

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ РАЗНОСТИ ФАЗ КВАНТОВЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

*А. В. Козловский**

*Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 19 июня 2020 г.,
после переработки 23 июля 2020 г.
Принята к публикации 26 июля 2020 г.

Предложены квантовомеханические тригонометрические операторы разности фаз двух электромагнитных полей и исследованы их свойства. Эрмитовы операторы разности фаз полей определяются с помощью операторов интерференции двух полей, возникающей при их смешении на светоделителе. Проведено сравнение результатов расчетов для измеряемых средних величин и дисперсий (флуктуаций) тригонометрических функций операторов разности фаз, следующих из теории Пегга–Барнетта, с соответствующими величинами для предлагаемых операторов. Расчеты и сравнение проведены для фоковских, когерентных и сжатых квантовых состояний электромагнитных полей. Исследования выполнены для квантовых микроскопических полей со средними значениями чисел фотонов $\hat{n} \sim 1$, применяемых в настоящее время в области квантовых технологий. Количественное согласие двух различных теорий показано для фоковских и сжатых состояний полей, существенное количественное различие в предсказаниях теорий отмечается в случае когерентных состояний полей.

DOI: 10.31857/S0044451021020048

1. ВВЕДЕНИЕ

С начала 60-х годов прошлого века рядом авторов предложено несколько подходов к теоретическому определению эрмитовых квантовомеханических операторов фазы электромагнитного поля, а также тригонометрических операторов фазы поля и разности фаз двух полей. Хронологически первой попыткой определения эрмитовых тригонометрических операторов синуса и косинуса фазы электромагнитного поля является подход, предложенный Сасскиндом и Глоговером (SG) в работе [1]. Эрмитов оператор косинуса фазы в рамках теории SG в базисе фоковских состояний поля $|n\rangle$ может быть записан в следующем виде [2, 3]:

$$(\hat{c}\hat{o}s\phi)_{SG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n+1| + \text{H.c.}}{2},$$

а эрмитов оператор синуса:

$$(\hat{s}\hat{i}\hat{n}\phi)_{SG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|n\rangle\langle n+1| - \text{H.c.}}{2i}.$$

Теория SG обладает серьезным недостатком: операторы SG в общем случае не удовлетворяют основному соотношению тригонометрии для операторов синуса и косинуса, т. е.

$$(\hat{c}\hat{o}s\phi)_{SG}^2 + (\hat{s}\hat{i}\hat{n}\phi)_{SG}^2 = \hat{1} - |0\rangle\langle 0|/2 \neq \hat{1}.$$

Вследствие этого, вычисления средних наблюдаемых величин (средних значений и флуктуаций операторов) для физических квантовых состояний поля являются некорректными в квантовой области микроскопических электромагнитных полей при $\langle \hat{n} \rangle \sim 1$.

Другое определение квантовомеханических операторов косинуса и синуса фазы предложено в работах Лернера и Линча (LL) [4–6] с использованием операторов квадратур электромагнитного поля

$$\hat{X}_c \equiv \frac{\hat{a}^+ + \hat{a}}{2}, \quad \hat{X}_s \equiv \frac{\hat{a} - \hat{a}^+}{2i}.$$

Эрмитовы операторы косинуса и синуса фазы в теории LL рассматриваются в виде

$$(\hat{c}\hat{o}s\phi)_{LL} = \frac{1}{2} \left[(\hat{n}+1/2)^{-1/2} \hat{X}_c + \hat{X}_c (\hat{n}+1/2)^{-1/2} \right]$$

и

* E-mail: kozlovskiyav@lebedev.ru

$$\begin{aligned} (\hat{\sin} \phi)_{LL} &= \\ &= \frac{1}{2i} \left[(\hat{n} + 1/2)^{-1/2} \hat{X}_s - \hat{X}_s (\hat{n} + 1/2)^{-1/2} \right], \end{aligned}$$

где $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ — оператор числа фотонов.

В теории LL операторы синуса и косинуса фазы, так же как и в теории SG, не удовлетворяют основному соотношению тригонометрии, что приводит к некорректному описанию фазовых свойств электромагнитного поля в квантовой области при $\langle \hat{n} \rangle \sim 1$.

Из отмеченного выше следует, что ввиду нарушения основного тригонометрического соотношения, использование тригонометрических операторов фазы и разностей фаз в теориях SG и LL приводит к значительной погрешности при расчетах средних значений и флуктуаций этих величин в квантовой области малых значений числа фотонов поля. Нарушение основного тригонометрического соотношения также приводит к невозможности использования стандартных тригонометрических формул для расчетов тригонометрических операторов сумм и разностей фаз (относительной фазы) двух полей ϕ_1 и ϕ_2 , представляющих собой основные измеряемые величины в оптических экспериментах с электромагнитными полями. Это означает, например, что в теориях SG и LL:

$$\cos \phi_1 \cos \phi_2 + \sin \phi_1 \sin \phi_2 \neq \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

и

$$\sin \phi_1 \cos \phi_2 - \cos \phi_1 \sin \phi_2 \neq \sin(\phi_1 - \phi_2).$$

В работах [7, 8] Пеггом и Барнеттом (PB) предложен эрмитов оператор фазы электромагнитного поля $\hat{\varphi}_\theta$ и найден полный ортонормированный базис собственных состояний оператора фазы. В рамках такой теории для определения оператора фазы и полного ортонормированного базиса собственных векторов оператора фазы использован конечномерный базис фоковских состояний $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |S\rangle$, $S \gg 1$. Предельный переход $S \rightarrow \infty$ проводится в теории после вычисления средних в $(S+1)$ -мерном базисе фоковских состояний.

Теория PB позволяет записать эрмитовы операторы косинуса и синуса фазы поля следующим образом [7–15]:

$$\cos \hat{\varphi}_{PB} = \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{n=0}^{S-1} |n\rangle \langle n+1| + |S\rangle \langle 0| \right) + \text{H.c.} \right]$$

и

$$\sin \hat{\varphi}_{PB} = \frac{1}{2i} \left[\left(\sum_{n=0}^{S-1} |n\rangle \langle n+1| + |S\rangle \langle 0| \right) - \text{H.c.} \right].$$

Тригонометрические операторы, определяемые в таком виде, обладают всеми необходимыми свойствами наблюдаемых физических величин, в частности, для них выполняется

$$\cos^2 \hat{\varphi}_{PB} + \sin^2 \hat{\varphi}_{PB} = \hat{1}.$$

В представляемой работе рассмотрены тригонометрические операторы разности фаз двух полей, выражаемые через интерференционные операторы, содержащиеся в выражениях для чисел фотонов выходных электромагнитных полей светоделителя при смешении двух электромагнитных полей, поступающих на входы светоделителя. Показано, что тригонометрические операторы косинуса и синуса разности фаз (ТОРФ), определяемые таким образом, удовлетворяют основному соотношению тригонометрии и могут быть использованы для исследований квантово-статистических свойств фаз электромагнитных полей. Сравнение с теорией PB показало, что предлагаемый подход к определению ТОРФ позволяет получить результаты для средних наблюдаемых величин и дисперсий (флуктуаций) ТОРФ, незначительно отличающиеся от результатов теории эрмитового оператора фазы PB для фоковских и сжатых когерентных состояний полей и заметно отличающиеся для когерентных состояний полей.

2. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ СВЕТОДЕЛИТЕЛЯ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ РАЗНОСТИ ФАЗ ДВУХ ПОЛЕЙ

Сигнал электромагнитного поля на выходе оптического интерферометра чувствителен к сдвигу фаз полей, поступающих на его входы. Простейшим примером оптического интерферометра является пассивный светоделитель. Рассмотрим квантовую теорию пассивного светоделителя. На два входа светоделителя поступают квантовые поля, характеризующиеся операторами рождения (уничтожения) \hat{a}_1^\dagger (\hat{a}_1) и \hat{a}_2^\dagger (\hat{a}_2), а также операторами числа фотонов $\hat{n}_j = \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$, $j = 1, 2$. Операторы рождения (уничтожения) для полей, выходящих из светоделителя, при этом обозначим как \hat{b}_1^\dagger (\hat{b}_1) и \hat{b}_2^\dagger (\hat{b}_2), а операторы чисел фотонов: $\hat{N}_j = \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$, $j = 1, 2$. Операторы входного и выходного полей удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{i,j}, \quad [\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

и для чисел фотонов (интенсивностей) полей входящих и выходящих полей светоделителя выполняется соотношение сохранения числа фотонов

$$\hat{N}_1 + \hat{N}_2 = \hat{n}_1 + \hat{n}_2. \quad (2)$$

Операторы чисел фотонов выходных полей при выполнении условий (1) и (2) могут быть выражены с помощью операторов входных полей с использованием коэффициента пропускания светоделителя τ и сдвигов фаз прохождения и отражения (ϕ_τ и ϕ_ρ) в следующем виде [16–18]:

$$\hat{N}_1 = \tau \hat{n}_1 + (1 - \tau) \hat{n}_2 + \sqrt{\tau(1 - \tau)} \hat{I}, \quad (3)$$

$$\hat{N}_2 = (1 - \tau) \hat{n}_1 + \tau \hat{n}_2 - \sqrt{\tau(1 - \tau)} \hat{I}, \quad (4)$$

где использовано обозначение

$$\begin{aligned} \hat{I} &\equiv \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 e^{-i(\phi_\tau - \phi_\rho)} + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 e^{i(\phi_\tau - \phi_\rho)} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos(\phi_\tau - \phi_\rho) \hat{I}_C + \sin(\phi_\tau - \phi_\rho) \hat{I}_S \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Оператор \hat{I} представляет собой интерференционный оператор светоделителя и определяет процесс интерференции при смешении двух входных полей на выходе пассивного светоделителя. Для светоделителя, обладающего величиной разности сдвигов фаз пропускания и отражения $\phi_\tau - \phi_\rho = 0$, на его выходе реализуется интерференционный член вида

$$\hat{I}_C \equiv \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1, \quad (6)$$

а в случае $\phi_\tau - \phi_\rho = \pi/2$ получаем

$$\hat{I}_S \equiv i \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right). \quad (7)$$

В частном случае симметричного светоделителя, $\tau = 1/2$ и $\phi_\tau - \phi_\rho = 0$, интерференционные биения выходного поля выражаются через операторы входных полей согласно

$$\hat{N}_2 - \hat{N}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 = \hat{I}_C. \quad (8)$$

При добавлении в схему смешения полей с помощью симметричного светоделителя на одном из его входов $\lambda/4$ -пластины интерференционный член приобретает вид

$$\hat{N}_2 - \hat{N}_1 = i \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \right) = \hat{I}_S. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) получаются путем сложения соотношений (1) и (2) при $\tau = 1/2$.

Из равенств (8) и (9) следует, что средние от операторов \hat{I}_C и \hat{I}_S являются экспериментально измеримыми величинами и равны среднему от разности чисел фотонов на выходах светоделителя.

Среднее квантовомеханическое значение интерференционного оператора для полей в когерентных состояниях $|\alpha_1 = \sqrt{n_1} e^{i\varphi_1}\rangle$ и $|\alpha_2 = \sqrt{n_2} e^{i\varphi_2}\rangle$ есть

$$\begin{aligned} \langle \hat{I} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} &\equiv \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{I} | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \\ &= \sqrt{n_1 n_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \phi_\tau - \phi_\rho), \end{aligned} \quad (10)$$

и в зависимости от $\phi_\tau - \phi_\rho$ величина (10) принимает значение пропорциональное косинусу (при $\phi_\tau - \phi_\rho = 0$) или синусу (при $\phi_\tau - \phi_\rho = \pi/2$) разности фазовых углов когерентных состояний двух полей, подаваемых на входы светоделителя. Можно найти, также, среднее квантовомеханическое значение интерференционного оператора для полей в фоковских состояниях полей $|n_1\rangle$ и $|n_2\rangle$. В этом случае находим

$$\langle \hat{I} \rangle_{n_1, n_2} \equiv \langle n_1, n_2 | \hat{I} | n_1, n_2 \rangle = 0,$$

что означает отсутствие интерференции на выходе светоделителя в случае фоковских состояний обоих полей, поступающих на входы светоделителя.

Запишем эрмитовы операторы косинуса и синуса разности фаз полей \hat{a}_1 и \hat{a}_2 , используя интерференционные операторы \hat{I}_C и \hat{I}_S , в следующем симметризованном виде:

$$\hat{C}_I \equiv \hat{c} \hat{s}(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} \left[\hat{K}_I \hat{I}_C + \hat{I}_C \hat{K}_I \right], \quad (11a)$$

$$\hat{S}_I \equiv \hat{s} \hat{i}(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} \left[\hat{K}_I \hat{I}_S + \hat{I}_S \hat{K}_I \right], \quad (11b)$$

где

$$\hat{K}_I \equiv \frac{1}{\sqrt{\hat{I}_C^2 + \hat{I}_S^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_1\hat{n}_2)}}, \quad (12)$$

поскольку

$$\hat{I}_C^2 + \hat{I}_S^2 = 2(\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_1\hat{n}_2).$$

Можно показать, что операторы \hat{C}_I и \hat{S}_I , определяемые согласно (11a), (11b), (12), не коммутируют между собой:

$$[\hat{C}_I, \hat{S}_I] \neq 0.$$

Операторы квадрата косинуса и синуса разности фаз полей, выражаемые через операторы интерференции, запишем также в симметризованном виде согласно

$$\hat{C}_I^2 \equiv \hat{c} \hat{s}^2(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} \left[\hat{K}_I^2 \hat{I}_C^2 + \hat{I}_C^2 \hat{K}_I^2 \right], \quad (13a)$$

$$\hat{S}_I^2 \equiv \hat{s} \hat{i}^2(\phi_1 - \phi_2) = \frac{1}{2} \left[\hat{K}_I^2 \hat{I}_S^2 + \hat{I}_S^2 \hat{K}_I^2 \right]. \quad (13b)$$

Нетрудно убедиться, что определенные таким образом операторы квадратов тригонометрических функций точно удовлетворяют основному тригонометрическому соотношению, т. е.

$$\hat{C}_I^2 + \hat{S}_I^2 = \hat{1}.$$

Выполнение этого соотношения обеспечивается выбором вида нормировочного оператора \hat{K}_I согласно формуле (12).

Отметим, что операторы, определяемые формулами (11a) и (11b), возведенными в квадрат, не удовлетворяют основному тригонометрическому соотношению в квантовом режиме слабых полей.

3. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ РАЗНОСТИ ФАЗ ДВУХ ПОЛЕЙ В ФОКОВСКИХ И КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ

В классической теории светоделителя интерференционные члены, определяющие интенсивности полей, выходящих из светоделителя, пропорциональны тригонометрическим функциям разности фаз полей, поступающих на входы светоделителя. Как следует из формулы (10) квантовой теории, в частном случае входных полей в когерентных квантовых состояниях квантовомеханические средние значения интерференционных операторов также пропорциональны тригонометрическим функциям разности фазовых углов комплексных параметров когерентных полей. Учитывая сказанное выше, на основе принципа соответствия в предыдущем разделе нами определены эрмитовы операторы косинуса и синуса фаз, выражаемые с помощью интерференционных операторов, а также операторы квадратов косинуса и синуса разности фаз. В настоящем разделе нами найдены выражения для наблюдаемых средних таких ТОРФ, а также средних квадратов и дисперсий (флуктуаций) ТОРФ для полей в произвольных квантовых состояниях. Рассмотрены значения этих величин для фоковских и когерентных состояний полей в квантовом режиме.

Операторы косинуса и синуса (11a) и (11b) в базисе фоковских квантовых состояний входных полей могут быть записаны в виде

$$\hat{C}_I = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} K_1(n_1, n_2) \times (|n_1, n_2 + 1\rangle \langle n_1 + 1, n_2| + \text{H.c.}), \quad (14a)$$

$$\hat{S}_I = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} K_1(n_1, n_2) \times (|n_1, n_2 + 1\rangle \langle n_1 + 1, n_2| - \text{H.c.}), \quad (14b)$$

где обозначено

$$K_1(n_1, n_2) \equiv \sqrt{\frac{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}{2}} \times \left[\frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2 + 1 + 2n_1(n_2 + 1)}} + \frac{1}{\sqrt{n_1 + n_2 + 1 + 2n_2(n_1 + 1)}} \right]. \quad (15)$$

Для операторов квадратов тригонометрических функций разности фаз, в свою очередь, с помощью (14a), (14b), (15) находим в базисе фоковских состояний следующие выражения:

$$\hat{C}_I^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} K_2(n_1, n_2) \times (|n_1, n_2 + 2\rangle \langle n_1 + 2, n_2| + \text{H.c.}), \quad (16a)$$

$$\hat{S}_I^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} K_2(n_1, n_2) \times (|n_1, n_2 + 2\rangle \langle n_1 + 2, n_2| + \text{H.c.}), \quad (16b)$$

где обозначено

$$K_2(n_1, n_2) \equiv \sqrt{(n_1 + 1)(n_1 + 2)(n_2 + 1)(n_2 + 2)} \times \left[\frac{1}{n_1 + n_2 + 2 + 2n_1(n_2 + 2)} + \frac{1}{n_1 + n_2 + 2 + 2n_2(n_1 + 2)} \right]. \quad (17)$$

Средние значения и средние тригонометрических операторов для полей в произвольных квантовых состояниях входных полей $|x_1\rangle$ и $|x_2\rangle$, с помощью формул (14a), (14b), (15) могут быть найдены в виде

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_I \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | \hat{C}_I | x_1, x_2 \rangle = \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_1(n_1, n_2) \times \\ &\times \text{Re}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \langle x_2 | n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle), \quad (18a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_I \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | \hat{S}_I | x_1, x_2 \rangle = \\ &= \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_1(n_1, n_2) \times \\ &\times \text{Im}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \langle x_2 | n_2 + 1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle), \quad (18b) \end{aligned}$$

а также, используя (16а), (16б), (17) для квадратов операторов, получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_I^2 \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | \hat{C}_I^2 | x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \\ &\times \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} K_2(n_1, n_2) \times \\ &\times \text{Re}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \langle x_2 | n_2 + 2 \rangle \langle n_1 + 2 | x_1 \rangle), \end{aligned} \quad (19a)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_I^2 \rangle_{x_1, x_2} &\equiv \langle x_1, x_2 | \hat{S}_I^2 | x_1, x_2 \rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} K_2(n_1, n_2) \times \\ &\times \text{Re}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_2 | x_2 \rangle \langle x_2 | n_2 + 2 \rangle \langle n_1 + 2 | x_1 \rangle). \end{aligned} \quad (19b)$$

Скалярные произведения векторов состояний полей, входящие в формулы (18а), (18б), (19а), (19б), для случая когерентных состояний полей $|x_1\rangle = |\alpha_1\rangle$ и $|x_2\rangle = |\alpha_2\rangle$ могут быть записаны в виде

$$\langle n_j | \alpha_j \rangle = e^{-n_{\alpha_j}/2} \frac{n_{\alpha_j}^{n_j/2}}{\sqrt{n_j!}} e^{i n_j \varphi_{\alpha_j}}, \quad \alpha_j = \sqrt{n_{\alpha_j}} e^{i \varphi_{\alpha_j}}, \quad j = 1, 2.$$

Нетрудно убедиться, что в случае фоковских состояний полей $|x_1\rangle = |n_1\rangle$ и $|x_2\rangle = |n_2\rangle$ средние значения операторов

$$\langle n_1, n_2 | \hat{C}_I | n_1, n_2 \rangle = \langle n_1, n_2 | \hat{S}_I | n_1, n_2 \rangle = 0,$$

что соответствует равномерному распределению значений фаз полей от 0 до 2π .

Для дисперсий операторов косинуса и синуса в этом случае находим

$$\begin{aligned} \langle n_1, n_2 | (\Delta \hat{C}_I)^2 | n_1, n_2 \rangle &\equiv \langle n_1, n_2 | \hat{C}_I^2 | n_1, n_2 \rangle - \\ &- \langle n_1, n_2 | \hat{C}_I | n_1, n_2 \rangle^2 = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (20a)$$

$$\begin{aligned} \langle n_1, n_2 | (\Delta \hat{S}_I)^2 | n_1, n_2 \rangle &\equiv \langle n_1, n_2 | \hat{S}_I^2 | n_1, n_2 \rangle - \\ &- \langle n_1, n_2 | \hat{S}_I | n_1, n_2 \rangle^2 = \frac{1}{2}, \quad \forall |n_1\rangle, |n_2\rangle. \end{aligned} \quad (20b)$$

Равенство дисперсий тригонометрических операторов $1/2$ также указывает на равномерное распределение случайных фаз в случае фоковских состояний полей, т. е. полной их неопределенности в данных квантовых состояниях.

В целях сравнения результатов расчетов средних значений и дисперсий (флуктуаций), получаемых с использованием рассматриваемых нами интерференционных тригонометрических операторов, найдем выражения для этих величин в рамках теории эрмитового оператора фазы РВ для произвольных состояний полей. Используя тригонометрические равенства для косинусов и синусов разности фаз

$$\hat{C}_{PB, 12} = \hat{C}_{PB, 1} \hat{C}_{PB, 2} + \hat{S}_{PB, 1} \hat{S}_{PB, 2}, \quad (21a)$$

$$\hat{S}_{PB, 12} = \hat{S}_{PB, 1} \hat{C}_{PB, 2} - \hat{S}_{PB, 2} \hat{C}_{PB, 1}, \quad (21b)$$

найдем средние значения косинуса разности эрмитовых операторов фазы РВ для произвольных квантовых состояний двух полей $|x_1\rangle$ и $|x_2\rangle$:

$$\langle \hat{C}_{PB, 12} \rangle_{x_1, x_2} \equiv \langle x_1, x_2 | \cos(\hat{\varphi}_{PB, 1} - \hat{\varphi}_{PB, 2}) | x_1, x_2 \rangle.$$

Отметим, что операторы косинуса и синуса в теории РВ коммутируют между собой:

$$[\hat{C}_{PB, i}, \hat{S}_{PB, j}] = 0, \quad i, j = 1, 2.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{PB, j} \rangle_{x_j} &= \text{Re} \sum_{n_j=0}^{\infty} \langle x_j | n_j \rangle \times \\ &\times \langle n_j + 1 | x_j \rangle, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\langle \hat{S}_{PB, j} \rangle_{x_j} = \text{Im} \sum_{n_j=0}^{\infty} \langle x_j | n_j \rangle \langle n_j + 1 | x_j \rangle, \quad (22b)$$

получаем для среднего оператора косинуса разности фаз теории РВ следующее:

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{PB, 12} \rangle_{x_1, x_2} &= \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} [\text{Re}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle) \times \\ &\times \text{Re}(\langle x_2 | n_2 \rangle \langle n_2 + 1 | x_2 \rangle) + \text{Im}(\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle) \times \\ &\times \text{Im}(\langle x_2 | n_2 \rangle \langle n_2 + 1 | x_2 \rangle)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Для среднего от квадрата косинуса разности операторов фаз полей в произвольных квантовых состояниях $|x_1\rangle, |x_2\rangle$ вида

$$\langle \hat{C}_{PB, 12}^2 \rangle_{x_1, x_2} \equiv \langle x_1, x_2 | \cos^2(\hat{\varphi}_{PB, 1} - \hat{\varphi}_{PB, 2}) | x_1, x_2 \rangle$$

находим

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{PB, 12}^2 \rangle_{x_1, x_2} &= \langle \hat{C}_{PB, 1}^2 \rangle_{x_1} \langle \hat{C}_{PB, 2}^2 \rangle_{x_2} + \\ &+ 2 \langle \hat{C}_{PB, 1} \hat{S}_{PB, 1} \rangle_{x_1} \langle \hat{C}_{PB, 2} \hat{S}_{PB, 2} \rangle_{x_2} + \\ &+ \langle \hat{S}_{PB, 1}^2 \rangle_{x_1} \langle \hat{S}_{PB, 2}^2 \rangle_{x_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поскольку

$$\langle \hat{C}^2_{PB,j} \rangle_{x_j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_{n_j=0}^{\infty} \langle x_j | n_j \rangle \times \langle n_j + 2 | x_j \rangle, \quad j = 1, 2, \quad (25)$$

$$\langle \hat{S}^2_{PB,j} \rangle_{x_j} = \frac{1}{2} - \operatorname{Re} \sum_{n_j=0}^{\infty} \langle x_j | n_j \rangle \langle n_j + 2 | x_j \rangle, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{PB,j} \hat{S}_{PB,j} \rangle_{x_j} &= \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_{n_j=0}^{\infty} \langle x_j | n_j \rangle \langle n_j + 2 | x_j \rangle, \quad (27) \end{aligned}$$

получаем из формулы (24) следующее выражение:

$$\langle \hat{C}^2_{PB} \rangle_{x_1, x_2} = \frac{1}{2} (1 + R_1 R_2 + I_1 I_2), \quad (28)$$

где обозначено

$$R_j \equiv \operatorname{Re} \sum_{n_j=0}^{\infty} \langle x_j | n_j \rangle \langle n_j + 2 | x_j \rangle,$$

$$I_j \equiv \operatorname{Im} \sum_{n_j=0}^{\infty} \langle x_j | n_j \rangle \langle n_j + 2 | x_j \rangle, \quad j = 1, 2.$$

Подобным образом находим средние и дисперсии оператора синуса разности операторов фазы в теории РВ:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{PB} \rangle_{x_1, x_2} &= \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} [\operatorname{Im} (\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle) \times \\ &\times \operatorname{Re} (\langle x_2 | n_2 \rangle \langle n_2 + 1 | x_2 \rangle) - \operatorname{Re} (\langle x_1 | n_1 \rangle \langle n_1 + 1 | x_1 \rangle) \times \\ &\times \operatorname{Im} (\langle x_2 | n_2 \rangle \langle n_2 + 1 | x_2 \rangle)], \quad (29) \end{aligned}$$

$$\langle \hat{S}^2_{PB} \rangle_{x_1, x_2} = \frac{1}{2} (1 - R_1 R_2 - I_1 I_2). \quad (30)$$

В случае полей в когерентных состояниях

$$|\alpha_j\rangle = \left| \sqrt{n_{\alpha_j}} e^{i\varphi_{\alpha_j}} \right\rangle, \quad j = 1, 2$$

можно получить следующие выражения для средних значений тригонометрических функций разностей операторов фаз полей. Для косинуса разности фаз получаем

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{PB} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} &= \sqrt{n_{\alpha_1} n_{\alpha_2}} e^{-(n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2})} \times \\ &\times f_1(n_{\alpha_1}) f_1(n_{\alpha_2}) \cos(\varphi_{\alpha_1} - \varphi_{\alpha_2}). \quad (31) \end{aligned}$$

Для дисперсии косинуса разности фаз находим

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{C}_{PB})^2 \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} &\equiv \\ &\equiv \langle \alpha_1, \alpha_2 | \cos^2(\hat{\varphi}_{PB,1} - \hat{\varphi}_{PB,2}) | \alpha_1, \alpha_2 \rangle - \\ &- \langle \alpha_1, \alpha_2 | \cos(\hat{\varphi}_{PB,1} - \hat{\varphi}_{PB,2}) | \alpha_1, \alpha_2 \rangle^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + n_{\alpha_1} n_{\alpha_2} e^{-(n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2})} [f_2(n_{\alpha_1}) f_2(n_{\alpha_2}) \times \right. \\ &\times \cos[2(\varphi_{\alpha_1} - \varphi_{\alpha_2})] - 2f_1^2(n_{\alpha_1}) f_1^2(n_{\alpha_2}) \times \\ &\times e^{-(n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2})} \cos^2(\varphi_{\alpha_1} - \varphi_{\alpha_2})] \left. \right\}. \quad (32) \end{aligned}$$

В формулах (31) и (32) использованы обозначения

$$f_1(n_{\alpha_j}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_{\alpha_j}^n}{n! \sqrt{n+1}}, \quad (33)$$

$$f_2(n_{\alpha_j}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n_{\alpha_j}^n}{n! \sqrt{(n+1)(n+2)}}, \quad j = 1, 2.$$

Функции f_1 и f_2 с ростом величин чисел фотонов когерентных состояний $n_{\alpha_j} = |\alpha_j|^2$, $j = 1, 2$ стремятся к следующим значениям [3, 18]:

$$f_1(n_{\alpha_j}) \rightarrow \frac{e^{n_{\alpha_j}}}{\sqrt{n_{\alpha_j}}}, \quad (34)$$

$$f_2(n_{\alpha_j}) \rightarrow \frac{e^{n_{\alpha_j}}}{n_{\alpha_j}}, \quad n_{\alpha_j} \rightarrow \infty.$$

Формулы (31) и (32) показывают, что среднее и дисперсия косинуса разности фаз явно зависят от разности фаз когерентных состояний φ_{α_1} и φ_{α_2} , по крайней мере, при $n_{\alpha_j} \sim 1$. Зависимость от разности фаз когерентных состояний средних и дисперсий $\varphi_{\alpha_1} - \varphi_{\alpha_2}$ отсутствует лишь при $n_{\alpha_j} \rightarrow \infty$.

На рис. 1а показана зависимость среднего значения интерференционного оператора косинуса разности фаз полей в когерентных состояниях

$$\langle \hat{C}_I \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \equiv \langle \alpha_1, \alpha_2 | \cos(\varphi_1 - \varphi_2) | \alpha_1, \alpha_2 \rangle$$

от значений параметров n_{α_2} и φ_{α_2} состояния $|\alpha_2\rangle$ при фиксированных значениях параметров состояния $|\alpha_1\rangle$, полученная с помощью формулы (18а). В целях сравнения нами рассчитана аналогичная зависимость для среднего значения косинуса разности операторов фаз полей, следующая из теории РВ:

$$\langle \hat{C}_{PB} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \equiv \langle \alpha_1, \alpha_2 | \cos(\hat{\varphi}_{PB,1} - \hat{\varphi}_{PB,2}) | \alpha_1, \alpha_2 \rangle,$$

найденная с помощью формулы (31). На рис. 1б показана зависимость отношения средних

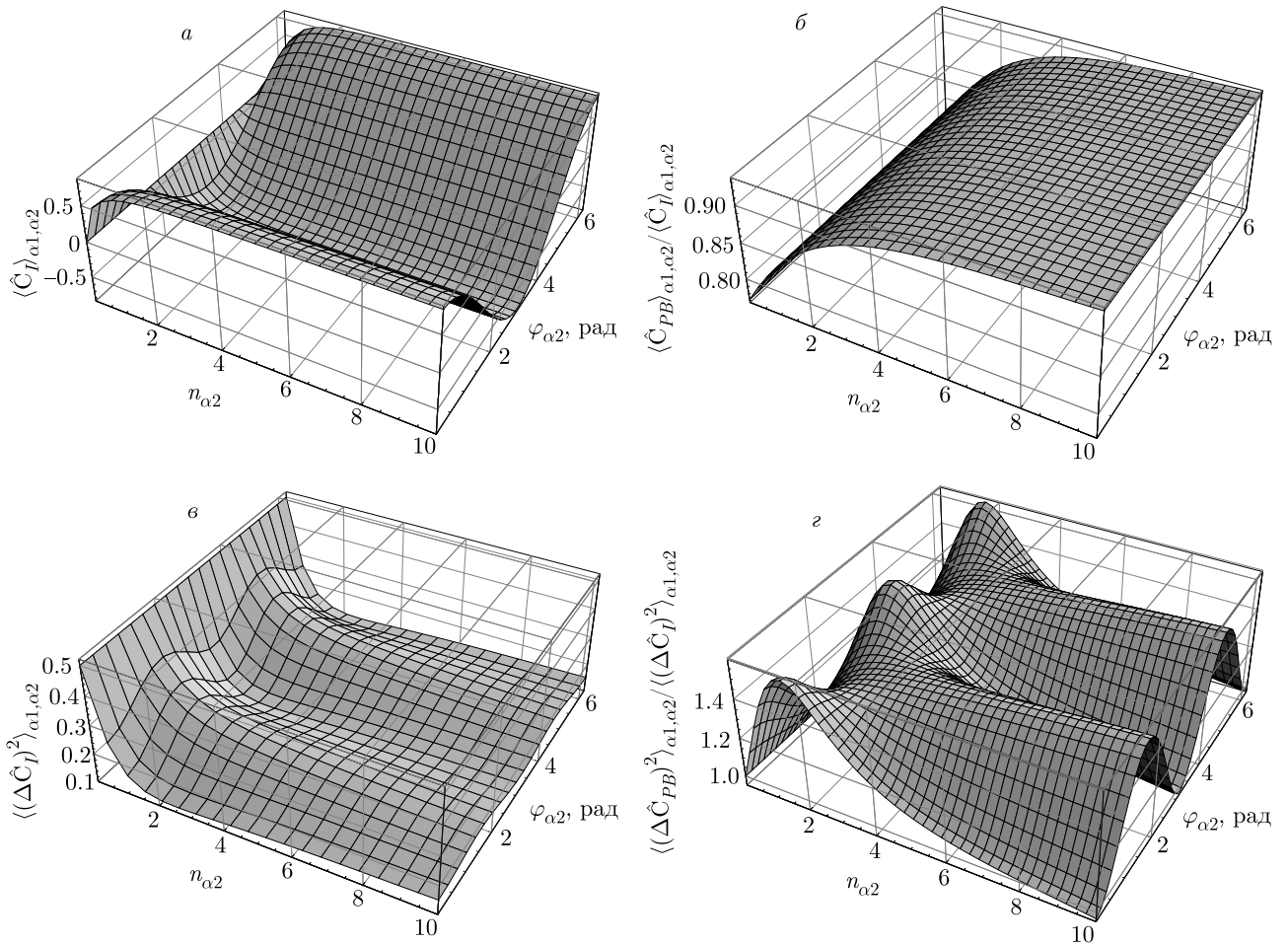


Рис. 1. а) Зависимость среднего значения оператора косинуса разности фаз $\langle \hat{C}_I \rangle_{\alpha_1, \alpha_2}$ для когерентных состояний полей $|\alpha_1\rangle$ и $|\alpha_2\rangle$ от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$ при фиксированных значениях $n_{\alpha_1} = 1$ и $\varphi_{\alpha_1} = 0$ когерентного состояния $|\alpha_1\rangle$. б) Отношение средних значений оператора косинуса разности фаз в рамках теории РВ и средних интерференционного оператора косинуса разности фаз $\langle \hat{C}_{PB} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} / \langle \hat{C}_I \rangle_{\alpha_1, \alpha_2}$ для полей в когерентных состояниях. в) Зависимость дисперсии оператора разности фаз $\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{\alpha_1, \alpha_2}$ для когерентных состояний полей $|\alpha_1\rangle$ и $|\alpha_2\rangle$, от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$ для фиксированных значений $n_{\alpha_1} = 1$ и $\varphi_{\alpha_1} = 0$. г) Зависимость отношения $\langle (\Delta \hat{C}_{PB})^2 \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} / \langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{\alpha_1, \alpha_2}$ значений дисперсии косинуса разности операторов фаз в рамках теории РВ и дисперсии интерференционного оператора разности фаз для полей в когерентных состояниях от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$. Значения параметров $n_{\alpha_1} = 1$ и $\varphi_{\alpha_1} = 0$ когерентного состояния $|\alpha_1\rangle$ фиксированы

$\langle \hat{C}_{PB} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} / \langle \hat{C}_I \rangle_{\alpha_1, \alpha_2}$ от параметров когерентных состояний. Как видно на рисунке, результаты двух теорий существенно различаются в квантовой области малых значений средних чисел фотонов полей $n_{\alpha_j} \sim 1, j = 1, 2$. Максимальное различие для наблюдаемых средних тригонометрических операторов может достигать для рассматриваемых квантовых состояний полей величины примерно 25% для значений параметра $n_{\alpha_2} \ll 1$. С ростом

значений параметра $n_{\alpha_2} \gg 1$ когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$ при фиксированном значении $n_{\alpha_1} = 1$ различие результатов двух теорий уменьшается и может достигать величины нескольких процентов. Полное совпадение двух теорий в рассматриваемом случае достигается при $n_{\alpha_j} \gg 10, j = 1, 2$.

Дисперсии интерференционных ТОРФ и дисперсии косинуса разности операторов фаз теории РВ, так же как и средние значения этих величин, замет-

но отличаются между собой. На рис. 1в показана зависимость дисперсии

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\Delta \hat{C}_I \right)^2 \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2} &\equiv \langle \alpha_1, \alpha_2 | \left(\Delta \hat{C}_I \right)^2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle \equiv \\ &\equiv \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{C}_I^2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{C}_I | \alpha_1, \alpha_2 \rangle^2 \end{aligned}$$

от значений параметров n_{α_2} и φ_{α_2} когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$ при фиксированных значениях параметров состояния $|\alpha_1\rangle$, полученная с помощью формул (18а) и (19а). На рис. 1г приведена зависимость от тех же параметров отношения дисперсии оператора в теории РВ и интерференционного оператора: $\left\langle \left(\Delta \hat{C}_{PB} \right)^2 \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2} / \left\langle \left(\Delta \hat{C}_I \right)^2 \right\rangle_{\alpha_1, \alpha_2}$. На рисунке видно, что дисперсии значительно различаются в квантовой области $n_{\alpha_j} \sim 1, j = 1, 2$, где отличие может достигать величины примерно 60% при определенных значениях фазового угла φ_{α_2} . Точное совпадение двух теорий в случае полей в когерентных состояниях достигается при $n_{\alpha_j} > 100, j = 1, 2$.

4. СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ И ДИСПЕРСИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ РАЗНОСТИ ФАЗ ПОЛЕЙ В СЖАТЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЯХ

Рассмотрим случай, когда поля находятся в когерентных сжатых состояниях (двухфотонных когерентных состояниях [13, 19]), и найдем наблюдаемые средние значения и дисперсии ТОРФ для таких полей.

Векторы сжатых когерентных состояний полей представляют собой результат действия оператора сжатия на когерентное состояние поля и могут быть записаны в виде

$$|\zeta_j; \alpha_j\rangle = \hat{S}_j(\zeta_j) |\alpha_j\rangle, \quad j = 1, 2, \quad (35)$$

где оператор сжатия есть

$$\hat{S}_j(\zeta_j) = \exp \frac{1}{2} \left(\zeta_j^* \hat{a}_j^2 - \zeta_j \hat{a}_j^{\dagger 2} \right).$$

Входящие в оператор сжатия комплексные параметры сжатия имеют вид $\zeta_j \equiv r_j e^{i\theta_j}$.

Скалярное произведение фоковских и сжатых когерентных состояний могут быть записаны в следующем виде [19]:

$$\begin{aligned} \langle n_j | \zeta_j; \alpha_j \rangle &= \sqrt{\left(\frac{\text{th } r_j}{2} e^{i\theta_j} \right)^{n_j} / (n_j! \text{ch } r_j)} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{n_{\alpha_j}}{2} \left(1 - \frac{\text{th } r_j}{2} e^{i(2\varphi_{\alpha_j} - \theta_j)} \right) \right] \times \\ &\times H_{n_j} \left(\sqrt{\frac{n_{\alpha_j}}{\text{sh } 2r_j}} e^{i(2\varphi_{\alpha_j} - \theta_j)} \right), \\ &\alpha_j = \sqrt{n_{\alpha_j}} e^{i\varphi_{\alpha_j}}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (36)$$

где H_{n_j} — полином Эрмита n_j -го порядка.

Рассмотрим случай, когда одно из полей находится в сжатом когерентном состоянии $|\zeta_1; \alpha_1\rangle$, а второе поле — в когерентном состоянии $|\alpha_2\rangle$. Воспользуемся для расчета наблюдаемых средних ТОРФ таких полей формулами (18а), (18б) и соотношением (36). На рис. 2а показана зависимость среднего значения интерференционного оператора косинуса разности фаз для полей в сжатом и когерентном состояниях

$$\langle \hat{C}_I \rangle_{ss1, \alpha_2} \equiv \langle \alpha_1; \varsigma_1 | \langle \alpha_2 | \cos(\varphi_1 - \varphi_2) | \alpha_2 \rangle | \alpha_1; \varsigma_1 \rangle$$

от значений параметров n_{α_2} и φ_{α_2} когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$ при фиксированных значениях параметров сжатого состояния $|\alpha_1; \varsigma_1\rangle; r_1, \theta_1, n_{\alpha_1}$ и φ_{α_1} . Указанная зависимость найдена из формулы (18а) с использованием (36). В целях сравнения нами рассчитана аналогичная зависимость для среднего значения оператора косинуса разности операторов фаз полей, следующая из теории РВ:

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{PB} \rangle_{ss1, \alpha_2} &\equiv \langle \alpha_1; \varsigma_1 | \langle \alpha_2 | \cos(\hat{\varphi}_{PB,1} - \hat{\varphi}_{PB,2}) \times \\ &\times | \alpha_2 \rangle | \alpha_1; \varsigma_1 \rangle, \end{aligned}$$

полученная из формулы (31). На рис. 2б показана зависимость отношения средних $\langle \hat{C}_{PB} \rangle_{ss1, \alpha_2} / \langle \hat{C}_I \rangle_{ss1, \alpha_2}$ от параметров когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$ для фиксированных значений параметров сжатого состояния $|\alpha_1; \varsigma_1\rangle$. Как видно на рисунке, результаты двух теорий заметно различаются в квантовой области малых значений чисел фотонов полей $n_{\alpha_j} = |\alpha_j|^2 \sim 1, j = 1, 2$. Максимальное различие в случае рассматриваемых квантовых состояний полей может достигать величины примерно 25% для значений параметра $n_{\alpha_2} \ll 1$. С ростом параметра $n_{\alpha_2} \gg 1$ когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$ при фиксированном значении $n_{\alpha_1} = 1$ различие результатов двух теорий уменьшается и может достигать величины нескольких процентов.

Полное совпадение двух теорий в рассматриваемом случае имеет место для мезоскопических квантовых полей при $n_{\alpha_j} \gg 10, j = 1, 2$.

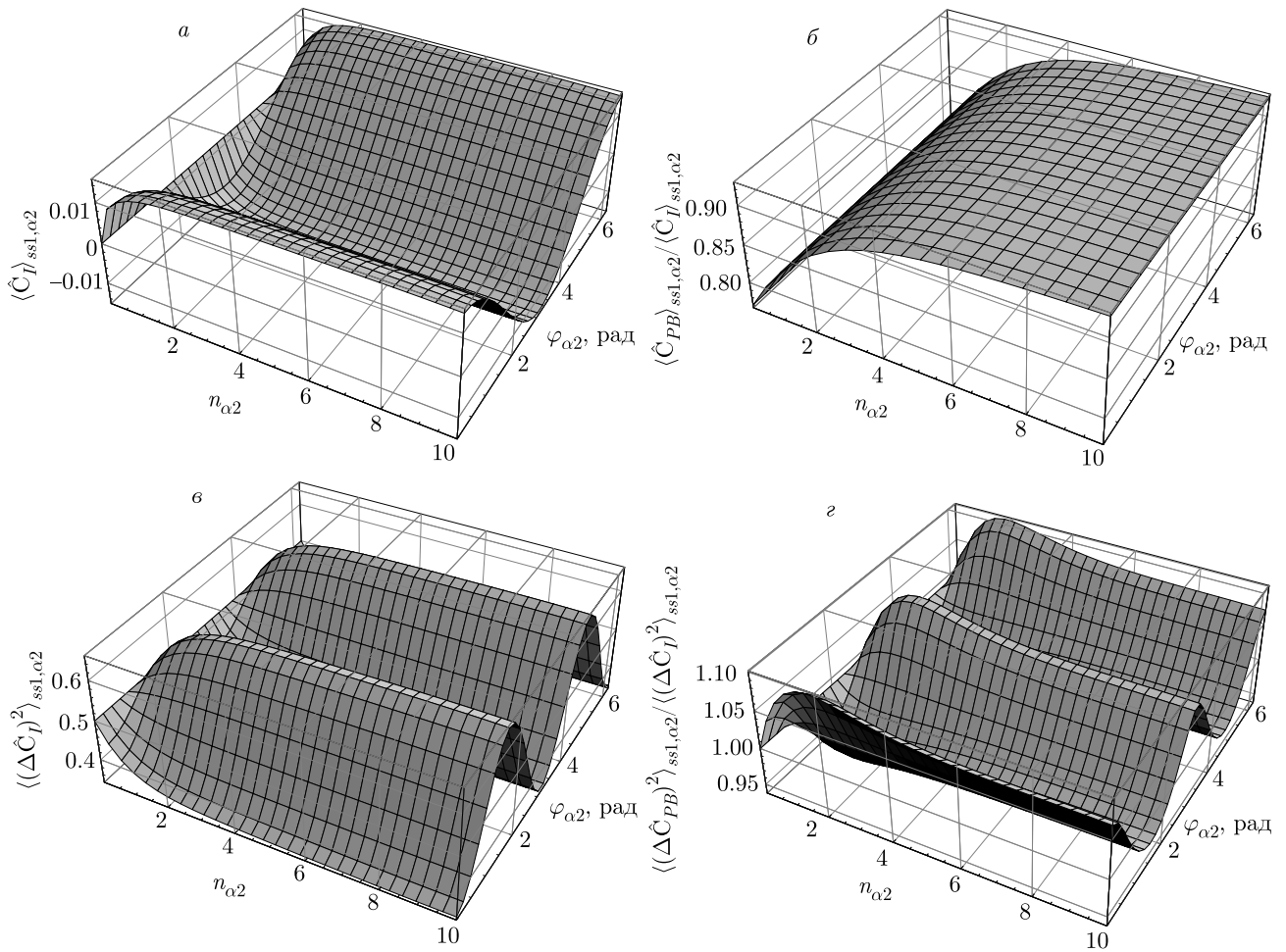


Рис. 2. а) Зависимость среднего значения оператора разности фаз $\langle \hat{C}_I \rangle_{ss1,\alpha_2}$ для сжатого состояния поля $|\alpha_1, \varsigma_1\rangle$ и когерентного состояния поля $|\alpha_2\rangle$ от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$. Для фиксированных значений параметров $n_{\alpha_1} = 1, \varphi_{\alpha_1} = 0, r_1 = 3, \theta_1 = 0$ сжатого состояния $|\alpha_1, \varsigma_1\rangle$. б) Отношение средних значений оператора разности фаз в рамках теории РВ и средних операторов $\langle \hat{C}_{PB} \rangle_{ss1,\alpha_2} / \langle \hat{C}_I \rangle_{ss1,\alpha_2}$ для полей в сжатом и когерентном состояниях. в) Зависимость дисперсии интерференционного оператора разности фаз $\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{ss1,\alpha_2}$ для сжатого и когерентного состояний полей $|\alpha_1, \varsigma_1\rangle$ и $|\alpha_2\rangle$, от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$ для фиксированных значений параметров $n_{\alpha_1} = 1, \varphi_{\alpha_1} = 0, r_1 = 3, \theta_1 = 0$ сжатого состояния $|\alpha_1, \varsigma_1\rangle$. г) Зависимость отношения $\langle (\Delta \hat{C}_{PB})^2 \rangle_{ss1,\alpha_2} / \langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{ss1,\alpha_2}$ значений дисперсии косинуса разности операторов фаз в рамках теории РВ и дисперсии интерференционного оператора косинуса разности фаз для полей в сжатом и когерентном состояниях от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 когерентного состояния $|\alpha_2\rangle$. Значения параметров $n_{\alpha_1} = 1, \varphi_{\alpha_1} = 0, r_1 = 3, \theta_1 = 0$ сжатого состояния $|\alpha_1, \varsigma_1\rangle$ фиксированы

На рис. 2в показана зависимость дисперсии

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{ss1,\alpha_2} &\equiv \langle \alpha_1; \varsigma_1 | \langle \alpha_2 | (\Delta \hat{C}_I)^2 | \alpha_2 \rangle | \alpha_1; \varsigma_1 \rangle \equiv \\ &\equiv \langle \alpha_1; \varsigma_1 | \langle \alpha_2 | \hat{C}_I^2 | \alpha_2 \rangle | \alpha_1; \varsigma_1 \rangle - \langle \alpha_1; \varsigma_1 | \langle \alpha_2 | \hat{C}_I | \alpha_2 \rangle | \alpha_1; \varsigma_1 \rangle^2 \end{aligned}$$

от значений параметров n_{α_2} и φ_{α_2} состояния $|\alpha_2\rangle$ при фиксированных значениях параметров состоя-

ния $|\alpha_1; \varsigma_1\rangle$, полученная с помощью формул (26), (24) и (36). На рис. 2г приведена зависимость от тех же параметров отношения дисперсий оператора РВ и дисперсий интерференционного оператора: $\langle (\Delta \hat{C}_{PB})^2 \rangle_{ss1,\alpha_2} / \langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{ss1,\alpha_2}$. На рисунке видно, что дисперсии, получаемые в рамках двух теорий, незначительно различаются в квантовой обла-

ти $n_{\alpha_j} \sim 1, j = 1, 2$, где отличие не превышает 15% для всех значений фазового угла φ_{α_2} . С ростом сжатия (параметр сжатия $r_1 > 1$) это различие уменьшается. Практически точное совпадение дисперсий косинуса разности фаз двух теорий в случае полей в сжатом и когерентном состояниях достигается для любых $n_{\alpha_j}, j = 1, 2$ при $r_1 > 6$, а также для любых r_1 при $n_{\alpha_j} > 100, j = 1, 2$.

Следовательно, в квантовом режиме микроскопических полей дисперсии ТОРФ полей в сжатом и когерентном состояниях, теории интерференционного оператора и теории РВ совпадают между собой в случае сильного сжатия, тогда как средние значения операторов разности фаз двух теории различаются между собой при $n_{\alpha_j} \sim 1, j = 1, 2$ для любой степени сжатия.

Рассмотрим теперь наблюдаемые средние и дисперсии (флуктуации) ТОРФ двух полей в сжатых когерентных состояниях $|\alpha_1; \varsigma_1\rangle$ и $|\alpha_2; \varsigma_2\rangle$. На рис. 3а изображен пример зависимости среднего значения

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_I \rangle_{ss_1, ss_2} &\equiv \\ &\equiv \langle \alpha_1; \varsigma_1 | \langle \alpha_2; \varsigma_2 | \cos(\varphi_1 - \varphi_2) | \alpha_2; \varsigma_2 \rangle | \alpha_1; \varsigma_1 \rangle \end{aligned}$$

от параметров n_{α_2} и φ_{α_2} состояния $|\alpha_2; \varsigma_2\rangle$ при фиксированных значениях параметров этого состояния r_2 и θ_2 , и фиксированных значениях всех параметров состояния $|\alpha_1; \varsigma_1\rangle$. Рисунок показывает, что для среднего косинуса разности фаз характерно значение $\langle \hat{C}_I \rangle_{ss_1, ss_2} \approx 0$ при $n_{\alpha_2} \gg 1, n_{\alpha_1} = 1$. Расчеты, проведенные нами, позволяют сделать общий вывод о том, что наблюдаемые средние ТОРФ полей в сжатых состояниях близки к нулю в случае $n_{\alpha_1} \gg 1$ или $n_{\alpha_2} \gg 1$ при $r_j \gg 1, j = 1, 2$, аналогично тому, как это имеет место в случае фоковских состояний полей.

Для сравнения нами найдены средние значения тригонометрических функций разности эрмитовых операторов фаз в теории РВ для сжатых состояний полей:

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{PB} \rangle_{ss_1, ss_2} &\equiv \langle \alpha_1; \varsigma_1 | \langle \alpha_2; \varsigma_2 | \times \\ &\times \cos(\hat{\varphi}_{PB,1} - \hat{\varphi}_{PB,2}) | \alpha_2; \varsigma_2 \rangle | \alpha_1; \varsigma_1 \rangle. \end{aligned}$$

На рис. 3б показана зависимость отношения средних значений

$$\langle \hat{C}_{PB} \rangle_{ss_1, ss_2} / \langle \hat{C}_I \rangle_{ss_1, ss_2}$$

от параметров состояния $|\alpha_2; \varsigma_2\rangle$ при фиксированных значениях параметров состояния $|\alpha_1; \varsigma_1\rangle$.

Дисперсия интерференционных операторов синуса и косинуса разности фаз полей в сжатых состояниях, так же как и в случае фоковских состояниях полей, близка к 1/2 в случае значительной величины сжатия $r_j > 1, j = 1, 2$. На рис. 3в изображен пример зависимости дисперсии

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{ss_1, ss_2} &\equiv \\ &\equiv \langle \alpha_1; \varsigma_1 | \langle \alpha_2; \varsigma_2 | (\Delta \hat{C}_I)^2 | \alpha_2; \varsigma_2 \rangle | \alpha_1; \varsigma_1 \rangle \end{aligned}$$

для тех же значений параметров квантовых состояний, что и на рис. 3а. Зависимость на рис. 3в показывает, что $\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{ss_1, ss_2} \approx 1/2$ для всех значений $n_j, j = 1, 2$ в квантовой области их изменения.

Отношение дисперсии косинуса разности операторов фаз в теории РВ к соответствующей величине теории интерференционного оператора разности фаз, показано на рис. 3г. Как видно на рисунке, результаты двух теорий практически совпадают между собой для всех значений параметров квантовых состояний.

Проведенные расчеты позволяют сделать вывод о том, что точное количественное согласие теории интерференционного ТОРФ и теории РВ имеет место для сжатых состояний полей при расчете дисперсий (флуктуаций) ТОРФ в квантовом режиме $n_{\alpha_j} \sim 1, j = 1, 2$ для величин параметров сжатия полей $r_j > 2, j = 1, 2$. В то же время, отличие наблюдаемых средних значений ТОРФ в указанных условиях может составлять заметную величину порядка нескольких процентов даже при высокой степени сжатия. Результаты двух теорий для средних и дисперсий ТОРФ совпадают для $n_{\alpha_j} > 100, j = 1, 2$ при любой степени сжатия.

5. ИЗМЕРЯЕМЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ ФАЗЫ ПОЛЯ

В работе [9] Пегг и Барнетт предположили, что измерение фазы соответствует следующему определению фазовых операторов:

$$\begin{aligned} (\cos \phi)_M &= k(\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \\ (\sin \phi)_M &= ik(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \end{aligned} \tag{37}$$

где k — действительная величина, соответствующая квантовому состоянию поля, для которого проводится измерение. Авторы отмечали, что измерение средних наблюдаемых операторов, определяемых таким образом может проводиться методом оптического балансного гомодинамирования. Отметим,

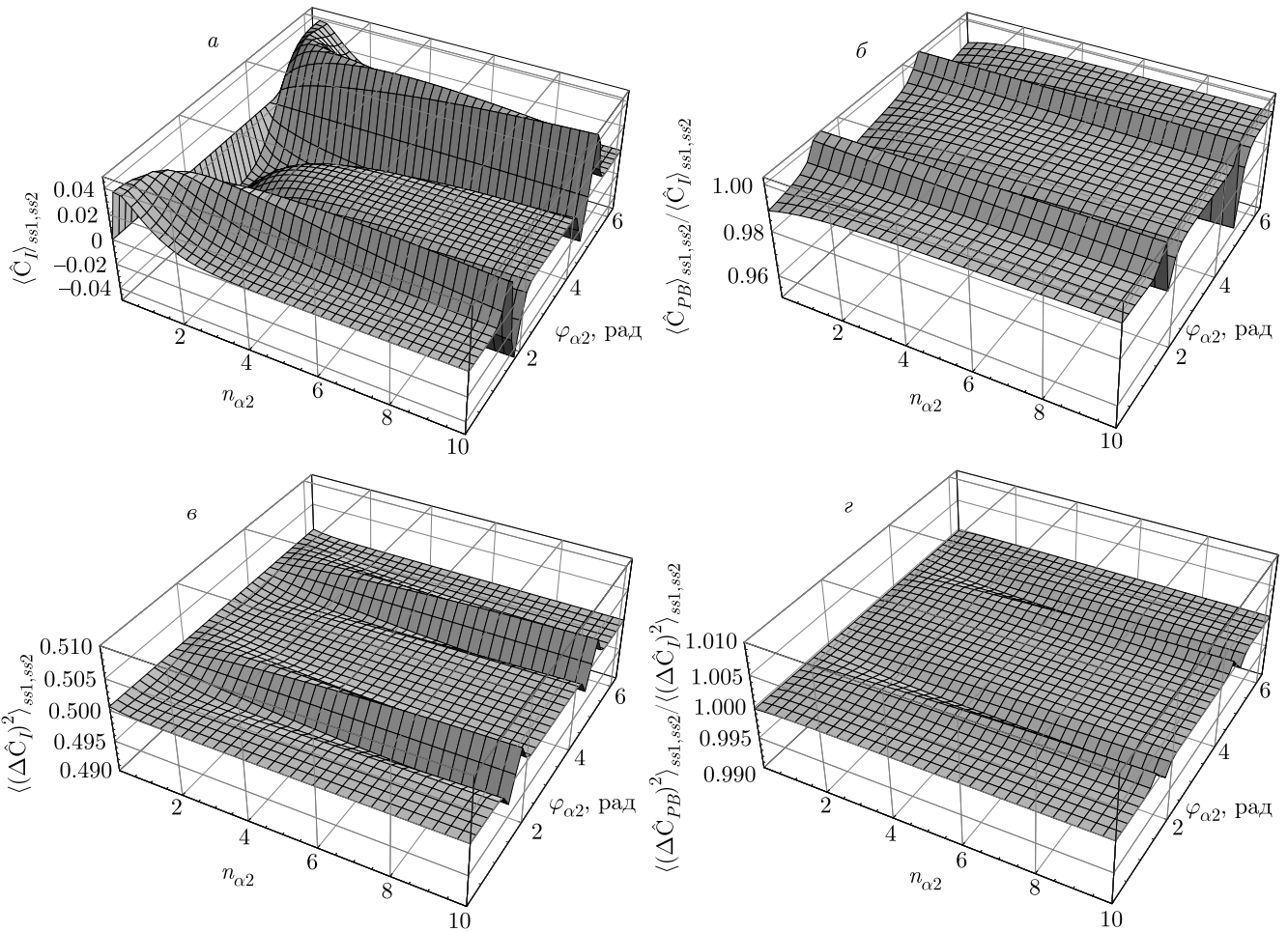


Рис. 3. а) Зависимость среднего значения оператора косинуса разности фаз $\langle \hat{C}_I \rangle_{ss1,\alpha 2}$ для сжатого состояния поля $|\alpha_1, \varsigma_1\rangle$ и сжатого состояния поля $|\alpha_2, \varsigma_2\rangle$ от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 состояния $|\alpha_2, \varsigma_2\rangle$. Значения параметров $n_{\alpha 1} = 1, \varphi_{\alpha 1} = 0, r_1 = 2.8, \theta_1 = \pi/2$ состояния $|\alpha_1, \varsigma_1\rangle$ и $r_2 = 2.3, \theta_2 = \pi$ состояния $|\alpha_2, \varsigma_2\rangle$, фиксированы. б) Отношение средних значений оператора разности фаз в рамках теории РВ и средних интерференционного оператора разности фаз $\langle \hat{C}_{PB} \rangle_{ss1,ss2} / \langle \hat{C}_I \rangle_{ss1,ss2}$ для полей в сжатых состояниях для тех же значений параметров, что и на рис. а. в) Зависимость дисперсии интерференционного оператора косинуса разности фаз $\langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{ss1,\alpha 2}$ для сжатых состояний полей $|\alpha_1, \varsigma_1\rangle$ и $|\alpha_2, \varsigma_2\rangle$, от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 состояния $|\alpha_2, \varsigma_2\rangle$ для тех же значений остальных параметров сжатых состояний. г) Зависимость отношения $\langle (\Delta \hat{C}_{PB})^2 \rangle_{ss1,ss2} / \langle (\Delta \hat{C}_I)^2 \rangle_{ss1,ss2}$ значений дисперсии косинуса разности операторов фаз в рамках теории РВ и дисперсии интерференционного оператора косинуса разности фаз для полей в сжатых состояниях, от средних значений числа фотонов n_2 и фазового угла φ_2 сжатого состояния $|\alpha_2, \varsigma_2\rangle$ для тех же значений остальных параметров сжатых состояний

что в схеме оптического гомодинирования операторы интерференции (7) и (8) сводятся к той или иной квадратуре измеряемого поля, в зависимости от фазы поля локального осциллятора, подаваемого на второй вход светоделителя. При этом поле локального осциллятора, смешиваемого с измеряемым сигналом, предполагается классическим.

В работе Линча [6] предложено использовать в качестве константы k в (50), для поля в любом квантовом состоянии величины

$$k_L = \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{n} \rangle + 1/2}}, \quad (38)$$

где $\langle \hat{n} \rangle$ — среднее значение фотонов поля.

Нетрудно убедиться, что при таком выборе константы k в формулах для тригонометрических операторов фазы не выполняется основное тригонометрическое соотношение:

$$(\cos \phi)_M^2 + (\sin \phi)_M^2 = \frac{\hat{n} + 1}{\langle \hat{n} \rangle + 1/2} \neq \hat{1}. \quad (39)$$

Другой выбор константы, следующий из теории SG [1]: $k_{SG} = 1/\sqrt{\langle \hat{n} \rangle + 1}$, также не приводит к выполнению основного тригонометрического соотношения, однако, в этом случае оно выполняется для средних значений для любого квантового состояния поля. Отметим также, что измеряемые операторы фазы, следующие из теории Сасскинда–Глоговера [1–3] определяются неоднозначно, так, например,

$$\begin{aligned} (\cos \phi)_{SG} &= (\hat{a} \hat{n}^{-1/2} + \hat{n}^{-1/2} \hat{a}^\dagger) / 2 = \\ &= ((\hat{n} + 1)^{-1/2} \hat{a} + \hat{a}^\dagger (\hat{n} + 1)^{-1/2}) / 2 \end{aligned} \quad (40)$$

при замене $\hat{n} \rightarrow \langle \hat{n} \rangle$ в выражении (40) для оператора косинуса, приводящей операторы теории Сасскинда–Глоговера к виду измеряемых операторов (37), константы нормировки измеряемого оператора косинуса

$$(\cos \phi)_{M,SG} = k_{SG} (\hat{a}^\dagger + \hat{a})$$

принимают различные значения $k_{SG,1} = 1/2\sqrt{\langle n \rangle}$ или $k_{SG,2} = 1/2\sqrt{\langle n \rangle + 1}$, при этом $k_{SG,1}$ не определена в случае $\langle n \rangle = 0$.

Расчеты, использующие определение (37), (38) измеряемых операторов фазы поля, приведенные в статье [20], показывают, что дисперсии и наблюдаемые средние значения измеряемых тригонометрических операторов фазы качественно отличаются от результатов, следующих из теории эрмитова оператора фазы РВ [7, 8].

В работах [21–23] в качестве измеряемых операторов разности фаз двух полей рассмотрены следующие операторы:

$$\hat{C}_{M,12} = K \hat{I}_C, \quad \hat{S}_{M,12} = K \hat{I}_S, \quad (41)$$

где константа пропорциональности K выбрана в виде

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\sqrt{\langle \hat{I}_C^2 \rangle + \langle \hat{I}_S^2 \rangle}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(\langle n_1 \rangle + \langle \hat{n}_2 \rangle + 2 \langle \hat{n}_1 \rangle \langle \hat{n}_2 \rangle)}}. \end{aligned} \quad (42)$$

Используя такое определение ТОРФ, нетрудно показать, что

$$\hat{C}_{M,12}^2 + \hat{S}_{M,12}^2 = \frac{\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + 2\hat{n}_1\hat{n}_2}{\langle n_1 \rangle + \langle n_2 \rangle + 2 \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle} \neq \hat{1}, \quad (43)$$

т. е. для измеряемых операторов разности фаз, вводимых с помощью (41) и (42), не выполняется основное тригонометрическое соотношение, справедливым является лишь соотношение для средних квантовомеханических:

$$\langle \hat{C}_{M,12}^2 \rangle + \langle \hat{S}_{M,12}^2 \rangle = 1.$$

В случае полей в когерентных состояниях

$$|\alpha_j\rangle = \left| \sqrt{n_{\alpha_j}} e^{i\varphi_{\alpha_j}} \right\rangle, \quad j = 1, 2$$

можно получить следующие выражения для средних значений измеряемых тригонометрических операторов:

$$\begin{aligned} \langle \hat{C}_{M,12} \rangle &\equiv \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{C}_{M,12} | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{2 n_{\alpha_1} n_{\alpha_2}}{n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2} + 2 n_{\alpha_1} n_{\alpha_2}}} \cos(\varphi_{\alpha_1} - \varphi_{\alpha_2}), \end{aligned} \quad (44a)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_{M,12} \rangle &\equiv \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{S}_{M,12} | \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \\ &= \sqrt{\frac{2 n_{\alpha_1} n_{\alpha_2}}{n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2} + 2 n_{\alpha_1} n_{\alpha_2}}} \sin(\varphi_{\alpha_2} - \varphi_{\alpha_1}), \end{aligned} \quad (44b)$$

а для дисперсий операторов следующие выражения:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{C}_{M,12})^2 \rangle &\equiv \\ &\equiv \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{C}_{M,12}^2 | \alpha_1, \alpha_2 \rangle - \langle \alpha_1, \alpha_2 | \hat{C}_{M,12} | \alpha_1, \alpha_2 \rangle^2 = \\ &= \frac{n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2}}{2(n_{\alpha_1} + n_{\alpha_2} + 2 n_{\alpha_1} n_{\alpha_2})} = \langle (\Delta \hat{S}_{M,12})^2 \rangle. \end{aligned} \quad (45)$$

Сравнение формулы (31) для среднего значения косинуса разности фаз полей в когерентных состояниях, полученной в рамках теории РВ и той же величины для измеряемого интерференционного оператора (44a), показывает, что данные величины обладают идентичной зависимостью от разности фазовых углов когерентных состояний

$$\Delta \equiv \varphi_{\alpha_2} - \varphi_{\alpha_1}.$$

Расчеты наблюдаемых средних, проведенные с использованием формул (31) и (44a), показали, что величина

$$\langle \hat{C}_{PB} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} / \langle \hat{C}_{M,12} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \approx 0.55$$

при $n_{\alpha_1} \approx 0, n_{\alpha_2} \sim 1$ и

$$\langle \hat{C}_{PB} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} / \langle \hat{C}_{M,12} \rangle_{\alpha_1, \alpha_2} \approx 0.95$$

при $n_{\alpha_1} \gg 1$, $n_{\alpha_2} \sim 1$ для любых значений Δ .

Проведенные расчеты позволяют сделать вывод о том, что измерение величины интерференционного члена светоделителя может служить для достаточно точной оценки средних значений ТОРФ квантовых полей в когерентных состояниях при $n_{\alpha_j} > 2$, $j = 1, 2$. Расхождение с теорией РВ в этом случае составляет величину около 10 %.

Дисперсии измеряемых тригонометрических операторов разности фаз (45) полей в когерентных состояниях существенно отличаются от соответствующих дисперсий операторов разности фаз в теории РВ. Сравнение формулы (45) с формулой (32) для дисперсии оператора косинуса разности операторов фаз в теории РВ показывает, что теория РВ (так же как и теория интерференционного ТОРФ) предсказывает ярко выраженную зависимость дисперсии от значений фазовых углов когерентных состояний φ_{α_j} , $j = 1, 2$, тогда как соответствующая дисперсия измеряемого оператора разности фаз (45) не зависит от величин этих параметров квантовых состояний полей $|\alpha_1\rangle$ и $|\alpha_2\rangle$.

Проведенные расчеты позволяют сделать вывод о том, что измеряемые операторы разности фаз полей в случае когерентных квантовых состояний полей не могут использоваться даже для качественной оценки дисперсий (флуктуаций) ТОРФ в квантовой области при $n_{\alpha_j} \sim 1$, $j = 1, 2$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе развит метод построения эрмитовых тригонометрических операторов разности фаз (ТОРФ) двух квантовых электромагнитных полей, использующий операторы интерференции светоделителя. Проведено сравнение величин наблюдаемых средних и дисперсий (флуктуаций) для получаемых в рамках такой теории операторов с соответствующими величинами, следующими из теории эрмитового оператора Пегга – Барнетта (РВ), для различных квантовых состояний полей.

Показано, что для фоковских состояний полей $|n_j\rangle$, $j = 1, 2$ результаты двух теорий совпадают между собой.

В случае, если оба поля находятся в когерентных состояниях $|\alpha_j\rangle$, $j = 1, 2$, средние значения и дисперсии интерференционных операторов косинуса и синуса разности фаз полей обладают теми же качественными зависимостями от параметров кван-

товых состояний полей, что и соответствующие операторы теории РВ. В то же время, результаты двух теорий могут количественно различаться в квантовой области слабых полей. Так, различие двух теорий для дисперсий ТОРФ может достигать 60 % для $n_j = |\alpha_j|^2 \sim 1$, $j = 1, 2$. Точное согласие результатов двух теорий достигается при $n_j \gg 10$, $j = 1, 2$.

Отличие результатов теории РВ от результатов теории интерференционных ТОРФ для средних величин операторов разности фаз двух полей в сжатом $|\zeta_1; \alpha_1\rangle$ и когерентном $|\alpha_2\rangle$ состояниях составляет для квантовых полей с $n_{\alpha_j} \sim 1$, $j = 1, 2$ величину до 15 %, а для полей с $n_{\alpha_j} > 10$, $j = 1$ или 2 , величину порядка 1 % для произвольного значения параметра сжатия r_1 . Точное совпадение результатов двух теорий достигается для любой степени сжатия одного из полей для мезоскопических квантовых полей при $n_{\alpha_j} > 100$, $j = 1, 2$. Для дисперсий ТОРФ отличие результатов теории интерференционных операторов и теории РВ пренебрежимо мало в случае сильного сжатия $r_1 \gg 1$ в квантовом режиме микроскопических полей $n_{\alpha_j} \sim 1$, $j = 1, 2$. В случае $r_1 \sim 1$ точное совпадение результатов обеих теорий имеет место при $n_{\alpha_j} > 100$, $j = 1, 2$.

В случае, когда оба поля находятся в сжатых состояниях, $|\alpha_j; \zeta_j\rangle$, $j = 1, 2$, дисперсии в теории интерференционных полей ТОРФ и в теории РВ различаются незначительно для величин параметров сжатия полей $r_j > 2$, $j = 1, 2$ при любых $n_{\alpha_j} = |\alpha_j|^2$. В случае слабо сжатых состояний, при $r_j < 2$, $j = 1, 2$, результаты двух теорий совпадают для $n_{\alpha_j} \gg 10$, $j = 1, 2$.

Различие наблюдаемых средних значений ТОРФ может составлять заметную величину порядка нескольких процентов даже при высокой степени сжатия. Результаты двух теорий, как для средних, так и для дисперсий операторов разности фаз точно совпадают для $n_{\alpha_j} > 100$, $j = 1, 2$ при любой степени сжатия.

Показано, что измеряемые тригонометрические операторы разности фаз полей, представляющие собой нормированные интерференционные операторы светоделителя, могут служить для качественной (или полуколичественной) оценки средних величин операторов разности фаз согласно теории РВ в случае когерентных состояний полей в квантовом режиме. В то же время, в тех же условиях, дисперсии измеряемых операторов разности фаз качественно отличаются от соответствующих величин, получаемых в рамках теории эрмитового оператора фазы РВ.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Susskind and J. Glogower, *Physics* **1**, 49 (1964).
2. P. Carruthers and M. M. Nieto, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 387 (1965).
3. P. Carruthers and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411 (1968).
4. E. C. Lerner, *Nuovo Cimento B* **56**, 183 (1968).
5. R. Lynch, *J. Opt. Soc. Am. B* **3**, 1006 (1986).
6. R. Lynch, *J. Opt. Soc. Am. B* **4**, 1723 (1987).
7. S. M. Barnett and D.T. Pegg, *J. Mod. Opt.* **36**, 7 (1989).
8. D. T. Pegg and S. M. Barnett, *Phys. Rev. A* **39**, 1665 (1989).
9. S. M. Barnett and D. T. Pegg, *J. Phys. A-Mathematical and General* **19**, 3849 (1986).
10. R. Lynch, *Phys. Rev. A* **41**, 2841 (1990).
11. V. N. Popov and V. S. Yarunin, *J. Mod. Opt.* **39**, 1525 (1992).
12. R. Lynch, *Phys. Rep.* **256**, 367 (1995).
13. W. Vogel and D.-G. Welsch, *Quantum Optics*, Wiley-VCH (2006).
14. Ю. И. Воронцов, *УФН* **172**, 907 (2002).
15. A. P. Alodjants and S. M. Arakelian, *J. Mod. Optics* **46**, 475 (1999).
16. Richard A. Campos, Bahaa E. A. Saleh, and Malvin C. Teich, *Phys. Rev. A* **40**, 1371 (1989).
17. Ulf Leonhardt, *Rep. Prog. Phys.* **66**, 1207 (2003).
18. Rodney Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford University Press. (2000).
19. Horace P. Yuen, *Phys. Rev. A* **13**, 2226 (1976).
20. N. Gronbech-Jensen, P. L. Christiansen, and P. S. Ramanujam, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2423 (1989).
21. J. W. Noh, A. Fougères, and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **45**, 424 (1992).
22. J. W. Noh, A. Fougères, and L. Mandel, *Phys. Rev. A* **46**, 2840 (1992).
23. P. Riegler and K. Wodkiewicz, *Phys. Rev. A* **49**, 1387 (1994).