона.

Диффузионные коэффициенты определим в рамках подхода Дербенева и Скринского [7]. Сила и тензор диффузии импульса в этом подходе представляются в виде суммы вкладов быстрых (незамагниченных) и адиабатических столкновений:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 + \mathbf{F}^A, \quad d_{\alpha\beta} = \frac{d}{dt}\langle \Delta p_\alpha \Delta p_\beta \rangle = d^0_{\alpha\beta} + d^A_{\alpha\beta}. \quad (1)$$

Для быстрых столкновений сила и тензор диффузии записываются в обычном виде:

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi n e^4}{m_e} \int L^0(u) \frac{\mathbf{u}}{u^3} f(\mathbf{v}_e)\, d^3 v_e, \quad (2)$$

$$d^0_{\alpha\beta} = 4\pi n e^4 \int L^0(u) \frac{u^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta}{u^3} f(\mathbf{v}_e) d^3 v_e, \quad (3)$$

где $n$ — концентрация позитронов, $e$ — заряд электрона, $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_e$ — относительная скорость антипротона и позитрона, $f(\mathbf{v}_e)$ — распределение Максвелла для позитронов.

Кулоновский логарифм для быстрых столкновений записывается в виде

$$L^0(u) = \ln \frac{u_A/\Omega}{e^2/m_e u^2}, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}_A = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{e\parallel}$ — относительная скорость антипротона и ларморовского кружка, соответствующего замагниченному позитрону, $\Omega$ — ларморовская частота для позитрона.

Тензор адиабатических столкновений определяется заменой $u$ на $u_A$:

$$d^A_{\alpha\beta} = 4\pi n e^4 \int L^A \frac{u_A^2 \delta_{\alpha\beta} - u_{A\alpha} u_{A\beta}}{u_A^3} f_\parallel(v_{e\parallel}) dv_{e\parallel}, \quad (5)$$

где $f_\parallel$ — одномерная функция распределения по компоненте скорости позитрона, параллельной направлению магнитного поля.

Кулоновский логарифм $L^A$ выберем в виде

$$L^A = \ln \sqrt{1 + \left(\frac{u_A/\omega_p}{e^2/m_e u^2}\right)^2}, \quad (6)$$

где $\omega_p = (4\pi n e^2/m_e)^{1/2}$ — плазменная частота позитронов.

Адиабатическая сила трения выводится в приближении бесконечного поля для случая, когда поперечное к магнитному полю движение частиц фона полностью заморожено. Влияние магнитного поля на движение тяжелой частицы не учитывается. Сила выражается следующим образом:

$$\mathbf{F}^A = \frac{2\pi e^4 n}{m_e} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle \frac{v_\perp^2}{u_A^3} L^A + 2\frac{u_\parallel^2}{u_A^3} \right\rangle, \quad (7)$$

где усреднение проводится по одномерному распределению позитронов.

При скорости антипротона, намного превышающей тепловой разброс скоростей позитронов $v \gg \Delta_{e\parallel} = (T_e/m_e)^{1/2}$, где $T_e$ — температура позитронов, выражение (7) имеет следующий предел (в компонентах поперек и вдоль магнитного поля):

$$\mathbf{F}^A_\perp = -\frac{2\pi n e^4}{m_e} L^A \frac{v_\perp^2 - 2v_\parallel^2}{v^2} \frac{\mathbf{v}_\perp}{v^3}, \quad (8)$$

$$F^A_\parallel = -\frac{2\pi n e^4}{m_e} \left(2L^A \frac{v_\perp^2}{v^2} + 2\right) \frac{v_\parallel}{v^3}. \quad (9)$$

В наиболее интересном случае $\Delta_{e\parallel} \gg v$ выражения для адиабатической силы трения и тензора диффузии запишутся в виде

$$\mathbf{F}^A_\perp = -2\sqrt{2\pi} \frac{n e^4 L^A}{m_e \Delta^3_{e\parallel}} \mathbf{v}_\perp \ln\left(\frac{\Delta_{e\parallel}}{v_\perp}\right), \quad (10)$$

$$F^A_\parallel = -2\sqrt{2\pi} \frac{n e^4 L^A}{m_e \Delta^3_{e\parallel}} v_\parallel, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt}\langle (\Delta p_\perp)^2 \rangle = \frac{8\sqrt{2\pi} n e^4}{\Delta_{e\parallel}} \ln\left(\frac{\Delta_{e\parallel}}{v_\perp}\right) L^A, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt}\langle (\Delta p_\parallel)^2 \rangle = \frac{4\sqrt{2\pi} n e^4}{\Delta_{e\parallel}} L^A. \quad (13)$$

В кулоновском логарифме (6) при этом $u$ и $u_A$ следует заменить на $\Delta_{e\parallel}$. Ниже мы будем рассматривать выражения в пределе малых скоростей антипротонов.

Выражения (10) и (12) содержат в себе логарифмическую расходимость при $v_\perp \to 0$, однако, как показывают расчеты [8], $v_\perp$ в знаменателе под знаком логарифма можно заменить равновесной скоростью $(2T_e/m_p)^{1/2}$, где $m_p$ — масса протона.

Направим одну из осей ($z$) вдоль магнитного поля. В этом случае можно записать следующие стохастические уравнения для скорости антипротона:

$$dv_x = (-v_x \beta_\perp + v_y \Omega_p)\, dt + \sigma_\perp \delta W_{1t}, \quad (14)$$

$$dv_y = (-v_y\beta_\perp - v_x\Omega_p)\,dt + \sigma_\perp \delta W_{2t}, \quad (15)$$

$$dv_z = -v_z\beta_\parallel dt + \sigma_\parallel \delta W_{3t}, \quad (16)$$

где $\delta W_{it}$ —винеровский шум, $\beta_i$ и $\sigma_i$ — коэффициенты сноса и диффузии, $\Omega_p$ — ларморовская частота для антипротонов.

В условиях рассматриваемых экспериментов по антиводороду основной вклад в диффузию и трение вносят адиабатические столкновения в силу того, что $\Delta_{e\parallel}/\Omega \ll e^2/m_e u^2$. Тогда коэффициенты в уравнениях (14)–(16) определяются только выражениями (10)–(13) и записываются следующим образом:

$$\beta_\perp = \frac{2\sqrt{2\pi} n e^4 L^A}{m_e \Delta_{e\parallel}^3 m_p} \ln \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{2m_e}}, \quad (17)$$

$$\beta_\parallel = \frac{2\sqrt{2\pi} n e^4 L^A}{m_e \Delta_{e\parallel}^3 m_p}, \quad (18)$$

$$\sigma_\perp^2 = \frac{4\sqrt{2\pi} n e^4 L^A}{m_p^2 \Delta_{e\parallel}} \ln \frac{\sqrt{m_p}}{\sqrt{2m_e}}, \quad (19)$$

$$\sigma_\parallel^2 = \frac{4\sqrt{2\pi} n e^4 L^A}{m_p^2 \Delta_{e\parallel}}. \quad (20)$$

Система (14)–(16) является процессом Орнштейна – Уленбека в магнитном поле. Этот процесс рассматривался в работах [9, 10], решение для продольного направления можно записать в виде выражения для плотности условной вероятности продольной компоненты скорости антипротона:

$$P_\parallel(v_\parallel, t|v_{\parallel 0}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\parallel}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(v_\parallel - v_\parallel^{av})^2}{D_\parallel}\right), \quad (21)$$

где $D_\parallel = \sigma_\parallel^2/(2\beta_\parallel)(1 - e^{-2\beta_\parallel t})$, $v_\parallel^{av} = v_{\parallel 0} e^{-\beta_\parallel t}$.

В поперечном к магнитному полю направлении удобнее записать плотность вероятности для компоненты скорости $v_\perp = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2}$, воспользовавшись $\chi$-распределением:

$$P_\perp(v_\perp, t|v_{\perp 0}) = \exp\left(-\frac{v_\perp^2 + (v_\perp^{av})^2}{2D_\perp}\right) \frac{v_\perp}{D_\perp} I_0\left(\frac{v_\perp v_\perp^{av}}{D_\perp}\right), \quad (22)$$

где $D_\perp = \sigma_\perp^2/(2\beta_\perp)(1 - e^{-2\beta_\perp t})$, $v_\perp^{av} = v_{\perp 0} e^{-\beta_\perp t}$, $I_0$— модифицированная функция Бесселя первого рода.

Таким образом, если в начальный момент времени в позитронной плазме появились антипротоны со скоростями $v_0 = (v_{\perp 0}^2 + v_{\parallel 0}^2)^{1/2}$, то в момент времени $t$ их распределение по скоростям будет иметь вид

$$P_{ap}(v_\parallel, v_\perp, t) = P_\parallel(v_\parallel, t|v_{\parallel 0}) P_\perp(v_\perp, t|v_{\perp 0}). \quad (23)$$

### 2.2. Рекомбинация

В этом разделе обсудим, как на основе полученной в предыдущем разделе временной зависимости скоростного распределения антипротонов получить скоростное распределение для атомов антиводорода. Для этого необходимо знать скорость рекомбинации $\nu_r$.

Поскольку масса антипротона значительно превышает массу позитрона, после рекомбинации атом начинает двигаться со скоростью, которую имел антипротон перед рекомбинацией. Тогда можно оценить плотности вероятностей для компонент скоростей атомов через время $T \gg \nu_r^{-1}$ после появления антипротонов, используя следующее выражение:

$$P_{AH}(v_\parallel, v_\perp) = \int_0^T P_{ap}(v_\parallel, v_\perp, t)\nu_r \exp(-\nu_r t)\,dt. \quad (24)$$

Следует отметить, что при $T \gg \nu_r^{-1}$ правая часть в формуле (24) не зависит от $T$.

В условиях рассматриваемых экспериментов доминирующим процессом рекомбинации является трехчастичная рекомбинация. Несмотря на сильное магнитное поле, работы [6, 11] показывают, что скорость трехчастичной рекомбинации определяется той же зависимостью, что и в обычной плазме без магнитного поля:

$$\nu_r = C\frac{n^2 e^{10}}{\sqrt{m_e} T_e^{9/2}}. \quad (25)$$

При трехчастичной рекомбинации сначала образуются высоковозбужденные атомы с энергией связи порядка $T_e$. Затем в результате неупругих соударений атома со свободными позитронами энергия связи может увеличиваться и уменьшаться (атом также может быть реионизован). Можно предположить, что при этом диффузионном движении связанного позитрона по оси энергии кинетическая энергия атома не меняется.

В работе [11] рассматривался случай бесконечного магнитного поля и было показано, что при достижении определенного значения энергии связи ($\approx 4T_e$) атомы практически не могут быть реионизованы, скорость образования атомов с такой энергией связи и определяла скорость рекомбинации. При этом было получено значение коэффициента $C \approx 0.1$. Однако, так как нас интересует кинетическая энергия атома, а при изменении энергии связи от $T_e$ до $4T_e$ кинетическая энергия атома не меняется, то использование значения $C \approx 0.1$ в (24) может привести к недооценке скорости рекомбинации.

В работе [6] была определена скорость образования атомов с энергией связи $T_e$, результаты расчетов хорошо аппроксимируются (25) при значении $C = 3$ (см. табл. 2 в [6]). Поскольку атом с такой энергией связи может быть реионизован и антипротон может снова участвовать в обмене энергией с позитронами, использование значения $C = 3$ может привести к переоценке скорости рекомбинации. Однако, как показано в следующем разделе, использование значения $C = 3$ дает лучшее согласие при сравнении с экспериментом.

## 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

### 3.1. Пространственное распределение актов аннигиляции

В работе [1] было исследовано распределение актов аннигиляции образующихся атомов антиводорода по осевой координате. Установка представляла собой цилиндрическую камеру. В центре установки происходило смешивание антипротонов и позитронов, удерживаемых в поперечном направлении полем 3 Тл, направленным вдоль оси установки. Движение в продольном направлении ограничивалось соответствующими градиентами потенциала, создаваемого цилиндрическими электродами, на поверхности которых и происходила аннигиляция.

В экспериментах [1] антипротоны инжектировались с энергией 15 эВ, их скорость при этом превышала тепловую скорость позитронов, удерживаемых при температуре 15 К и концентрации $1.7 \cdot 10^8$ см$^{-3}$. Из (8) и (9) видно, что при большой скорости антипротона поперечная компонента скорости стремится к значению $v_\perp^2 = 2v_\parallel^2$. Тогда для описания этих экспериментов предположим, что процесс рекомбинации начинается, когда скорость антипротона снизится до тепловой скорости позитронов, причем компоненты начальной скорости будут находиться в указанном соотношении, т. е. $v_{\perp 0}^2 = 2T_e/m_e$, $v_{\parallel 0}^2 = T_e/m_e$.

Еще одной особенностью этого эксперимента является множественность проходов антипротонов через облако позитронов. Предполагая, что направления входа, при которых скорость антипротона снижается до скорости позитронов, равновероятны, заменим распределение (21) на полусумму

$$P'_\parallel(v_\parallel, t) = \frac{1}{2}\left(P_\parallel(v_\parallel, t|v_{\parallel 0}) + P_\parallel(v_\parallel, t|-v_{\parallel 0})\right).$$

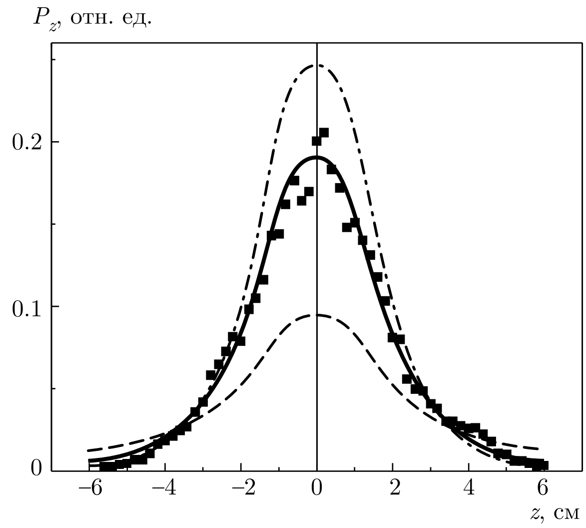


**Рис. 1.** Распределение актов аннигиляции по оси $z$: точки — эксперимент [1]; сплошная кривая — формула (26) для $n = 1.7 \cdot 10^8$ см$^{-3}$ и $C = 3$; штрихпунктирная кривая — формула (26) для $n = 1.7 \cdot 10^8$ см$^{-3}$ и $C = 0.1$; штриховая кривая — формула (26) для $n = 5 \cdot 10^8$ см$^{-3}$ и $C = 3$

Кроме того, необходимо учесть, что облако позитронов вытянуто вдоль оси установки и имеет размер порядка $L = 3$ см в продольном направлении и 2 мм в поперечном (поперечным размером пренебрежем).

В итоге распределение по осевой координате ($z$) найдем по следующей формуле:

$$P_z(z) = \int_0^\infty \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\infty P_\perp(v_\perp, t|v_{\perp 0}) \frac{v_\perp}{r} \times \\ \times P'_\parallel((z+x)v_\perp/r, t)\nu_r \exp(-\nu_r t)\, dt\, dx\, dv_\perp, \quad (26)$$

где $r$ — расстояние от оси до поверхности, на которой происходит аннигиляция атомов. Из [2] это расстояние можно оценить как $r = 1.25$ см.

На рис. 1 представлены распределения, полученные по формуле (26) с разными значениями коэффициента $C$. Для концентрации позитронов, соответствующей экспериментальной, имеется хорошее согласие с экспериментальным результатом при $C = 3$. Для большей плотности распределение уширено вследствие того, что характерное время рекомбинации становится сравнимо или меньше характерного времени торможения антипротонов за счет столкновения с позитронами.

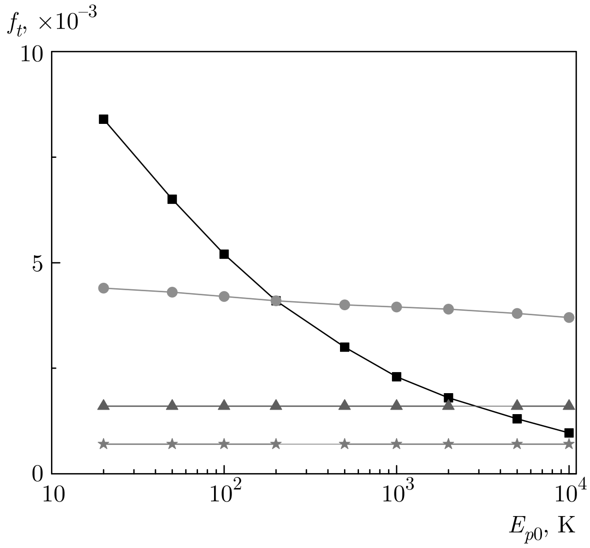


**Рис. 2.** Доля атомов с энергией меньше 0.5 К в зависимости от начальной энергии антипротона для концентрации позитронов $n = 1.3 \cdot 10^8$ см$^{-3}$ и разных температур позитронов: квадраты — $T_e/k_B = 7.5$ К, кружки — $T_e/k_B = 15$ К, треугольники — $T_e/k_B = 30$ К, звезды — $T_e/k_B = 50$ К

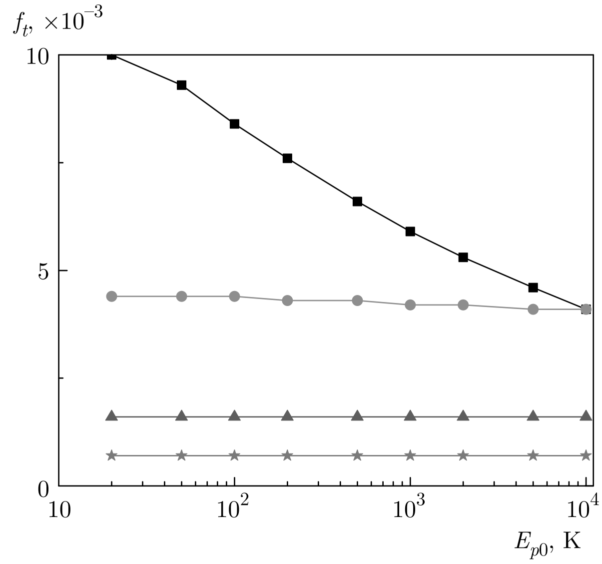


**Рис. 3.** То же, что на рис. 2, для $n = 0.65 \cdot 10^8$ см$^{-3}$

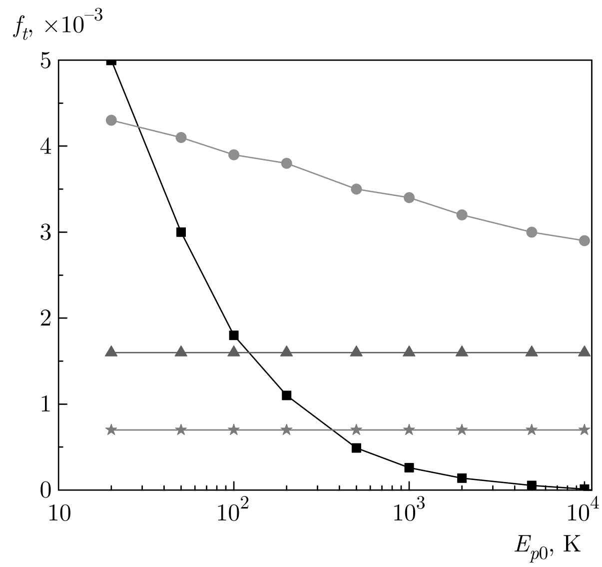


**Рис. 4.** То же, что на рис. 2, для $n = 2.6 \cdot 10^8$ см$^{-3}$

### 3.2. Эффективность захвата атомов

В экспериментах [3] образующиеся атомы антиводорода накапливаются в магнитных ловушках глубиной около 0.5 К. Полученные в настоящей работе скоростные распределения позволяют оценить эффективность захвата атомов в зависимости от параметров эксперимента. Долю атомов с энергией ниже 0.5 К можно оценить, проинтегрировав (24) (предполагая, что время эксперимента намного превышает характерное время рекомбинации):

$$f_t = \iint\limits_{v_\parallel^2 + v_\perp^2 < 2k_B \cdot 0.5/m_p} P_{AH}(v_\parallel, v_\perp)\, dv_\perp\, dv_\parallel. \qquad (27)$$

На рис. 2 и 3 показаны зависимости $f_t$ от начальной энергии антипротонов для значений концентраций позитронов, использованных в экспериментах (везде в $\nu_r$ подставлялось значение $C = 3$). Энергия антипротонов задавалась так же, как и в предыдущем разделе: $v_{\parallel 0} = (E_{p0} k_B/m_p)^{1/2}$ и $v_{\perp 0} = (2E_{p0} k_B/m_p)^{1/2}$. Результаты качественно согласуются с ростом эффективности захвата в эксперименте при уменьшении температуры позитронов от 50 К до 15 К.

На рис. 4 представлен график $f_t$ для большей плотности позитронов $n = 2.6 \cdot 10^8$ см$^{-3}$. Из рисунков видно, что для $T_e/k_B > 30$ К эффективность практически не меняется с изменением плотности, а для $T_e/k_B = 7.5$ К эффективность захвата резко уменьшается с ростом плотности. Это связано с тем, что скорость рекомбинации растет и антипротоны не успевают термализоваться в столкновениях с позитронами.

Следует отметить, что на образование атомов могут влиять также факторы, не связанные с антипротон-позитронной кинетикой, поэтому имеет смысл анализировать относительные изменения, а не абсолютные значения $f_t$. Также отметим, что оценка скорости рекомбинации в работе [6] была сделана для $T_e/k_B > 15$ К. Точки для $T_e/k_B = 7.5$ К на рисунках были получены с использованием экстраполяции скорости рекомбинации (25) с $C = 3$. При низких температурах замагниченность позитронов может оказывать существенное влияние на рекомбинацию и этот вопрос требует дополнительных исследований (см. также [4]).

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная модель кинетики замагниченной плазмы позитронов и антипротонов хорошо согласуется с результатами экспериментов по получению антиводорода. С помощью модели проведен анализ влияния кинетики антипротон-позитронных столкновений на эффективность захвата атомов. Показано, что эффективность можно увеличить, уменьшая концентрацию и температуру позитронов. Увеличение концентрации позитронов, напротив, снижает эффективность захвата. Адаптация модели может быть полезна в моделировании кинетики эксперимента GBAR [12].

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-32-00421).

## ЛИТЕРАТУРА

**1**. N. Madsen et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 033403 (2005).

**2**. M. Amoretti et al., Nature (London) **419**, 456 (2002).

**3**. M. Ahmadi et al., Nat. Commun. **8**, 681 (2017).

**4**. Л. И. Меньшиков, Р. Ландуа, УФН **173**, 233 (2003).

**5**. S. Jonsell et al., J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **42**, 215002 (2009).

**6**. S. Jonsell, M. Charlton, and D. P. van der Werf, J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys. **49**, 134004 (2016).

**7**. Я. С. Дербенев, А. Н. Скринский, Физика плазмы **4**, 492 (1978).

**8**. A. A. Bobrov, S. Ya. Bronin, B. B. Zelener, and B. V. Zelener, J. Phys. Conf. Ser. **946**, 012129 (2018).

**9**. D. S. Lemons and D. L. Kaufman, IEEE Trans. Plasma Sci. **27**, 1288 (1999).

**10**. R. Czopnik and P. Garbaczewski, Phys. Rev. E **63**, 021105 (2001).

**11**. M. Glinsky and T. M. O'Neil, Phys. Fluids B **3**, 1279 (1991).

**12**. B. Latacz, arXiv:1905.06404v1.