ЖЭТФ, 2020, том 158, вып. 6 (12), стр. 1181–1187 © 2020

ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ДВУХСЛОЙНЫХ СИСТЕМАХ НЕИДЕНТИЧНЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

О. С. Ваулина [a,b*], *С. В. Кауфман* [a], *И. И. Лисина* [a,b]

[a] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)*
141700, Долгопрудный, Московская обл., Россия

[b] *Объединенный институт высоких температур Российской академии наук*
125412, Москва, Россия

Поступила в редакцию 18 февраля 2020 г.,
после переработки 18 июня 2020 г.
Принята к публикации 8 июля 2020 г.

Исследуются условия энергетического обмена в двухслойных ансамблях с двумя разделенными фракциями неидентичных частиц разных размеров, зарядов и температур. Выполнен численный анализ процессов перераспределения стохастической энергии между различными фракциями частиц, имеющих различную температуру, в таких системах. Рассмотрено перераспределение стохастической энергии по степеням свободы.

DOI: 10.31857/S0044451020120160

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования процессов энергетического обмена в системах взаимодействующих частиц вызывает значительный интерес в различных областях науки и техники (физике плазмы, биологии, физике полимеров и т. д.) [1–5]. Ряд актуальных задач касается особенностей физических характеристик в ансамблях неидентичных частиц, имеющих различные заряды, размеры, диэлектрическую проницаемость и т. д. [1–9].

Образование квазидвумерных плазменно-пылевых систем, состоящих из нескольких (от одного до десятков) протяженных слоев заряженных пылевых частиц (макрочастиц), часто наблюдается в условиях лабораторной пылевой плазмы ВЧ-разряда [10–15]. Процессы формирования протяженных слоев идентичных макрочастиц, взаимодействующих с экранированным потенциалом

$$U = Q^2 \exp(-l/\lambda)/l$$

(где Q — заряд частиц, l — расстояние, а λ — длина экранирования), исследовались ранее в различных численных и теоретических работах [10, 16–20].

Большая часть теоретических и численных работ, посвященных исследованию свойств пылевой плазмы, имеют дело с идентичными пылевыми частицами, поскольку такие системы легче поддаются математическому описанию и более просты для понимания. Тем не менее в реальных условиях пылевые структуры редко содержат идентичные частицы. Даже в случае лабораторных исследований монодисперсные пылевые частицы могут иметь различную величину заряда и/или стохастической кинетической энергии в зависимости от их пространственного положения [1, 2].

Большинство лабораторных исследований пылевой плазмы проводится в газовых разрядах различных типов [10–15, 21, 22]. Стохастическая кинетическая энергия пылевых частиц (их «кинетическая температура») в таких условиях может достигать 0.2–5 эВ. Механизмы такого аномального разогрева пылевых частиц обычно связывают с временными и/или пространственными изменениями их зарядов или положения в объеме неоднородной плазмы [23–27]. Поскольку заряд пылевой частицы определяется локальными параметрами плазмы в ее окрестности, мощность источников подкачки энер-

* E-mail: olga.vaulina@bk.ru

гии, а соответственно, и кинетическая температура частицы могут существенно изменяться в пространстве [1, 2]. Источниками неравномерного нагрева системы частиц также могут являться неоднородное распределение температуры окружающего газа, лазерное излучение, используемое для диагностики и т. д.

Флуктуации зарядов пылевых частиц, вызванные случайной природой ионных и электронных токов, заряжающих эти частицы, присущи любым типам плазмы [1, 2]. В условиях лабораторной газоразрядной плазмы дополнительная стохастическая кинетическая энергия для отдельной пылевой частицы, связанная с этими флуктуациями, составляет $\Delta T_f \propto QE^2/M$ [1, 23–25], где E — напряженность электрического поля в анализируемой системе, необходимая для равновесного положения частицы с зарядом Q и массой M в поле действующих сил. В микрогравитации величина ΔT_f определяется флуктуациями зарядов окружающих частиц пылевого облака,

$$E \approx E_{int} \sim Q/d^2,$$

где d — среднее расстояние между частицами. Для наземных экспериментов, где основной внешней неэлектрической силой является сила тяжести, $E \approx E_{int} + E_{ext}$, где $E_{ext} \approx gM/Q$.

Отсутствие простых теоретических моделей для описания энергетического баланса в системах неидентичных заряженных частиц с неоднородным распределением тепловых источников (источников их стохастической кинетической энергии) затрудняет анализ процессов передачи тепла в реальных системах.

В настоящей работе речь пойдет о механизме переноса тепла, который не связан с процессами массопереноса и возникает за счет передачи стохастических колебаний отдельных частиц вблизи их равновесного положения, что невозможно без взаимодействия между частицами системы. Особенности энергетического обмена в ансамблях неидентичных частиц рассматриваются для условий близких к условиям лабораторных экспериментов в газоразрядной плазме. Представлены аналитические соотношения для случая двух взаимодействующих частиц, которые могут быть полезны для анализа качественной картины энергетического обмена между частицами в протяженных системах. Рассмотрены условия перераспределения стохастической кинетической энергии в двухслойных ансамблях с двумя разделенными фракциями неидентичных частиц разных размеров и температур в поле тяжести. (Отметим, что основные причины формирования раздельных фракций для частиц разных размеров в условиях микрогравитации обычно связывают с наличием термофоретических сил, или сил ионного увлечения [1, 2, 28–30].)

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ ЧАСТИЦ

На настоящий момент аналитическое решение задачи для неидентичных частиц, имеющих различные размеры, массы, заряды и температуру, существует только для случая двух частиц в линейном электрическом поле $E(r, z)$ ловушки с цилиндрической симметрией [8, 9] (с радиальной составляющей $E_r = \beta_r r$ и вертикальной составляющей $E_z = E_z^0 + \beta_z z$). Здесь $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$ — радиальная координата, z — вертикальная координата по оси z в направлении силы тяжести, β_r и β_z — величины градиентов электрического поля, а значение E_z^0 определяется балансом сил, действующих в системе. Остановимся на случае вертикальной конфигурации частиц, см. рис. 1.

Для двух частиц с разной массой, $M_1 \neq M_2$, и зарядами $Q_1 \neq Q_2$, в условиях наземных экспериментов (где нельзя пренебречь силой тяжести) условия баланса сил дают [8, 9]

$$g(M_1Q_2 - M_2Q_1) + Q_1Q_2\beta_z d = (Q_1 + Q_2)F, \quad (1)$$

где F — сила взаимодействия между частицами.

В случае, когда $T_1^0 \neq T_2^0$, где $T_{1(2)}^0$ — энергия тепловых источников (которая при численном моделировании задачи соответствует их за-

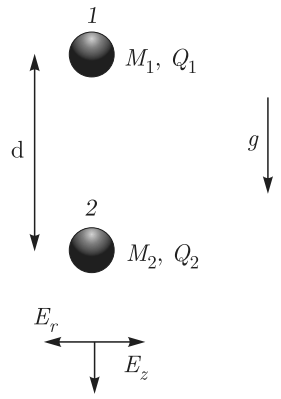

Рис. 1. Вертикальная конфигурация двух неидентичных заряженных частиц в электрическом поле ловушки $E = E(z, r)$ с цилиндрической симметрией

данной/начальной температуре), уравнения баланса энергии можно записать как [8, 9]

$$\delta T_1 = b^2 \Delta T/(C\nu_1), \tag{2a}$$

$$\delta T_2 = -b^2 \Delta T/(C\nu_2). \tag{2b}$$

Здесь $\Delta T = T_2^0 - T_1^0$, $\delta T_{1(2)} = T_{1(2)} - T_{1(2)}^0$ — приращение температуры в процессе установления равновесия, $T_{1(2)}$ — температура частиц для равновесного состояния системы, а коэффициент C имеет вид

$$C = \frac{(a_2 M_1 - a_1 M_2)^2}{(\nu_1 + \nu_2) M_1 M_2} + \frac{b^2(\nu_1 + \nu_2)}{\nu_1 \nu_2} - \\ - (a_2 \nu_1 M_1 + a_1 \nu_2 M_2), \tag{3}$$

где $\nu_{1(2)}$ — коэффициенты трения частиц за счет их столкновений с нейтральными атомами окружающего газа. При этом для вертикальных смещений частиц в направлении оси z коэффициент

$$a_{1(2)} = -(Q_{1(2)}\beta_z - F'), \quad b = -F',$$

а для их радиальных смещений в плоскости xy

$$a_{1(2)} = -(Q_{1(2)}\beta_r - F/d), \quad b = F/d.$$

Здесь d — расстояние между частицами, F' — производная силы взаимодействия между частицами в направлении оси z. Для кулоновского взаимодействия

$$F = Q_1 Q_2/d^2, \quad F' = -2Q_1 Q_2/d^3.$$

Для двух идентичных частиц ($Q_{1(2)} = Q$, $M_{1(2)} = M$, $\nu_{1(2)} = \nu$, $a_{1(2)} = a$) уравнения баланса энергии (2a), (2b) в случае вертикальной конфигурации можно записать как [8, 9]

$$\delta T_{1(2)} = \pm b^2 \Delta T/2(b^2 - \nu^2 M a). \tag{4}$$

В этом случае $\delta T_1 = -\delta T_2$, а при $b^2 \gg -\nu^2 M a$ величина $|\delta T_{1(2)}| \to |\Delta T|/2$, т. е. энергия равномерно распределяется между частицами системы; при $\nu \to \infty$ величина $|\delta T_{1(2)}| \to 0$.

Здесь и далее для теоретических и численных расчетов мы будем полагать, что плотность материала ρ одинакова для различных фракций частиц, $\rho_1 = \rho_2$, т. е. отношение их масс $M_1/M_2 \propto (a_{d1}/a_{d2})^3$, где a_{di} — радиус частицы. Заряды частиц задавались согласно приближению ограниченных орбит (orbit motion limited): $Q_i \propto a_{di}$ [1, 2], а их коэффициенты трения согласно свободно-молекулярному приближению $\nu_i \propto a_{di}^2/M_i$ [31].

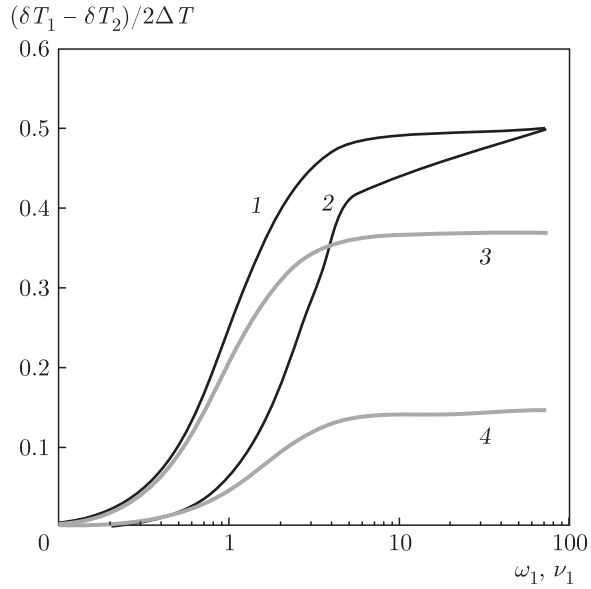

Рис. 2. Зависимости $(\delta T_1 - \delta T_2)/2\Delta T$ от ω_1/ν_1 для двух частиц при их смещениях в вертикальном (*1*, *3*) и в радиальном (*2*, *4*) направлениях при $\beta_r/\beta_z = 4$, $T_1^0 < T_2^0$ и $d = 0.1$ см для $M_1 = M_2$ (черные линии) и $M_2 = 2M_1$ (серые линии)

Иллюстрация зависимостей $(\delta T_1 - \delta T_2)/\Delta T$ от ω_1/ν_1, где $\omega_1 = (Q_1^2/d^3 M_1)^{1/2}$, описывающая перераспределение энергии в вертикальном и радиальном направлениях, для двух частиц с кулоновским взаимодействием при $\beta_r/\beta_z = 4$, $T_1^0 < T_2^0$ показана на рис. 2.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Численное исследование процессов энергетического обмена выполнялось методом молекулярной динамики Ланжевена для частиц, взаимодействующих с кулоновским потенциалом, в анизотропном электрическом поле ловушки с цилиндрической симметрией. Техника моделирования подробно описана в работах [1, 2].

Моделирование проводилось для двухслойных ансамблей с двумя разделенными фракциями неидентичных частиц разных размеров и температур в поле тяжести. Число частиц в каждой из фракций (N_1, N_2) менялось от 50 до 300. Отношения масс M_2/M_1 изменялись от 1.15 до 1.5, что соответствовало изменению радиусов частиц a_{d2}/a_{d1} от 1.05 до 1.15. Отношения температур тепловых источников T_2^0/T_1^0 (или T_1^0/T_2^0) для частиц различных фракций изменялись от одного до

десяти. Заряды и коэффициенты трения задавались соответственно как $Q_i \propto a_{di}$ и $\nu_i \propto a_{di}^{-1}$, $i = 1, 2$. Отношение β_z/β_r варьировалось примерно от 5 до 20. Величина отношения $\omega_{1(2)}/\nu_{1(2)}$ изменялась примерно от 0.5 до 100, где

$$\omega_{1(2)} = (Q_{1(2)}^2/l_p^3 M_{1(2)})^{1/2}, \quad l_p = (d^2 + r_p/4)^{1/2}.$$

Здесь d — расстояние между слоями частиц разных фракций, а r_p — среднее расстояние между заряженными частицами в слое.

При выбранных параметрах численного моделирования величина d составляла около 0.1 см, а r_p изменялось от 0.05 см до 0.1 см; при этом $\omega_1/\nu_1 \approx \approx \omega_2/\nu_2$ с точностью до 5 %.

3.1. Перераспределение стохастической энергии между различными фракциями частиц с разной температурой

Для анализа процессов перераспределения стохастической энергии между различными фракциями частиц, имеющих различную температуру, температура тепловых источников $T_{1(2)}^0$ варьировалась в пределах примерно от 0.2 эВ до 2 эВ и задавалась одинаковой по степеням свободы ($T_i^{0(x)} = T_i^{0(y)} = = T_i^{0(z)} \equiv T_i^0$, где $i = 1, 2$); при этом температура тяжелых частиц была больше: $T_2^0 > T_1^0$.

Иллюстрация положений частиц различной массы в моделируемой системе при $N = 300$ ($N_1 = 150$, $N_2 = 150$) для $T_2^0/T_1^0 = 4$, и $\omega_1/\nu_1 \approx 0.7$ показана на рис. 3, парные корреляционные функции $g(r)$ для частиц в каждом из слоев для тех же параметров задачи приведены на рис. 4.

В процессе моделирования начальная стохастическая кинетическая энергия (энергия источников) перераспределялась от более горячих частиц к менее горячим. Во всех случаях наблюдаемые распределения скоростей частиц были близки к максвелловским функциям, а их температура была практически однородна в пределах каждого слоя. Зависимость кинетических температур для частиц разной массы от расстояния до центра для $\omega_1/\nu_1 \approx 0.7$ и $\omega_1/\nu_1 \approx 28$ в вертикальном направлении (по оси z) и в горизонтальной плоскости $[x; y]$ представлена на рис. 5.

Отметим, что в отличие от случая двух частиц (см. [9] и рис. 2), фиксировалось равномерное перераспределение энергий по степеням свободы:

$$T_i^{(x)} \approx T_i^{(y)} \approx T_i^{(z)},$$

где $i = 1, 2$. Данное обстоятельство может быть связано с интенсивным перераспределением стохасти-

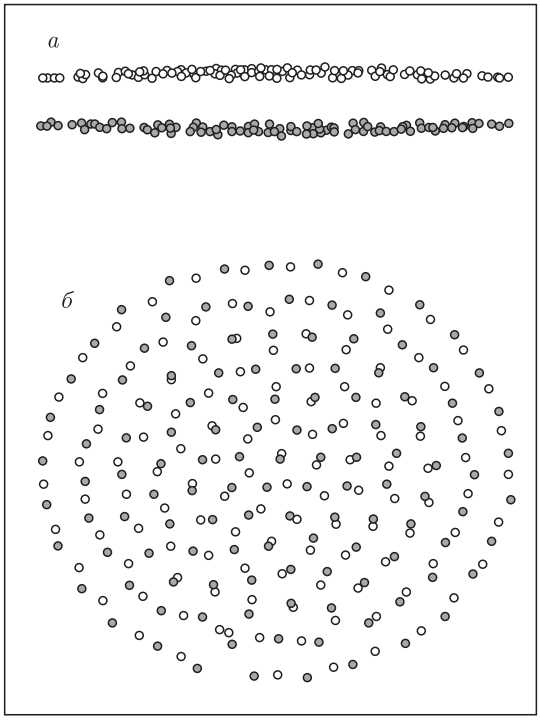

Рис. 3. Иллюстрация положений частиц при $N = 300$ ($N_1 = 150$, $N_2 = 150$) для $T_2^0/T_1^0 = 4$, и $\omega_1/\nu_1 \approx 0.7$. Белыми символами показаны частицы массой M_1, серыми — массой $M_2 = 1.3M_1$: *а* — вид сбоку, *б* — вид сверху

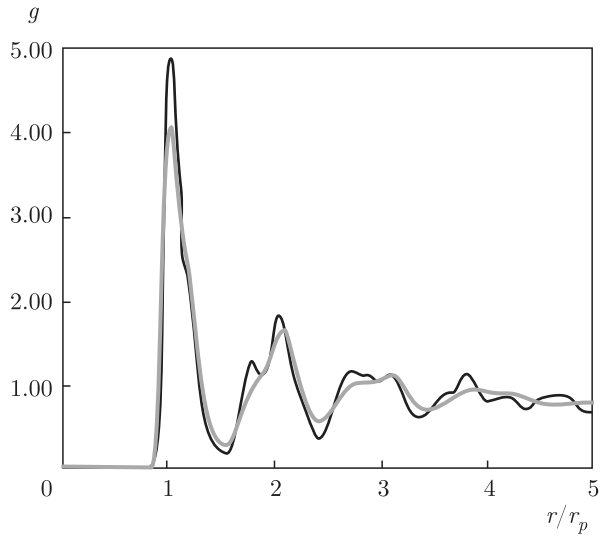

Рис. 4. Парные корреляционные функции $g(r)$ разной массы M_1 (черная линия) и $M_2 = 1.3M_1$ (серая линия) от расстояния r/r_p при $T_2^0/T_1^0 = 4$ и $\omega_1/\nu_1 \approx 0.7$

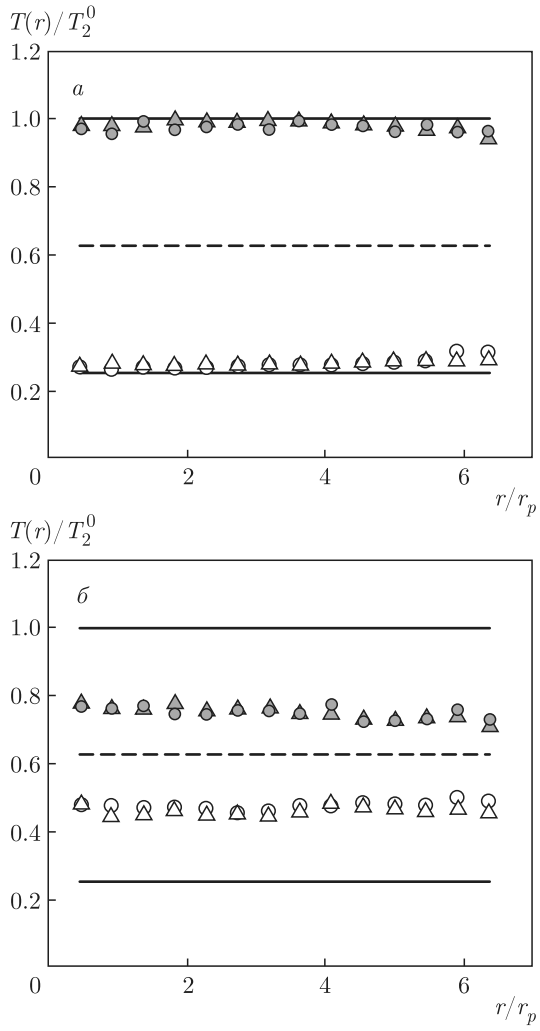

Рис. 5. Зависимость отношения кинетических температур $T_i(r)/T_2^0$ для частиц разной массы M_1 (белые символы — $T_1(r)/T_2^0$) и M_2 (серые символы — $T_2(r)/T_2^0$) от расстояния r/r_p до центра ловушки при $M_2/M_1 = 1.3$, $T_1^0/T_2^0 = 4$: *а* — $\omega_1/\nu_1 \approx 0.7$, *б* — $\omega_1/\nu_1 \approx 28$. Сплошные черные линии показывают заданные температуры частиц ($T_i^0(r)/T_2^0$, где $i = 1, 2$), пунктир — $\{T_2^0(r) - T_1^0(r)\}/T_2^0$, треугольники — $T(r)$ в вертикальном направлении (по оси z), кружки — $T(r)$ в горизонтальной плоскости xy

ческой кинетической энергии по степеням свободы, невозможным для случая двух частиц.

Во всех рассмотренных случаях ($50 \le N_1 = N_2 \le 300$, $1.15 \le M_2/M_1 \le 1.5$, $0.5 \le r_p/d \le 1$) величина перераспределяемой энергии $\delta T_2 \approx -\delta T_1$ была пропорциональна $\Delta T = (T_2^0 - T_1^0)$ и определялась отношением $\xi \equiv \omega_1/\nu_1 \approx \omega_2/\nu_2$. Зависимости $|\delta T|/\Delta T \equiv \delta T^{(z)} \approx \delta T^{(x)} \approx \delta T^{(y)}$ от ω/ν_1 для заряженных частиц с кулоновским взаимодействием в вертикальном направлении по оси z и в горизонтальной плоскости xy показаны на рис. 6. Абсолютная погрешность расчетов составляла около 0.025.

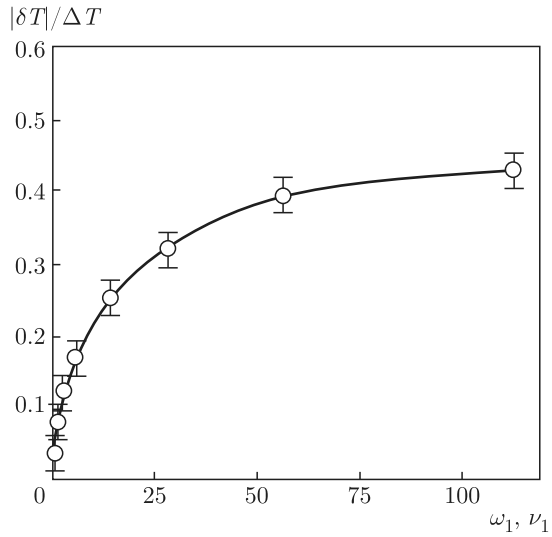

Рис. 6. Зависимости $|\delta T|/\Delta T$ от ω_1/ν_1 для заряженных частиц с кулоновским взаимодействием. Показана абсолютная погрешность расчетов — 0.025

3.2. Перераспределение стохастической энергии по степеням свободы

Для исследования процессов перераспределения стохастической энергии по степеням свободы для двух различных фракций частиц температура тепловых источников варьировалась в пределах примерно от 0.2 эВ до 2 эВ и задавалась как

$$T_1^{0(x)} = T_1^{0(y)} = T_2^{0(x)} = T_2^{0(y)} \equiv T^{0(r)},$$

$$T_1^{0(z)} = T_2^{0(z)} \equiv T^{0(z)},$$

где $T^{0(z)} > T^{0(r)}$.

В процессе моделирования начальная стохастическая кинетическая энергия (энергия источников) перераспределялась по степеням свободы от высоких температур к более низким температурам. Во всех случаях наблюдаемые распределения скоростей частиц были близки к максвелловским функциям, а их температура по степеням свободы была практически однородна в пределах каждого слоя.

При всех рассмотренных параметрах численного моделирования величина перераспределяемой энергии $\delta T^{(z)} = -(T_1^{(z)} - T_0^{(z)}) \approx -(T_2^{(z)} - T_0^{(z)})$ была пропорциональна разнице температур $\Delta^c T = (T^{0(z)} - T^{0(r)})$ и определялась отношением $\xi \equiv \omega_1/\nu_1 \approx \omega_2/\nu_2$; при этом $\delta T^{(z)} \approx 2(T_1^{(r)} - T^{0(r)}) \approx 2(T_2^{(r)} - T^{0(r)}) \equiv 2\delta T^{(r)}$.

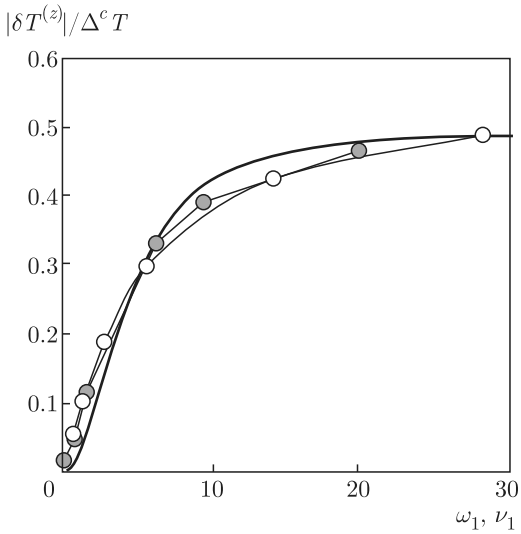

Рис. 7. Зависимости $|\delta T^{(z)}|/\Delta^c T = |2\delta T^{(r)}|/\Delta^c T$ от ω_1/ν_1 для двух ограниченных (белые символы) и двух протяженных (серые символы) слоев заряженных частиц при $1 \leq \leq M_2/M_1 \leq 1.5$. Сплошной черной линией показана аппроксимация (5) при $c = 18$

Аппроксимация полученных численных данных дает соотношение

$$\delta T^{(z)} \equiv 2\delta T^{(r)} = \Delta^c T/(2 + c/\xi^2), \qquad (5)$$

где c — некоторая постоянная. Для всех рассмотренных параметров численного моделирования величина $c \approx 18$.

Зависимости

$$\frac{|\delta T^{(z)}|}{\Delta^c T} \approx \frac{|\delta T^x + \delta T^y|}{\Delta^c T} \equiv \frac{|2\delta T^{(r)}|}{\Delta^c T}$$

от ω/ν_1 для двух ограниченных слоев заряженных частиц с кулоновским взаимодействием приведены на рис. 7. Сплошной черной линией показана аппроксимация (5) при $c = 18$.

Для проверки независимости полученных результатов от числа частиц в слое ($N_1 = N_2$) и от отношения их масс ($1 \leq M_2/M_1 \leq 1.5$) было выполнено численное моделирование протяженной системы частиц, взаимодействующих с экранированным кулоновским потенциалом, $U = Q^2 \exp(-l/\lambda)/l$. Моделирование проводилось методом молекулярной динамики Ланжевена с периодическими граничными условиями в плоскости xy (см. [1–3]) для $N = 648$ независимых частиц ($N_1 = N_2 \equiv N/2$) для случаев $d \approx r_p$ при $\kappa = r_p/\lambda$ от нуля до 0.5. Длина обрезания потенциала составляла порядка $10r_p$. Результаты расчетов показаны на рис. 7. Можно увидеть хорошее согласие между численными данными для протяженных и ограниченных слоев заряженных частиц. Абсолютная погрешность расчетов для различных отношений масс частиц M_2/M_1 и значений параметров экранирования κ составляла не более 0.018.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведено исследование процессов энергетического обмена в диссипативных системах неидентичных взаимодействующих частиц с неоднородным распределением источников тепла и/или любых других источников стохастической кинетической энергии. Рассмотрена теоретическая модель для анализа энергетического баланса в таких системах, описывающая перераспределение стохастической кинетической энергии между двумя неидентичными частицами разных размеров, зарядов и температур.

Изучены условия энергетического обмена в двухслойных ансамблях с двумя разделенными фракциями неидентичных частиц. Выполнен численный анализ процессов перераспределения стохастической энергии между разными фракциями частиц, имеющих различную температуру, в таких системах. Рассмотрено перераспределение стохастической энергии по степеням свободы.

Полученные результаты не зависели от числа частиц (при $N \geq 100$). Величина перераспределяемой энергии была пропорциональна разнице температур различных фракций и/или температур по различным степеням свободы и определялась отношением характерных частот в исследуемых системах: $\xi \equiv \omega_1/\nu_1 \approx \omega_2/\nu_2$.

Результаты настоящей работы применимы для систем с любым типом попарных (взаимных) взаимодействий и могут быть полезны для анализа энергетического обмена в неоднородных системах, которые представляют интерес в физике плазмы, физике полимеров и коллоидных систем.

Финансирование. Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-38-20175), а также в рамках Программы Президиума РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. О. С. Ваулина, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, С. А. Храпак, *Пылевая плазма (эксперимент и теория)*, Физматлит, Москва (2009).

2. *Complex and Dusty Plasmas*, ed. by V. E. Fortov and G. E. Morfill, CRC Press (2010).

3. A. Ivlev, G. Morfill, H. Lowen, and C. P. Royall, *Complex Plasmas and Colloidal Dispersions*: *Particle-Resolved Studies of Classical Liquids and Solids*, World Scientific, Singapore (2012).

4. *Photon Correlation and Light Beating Spectroscopy*, ed. by H. Z. Cummins and E. R. Pike, Plenum, New York (1974).

5. А. А. Овчинников, С. Ф. Тимашев, А. А. Белый, *Кинетика диффузионно-контролируемых химических процессов*, Химия, Москва (1986).

6. А. В. Филиппов, И. Н. Дербенев, ЖЭТФ **150**, 1262 (2016).

7. О. С. Ваулина, ЖЭТФ **149**, 218 (2016).

8. О. С. Ваулина, ЖЭТФ **151**, 982 (2017).

9. О. С. Ваулина, С. В. Кауфман, Физика плазмы **46**, 1 (2020).

10. G. A. Hebner, M. E. Riley, and K. E. Greenberg, Phys. Rev. E **66**, 046407 (2002).

11. H. Thomas, G. Morfill, and V. Demmel, Phys. Rev. Lett. **73**, 652 (1994).

12. J. B. Pieper, J. Goree, and R. A. Quinn, Phys. Rev. E **54**, 5636 (1996).

13. A. Melzer, A. Homann, and A. Piel, Phys. Rev. E **53**, 2757 (1996).

14. O. S. Vaulina, E. V. Vasilieva, O. F. Petrov, and V. E. Fortov, Phys. Scripta **84**, 025503 (2011).

15. О. С. Ваулина, Е. В. Васильева, Р. А. Тимирханов, Физика плазмы **37**, 1112 (2011).

16. H. Totsuji, C. Totsuji, and K. Tsuruta, Phys. Rev. E **64**, 066402 (2001).

17. H. Totsuji, T. Kishimoto, Y. Inoue et al., Phys. Lett. A **221**, 215 (1996).

18. H. Totsuji, T. Kishimoto, and C. Totsuji, Phys. Rev. Lett. **78**, 3113 (1997).

19. О. С. Ваулина, К. Г. Адамович, И. Е. Дранжевский, Физика плазмы **31**, 562 (2005).

20. O. S. Vaulina, X. G. Adamovich, and S. V. Vladimirov, Phys. Scripta **79**, 035501 (2009).

21. Ю. В. Герасимов, А. П. Нефедов, В. А. Синельщиков, В. Е. Фортов, Письма в ЖТФ **24**, 62 (1998).

22. V. E. Fortov, E. A. Nefedov, V. A. Sinel'shchikov, A. D. Usachev, and A. V. Zobnin, Phys. Lett. A **267**, 179 (2000).

23. O. S. Vaulina, S. A. Khrapak, O. F. Petrov, and A. P. Nefedov, Phys. Rev. E **60**, 5959 (1999).

24. R. A. Quinn and J. Goree, Phys. Rev. E **61**, 3033 (2000).

25. O. S. Vaulina, S. A. Khrapak, A. A. Samarian, and O. F. Petrov, Phys. Scripta **84**, 229 (2000).

26. О. С. Ваулина, А. П. Нефедов, О. Ф. Петров, В. Е. Фортов, ЖЭТФ **118**, 1319 (2000).

27. В. Е. Фортов, О. С. Ваулина, О. Ф. Петров и др., ЖЭТФ **124**, 798 (2003).

28. O. S. Vaulina, Europhys. Lett. **115**, 10007 (2016).

29. С. Г. Псахье, К. П. Зольников, Физическая мезомеханика **11**, 39 (2008).

30. G. E. Morfill, H. M. Thomas, U. Konopka, H. Rothermel, M. Zuzic, A. Ivlev, and J. Goree, Phys. Rev. Lett. **83**, 1598 (1999).

31. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).