ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 2, стр. 297–306

ПОЛУКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОНДУЛЯТОРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

А. А. Шишмарев [a,b*], ***А. Д. Левин*** [c**], ***В. Г. Багров*** [b,a***], ***Д. М. Гитман*** [c,d****]

[a] *Институт сильноточной электроники Сибирского отделения Российской академии наук 634055, Томск, Россия*

[b] *Физический факультет, Томский государственный университет 634050, Томск, Россия*

[c] *Институт физики, Университет Сан-Паулу 05508-090, Сан-Паулу, СП, Бразилия*

[d] *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук 119991, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 1 сентября 2020 г.,
после переработки 24 октября 2020 г.
Принята к публикации 24 октября 2020 г.

Представлено полуклассическое приближение для вычисления излучения от классических токов. В частности, использованы точные квантовые состояния квантованного электромагнитного поля, взаимодействующего с классическими токами, для вычисления вероятности многофотонного излучения в том случае, когда начальное состояние электромагнитного поля было вакуумом. Мы изучаем характеристики электромагнитного излучения плоского ондулятора, находим полную излученную энергию и ее спектрально-угловое распределение, а также сравниваем наши результаты с результатами, полученными в рамках классической электродинамики, обсуждаем различия, появляющиеся в результате точного учета квантовой природы электромагнитного излучения, и приводим некоторые численные вычисления, подтверждающие это обсуждение. В Приложении приведено вычисление излученной энергии, выполненное с помощью альтернативной параметризации траектории электронов, движущихся в планарном ондуляторе.

DOI: 10.31857/S0044451021020097

1. ВВЕДЕНИЕ

В общем случае, заряженные частицы, движущиеся с ускорением, испускают электромагнитное излучение. К примеру, синхротронное излучение (СИ) сопровождает движение заряженных частиц по круговым траекториям, которое может быть вызвано наличием внешнего магнитного поля [1]. СИ имеет множество важных применений в физике, медицине и промышленности (см., к примеру, [2]). Гинзбург в работе [3] впервые предложил применение быстро движущихся заряженных частиц в качестве источника излучения, см. также [4]. Другим источником излучения, тесно связанным с СИ, являются периодические магнитные структуры, которые называются ондуляторами или вигглерами. Оригинальное название «ондулятор» было предложено Мотцем [5], предложившим несколько применений для таких источников излучения, а именно: генерацию энергии в конкретных диапазонах спектра (от миллиметрового до инфракрасного излучения), контроль скорости электронных пучков в ускорителях, измерение скорости быстро движущихся электронов или других частиц, таких как мезоны или протоны.

В рамках классической электродинамики формула для углового распределения мощности СИ была впервые получена Шоттом [6]. Альтернативный способ получения этого выражения и его глубокий анализ, в особенности для высокоэнергетических релятивистских электронов, был представлен Швин-

* E-mail: a.a.shishmarev@mail.ru
** E-mail: alexander.d.levin@gmail.com
*** E-mail: bagrov@phys.tsu.ru
**** E-mail: dmitrygitman@hotmail.com

гером [7]. Квантовые поправки к классическому результату и обсуждение их значимости были впервые приведены в работе [8]. Последовательный расчет таких поправок впервые появился в работах [9], где использовалась картина Фарри [10] (иными словами, точные решения уравнения Дирака с магнитным полем). Используя собственную теорию источников [11], Швингер позже представил оригинальный способ получения схожих результатов [12]. Новый промежуточный подход для описания СИ, в котором ток электронов рассматривается классически, тогда как квантовая природа излучения учитывается точно, был представлен в работе [13].

До сих пор большая часть работ по излучению электронов, движущихся в ондуляторах, проводилась с применением методов классической электродинамики. В этих подходах ондуляторное излучение (ОИ) вычисляется с помощью потенциалов Лиенара – Вихерта для высокоэнергетического электрона. Эти потенциалы позволяют найти электрическое и магнитное поля, которые, в свою очередь, используются для вычисления потока энергии, интенсивности или мощности при помощи вектора Умова – Пойнтинга. В 1951 году Мотц [5] предложил схему планарного ондулятора и исследовал излучение электронов, движущихся в таком устройстве. Важный вклад в изучение проблемы ОИ внесли авторы работ [14]. В частности, было вычислено излучение электронов в спиральном ондуляторе и представлены спектрально-угловые распределения интенсивности излучения в различных приближениях. Излучение релятивистских электронов, движущихся в планарном ондуляторе, в частности, в устройстве конечной длины, изучалась в работах [15, 16]. Полученные результаты часто интерпретировались в терминах излученных фотонов, например, в работах [5,14]. В работах Байера и др. [17] использовался метод Швингера и некоторые подходящие приближения для вычисления спектрально-углового распределения интенсивности излучения электронов, движущихся в периодических магнитных структурах.

Аргументы, приведенные Швингером [8] в пользу того факта, что при описании СИ квантовые поправки могут в определенных условиях вносить в излучение существенный вклад, остаются справедливыми и для ОИ. Здесь возникает следующая проблема. Как правило, последовательное квантовое описание процессов излучения заряженных частиц в сильных внешних полях (в рамках квантовой электродинамики) формулируется в так называемой картине Фарри [10] и основывается на знании точных решений уравнений Дирака или Клейна – Гордона в таких полях. Другие известные методы, например, метод Швингера, связаны с использованием дополнительных приближений. Если для описания СИ точные решения таких волновых уравнений с постоянными и однородными магнитными полями известны и хорошо изучены, то для случая описания ОИ точные решения в периодических магнитных структурах до сих пор не найдены. В связи с этим в работе [13] мы предложили подход к описанию квантовых свойств излучения тока заряженных частиц, который не требует использования картины Фарри, а именно сложной техники работы с точными решениями. В этом подходе электрические токи, генерирующие излучение, рассматриваются классическим образом, тогда как квантовая природа электромагнитного поля учитывается точно. Здесь и далее в статье мы называем такой способ вычисления излучения полуклассическим приближением. Естественно, что полуклассическое приближение имеет свою область применимости; в частности, в нем не учитывается эффект обратного влияния поля излучения на заряженные частицы. Однако, оно может быть полезно в некоторых случаях. Например, оно позволяет вычислять одно- и многофотонное излучение без необходимости усложнять расчеты использованием соответствующих решений уравнения Дирака. Эффективность полуклассического приближения была показана на примере вычисления СИ.

Данная статья организована следующим образом. В разд. 2 мы приводим полуклассическое приближение для описания излучения от классических токов. В частности, мы используем точные квантовые состояния квантованного электромагнитного поля, взаимодействующие с классическими токами. Эти состояния используются для вычисления вероятности многофотонного излучения из вакуумного начального состояния электромагнитного поля. Таким образом, в разд. 3 мы изучаем характеристики электромагнитного излучения в планарном ондуляторе в полуклассическом приближении. Мы находим полную излученную энергию и ее спектрально-угловое распределение. В разд. 4 мы сравниваем наши результаты с теми, которые были получены в рамках классической электродинамики, обсуждаем отличия, появляющиеся в результате точного учета квантовой природы электромагнитного излучения, и приводим некоторые численные вычисления, подтверждающие это обсуждение. В Приложении для вычисления излученной энергии мы используем альтернативную параметризацию траектории электронов, движущихся в планарном ондуляторе.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО ТОКА В ПОЛУКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Полуклассическое приближение, рассмотренное в работе [13], основывается на возможности построить точные квантовые состояния электромагнитного поля, взаимодействующего с классическими токами. С помощью таких состояний можно вычислять вероятность излучения фотона и выводить спектрально-угловое распределение энергии, испускаемой в процессе однофотонного или многофотонного излучения. Ниже мы приводим эти формулы, детальный вывод которых читатель может найти в упомянутой работе [13].

В общем случае классический ток $j^{\mu}(x) = \left(j^0(x), j^i(x), i = 1,2,3\right)$, взаимодействующий с электромагнитным полем, влияет на его квантовые состояния. Дифференциальная вероятность $P(\mathbf{k}_1\lambda_1,\ldots,\mathbf{k}_N\lambda_N;t)$ излучения из вакуумного состояния N фотонов, каждый из которых характеризуется волновым вектором $\mathbf{k}_a$ и поляризацией λ_a, $a = 1,2,\ldots, N$, за временной интервал t, имеет вид

$$\begin{gathered}
P(\mathbf{k}_1\lambda_1,\ldots,\mathbf{k}_N\lambda_N;t) = \\
= p(\mathbf{k}_1\lambda_1,\ldots,\mathbf{k}_N\lambda_N;t)\,P(0;t)\,, \\
P(0;t) = \exp\left(-\sum_{\lambda=1}^{2}\int d\mathbf{k}\,|y_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2\right), \\
p(\mathbf{k}_1\lambda_1,\ldots,\mathbf{k}_N\lambda_N;t) = (N!)^{-1}\prod_{a=1}^{N}|y_{\mathbf{k}_a\lambda_a}(t)|^2 .
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $P(0;t)$ — вероятность перехода из вакуума в вакуум (вероятность перехода без излучения фотонов), а величина $p(\mathbf{k}_1\lambda_1,\ldots,\mathbf{k}_N\lambda_N;t)$ может интерпретироваться как относительная вероятность излучения N фотонов. Функции $y_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ определяются как

$$\begin{gathered}
y_{\mathbf{k}\lambda}(t) = i\sqrt{\frac{4\pi}{\hbar c}}\int_0^t dt'\int j^i(x')\,f^{i*}_{\mathbf{k}\lambda}(x')\,d\mathbf{r}', \\
f^i_{\mathbf{k}\lambda}(x) = \frac{\exp\left[-i\left(k_0ct - \mathbf{kr}\right)\right]}{\sqrt{2k_0(2\pi)^3}}\epsilon^i_{\mathbf{k}\lambda}, \quad k_0 = |\mathbf{k}|\,,
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\epsilon^i_{\mathbf{k}\lambda}$ — это векторы поляризации фотонов с квантовыми числами $\mathbf{k}$, λ[1]. Они перпендикулярны волновому вектору $\mathbf{k}$ и обладают свойствами

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}\boldsymbol{\epsilon}^*_{\mathbf{k}\sigma} = \delta_{\lambda\sigma}, \ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}\mathbf{k} = 0, \\
\sum_{\lambda=1}^{2}\epsilon^i_{\mathbf{k}\lambda}\epsilon^{j*}_{\mathbf{k}\lambda} = \delta^{ij} - k^ik^j\,|\mathbf{k}|^{-2} .
\end{gathered} \tag{3}$$

В нашем рассмотрении эти векторы выбираются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k} = (k_0\sin\theta\cos\varphi, k_0\sin\theta\sin\varphi, k_0\cos\theta)\,, \\
&\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1} = (\cos\varphi\cos\theta, \sin\varphi\cos\theta, -\sin\theta)\,, \\
&\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)\,, \\
&\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2} = 1, \\
&\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}1}\cdot\mathbf{k} = \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2}\cdot\mathbf{k} = 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Энергия N фотонов с заданными квантовыми числами $\mathbf{k}_a\lambda_a$ зависит только от их импульсов $\mathbf{k}_a$ и не зависит от их поляризаций; она равна

$$W(\mathbf{k}_1\lambda_1,\ldots,\mathbf{k}_N\lambda_N) = \hbar c\sum_{a=1}^{N}|\mathbf{k}_a|\,. \tag{5}$$

Таким образом, энергия, излученная в процессе, имеет вид

$$\begin{gathered}
W(\mathbf{k}_1\lambda_1,\ldots,\mathbf{k}_N\lambda_N;t) = \\
= W(\mathbf{k}_1\lambda_1,\ldots,\mathbf{k}_N\lambda_N)\,P(\mathbf{k}_1\lambda_1,\ldots,\mathbf{k}_N\lambda_N;t)\,.
\end{gathered} \tag{6}$$

Для того чтобы найти энергию $W(N;t)$, излученную всеми N-фотонными процессами, мы суммируем (6) по всем возможным квантовым числам $\mathbf{k}_a$, λ_a:

$$\begin{gathered}
W(N;t) = \hbar c\,(N!)^{-1}\,P(0;t)\,\times \\
\times\sum_{\lambda_1=1}^{2}\sum_{\lambda_2=1}^{2}\cdots\sum_{\lambda_N=1}^{2}\int d\mathbf{k}_1d\mathbf{k}_2\ldots d\mathbf{k}_N\,\times \\
\times\left[\sum_{b=1}^{N}|\mathbf{k}_b|\right]\prod_{a=1}^{N}|y_{\mathbf{k}_a\lambda_a}(t)|^2 .
\end{gathered} \tag{7}$$

Правая часть уравнения (7) может быть представлена как

$$\begin{gathered}
W(N;t) = \frac{A}{(N-1)!}\times \\
\times P(0;t)\left(\sum_{\lambda=1}^{2}\int d\mathbf{k}\,|y_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2\right)^{N-1}, \\
A = \hbar c\sum_{\lambda=1}^{2}\int d\mathbf{k}\,k_0\,|y_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 .
\end{gathered} \tag{8}$$

Суммируя эту величину по N, найдем полную энергию $W(t)$ всех излученных фотонов:

$$\begin{gathered}
W(t) = \sum_{N=1}^{\infty}W(N;t) = \hbar c\sum_{\lambda=1}^{2}\int d\mathbf{k}\,k_0p_{\mathbf{k}\lambda}(t)\,, \\
p_{\mathbf{k}\lambda}(t) = |y_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2 .
\end{gathered} \tag{9}$$

[1] Здесь и далее мы используем соглашение о суммировании по немым индексам, т. е. $a^ib^i = \sum_i a^ib^i$, если прямо не сказано обратное.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ В ПЛАНАРНОМ ОНДУЛЯТОРЕ В ПОЛУКЛАССИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим электрон, который движется в планарном ондуляторе вдоль оси z в плоскости xz ($y = 0$), совершая поперечные колебания вдоль оси x с частотой ω_p. Динамика и излучение электронов, движущихся в таком устройстве, впервые были рассмотрены в работе [5] и позднее более детально в работах [14, 18], см. также [19]. Электронный ток в этом случае принимает вид

$$
\begin{aligned}
& j^i(x) = ev^i(t)\,\delta(x-x(t))\,\delta(y-y(t))\,\delta(z-z(t)), \\
& v^i(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)), \\
& x(t) = \frac{K}{\gamma}\frac{\lambda_p}{2\pi}\cos(\omega_p t), \quad y(t) = 0, \\
& z(t) = c\beta_0 t + \frac{K^2}{\gamma^2}\frac{\lambda_p}{16\pi}\sin(2\omega_p t), \\
& \dot{x}(t) = -c\beta_0\frac{K}{\gamma}\sin(\omega_p t), \quad \dot{y}(t) = 0, \\
& \dot{z}(t) = c\beta_0\left[1 + \frac{K^2}{4\gamma^2}\cos(2\omega_p t)\right], \\
& \omega_p = 2\pi c\beta_0\lambda_p^{-1}, \quad K = \frac{eH\lambda_p}{2\pi m_0 c^2}, \\
& \beta_0 = \beta\left(1 - \frac{K^2}{4\gamma^2}\right), \quad \beta = \frac{v}{c},
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где параметр K — это так называемый параметр силы ондулятора, λ_p — длина одного периода ондулятора, γ — лоренц-фактор, v — скорость частицы, β_0 — средняя скорость смещения частицы вдоль оси z, m_0 — масса покоя электрона, а H — напряженность магнитного поля в ондуляторе. В большинстве случаев, представляющих интерес, параметр K удовлетворяет неравенству $K \leq 1$ (слабые ондуляторы). Однако для любого реалистичного значения K отношение K/γ весьма мало для релятивистского электрона, $K/\gamma \ll 1$, и $\beta_0 \approx \beta$.

Вычислим излучение, генерируемое током (10), используя формулы, приведенные в разд. 2. Подставляя ток $j^i(x)$ в (2) и используя представление (4) для волнового вектора $\mathbf{k}$ и векторов поляризации $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}$, запишем функции $y_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ для случая планарного ондулятора как

$$
\begin{aligned}
& y_{\mathbf{k}\lambda}(t) = iec\beta_0\left[\hbar ck_0(2\pi)^2\right]^{-1/2} \times \\
& \qquad \times \int_0^t dt' A_\lambda(\theta,\varphi,t')\exp[i\kappa(t')], \\
& A_1(\theta,\varphi,t) = -\sin\theta\left[1 + \frac{K^2}{4\gamma^2}\cos(2\omega_p t)\right] - \\
& \qquad - \cos\varphi\cos\theta\frac{K}{\gamma}\sin(\omega_p t), \\
& A_2(\theta,\varphi,t) = \sin\varphi\frac{K}{\gamma}\sin(\omega_p t), \\
& \kappa(t) = ck_0 t(1-\beta_0\cos\theta) - u\cos\omega_p t - s\sin(2\omega_p t), \\
& u = \frac{K}{\gamma}\frac{\lambda_p}{2\pi}k_0\sin\theta\cos\varphi, \quad s = k_0\frac{K^2}{\gamma^2}\frac{\lambda_p}{16\pi}\cos\theta,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

и функции $p_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ как

$$
p_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \frac{e^2c^2\beta_0^2}{\hbar ck_0(2\pi)^2} \times \left|\int_0^t dt' A_\lambda(\theta,\varphi,t')\exp[i\kappa(t')]\right|^2. \tag{12}
$$

Далее, мы преобразуем экспоненту в уравнении (12), используя следующие разложения тригонометрических функций в терминах функций Бесселя [20]:

$$
\begin{aligned}
& \exp(-iu\cos\omega_p t) = \\
& \quad = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-i)^n J_n(u)\exp(-in\omega_p t), \\
& \exp(-is\sin 2\omega_p t) = \\
& \quad = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(s)\exp(-i2m\omega_p t),
\end{aligned}
\tag{13}
$$

чтобы получить

$$
\begin{aligned}
& p_{\mathbf{k}\lambda}(t) = \frac{e^2c^2\beta_0^2}{\hbar ck_0(2\pi)^2} \times \\
& \quad \times \left|\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} J_n(u)J_m(s)e^{-in\pi/2} \times \right. \\
& \quad \left. \times \int_0^t dt' A_\lambda(\theta,\varphi,t')\exp[i\omega_p t' R_{nm}]\right|^2, \\
& R_{nm} = ck_0\omega_p^{-1}(1-\beta_0\cos\theta) - n - 2m.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Интегрирование по dt' можно выполнить явно. Для этого введем функции $B_{1,2,3}(R_{nm}, t)$:

$$B_1(R_{nm},t)=\int_0^t dt'\exp\left[i\omega_p t' R_{nm}\right]= \\ = t\exp\left(\frac{iR_{nm}\omega_p t}{2}\right)\operatorname{sinc}\left(\frac{R_{nm}\omega_p t}{2}\right),$$
$$\operatorname{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x},$$
$$B_2(R_{nm},t)=\int_0^t dt'\sin(\omega_p t')\exp\left[i\omega_p t' R_{nm}\right] \\ = -2^{-1}it\left\{\exp\left[\frac{i(R_{nm}+1)\omega_p t}{2}\right]\times \right. \\ \times\operatorname{sinc}\left[\frac{(R_{nm}+1)\omega_p t}{2}\right]- \\ \left. -\exp\left[\frac{i(R_{nm}-1)\omega_p t}{2}\right]\operatorname{sinc}\left[\frac{(R_{nm}-1)\omega_p t}{2}\right]\right\}, \tag{15}$$
$$B_3(R_{nm},t)=\int_0^t dt'\cos(2\omega_p t')\exp\left[i\omega_p t' R_{nm}\right]= \\ = 2^{-1}t\left\{\exp\left[\frac{i(R_{nm}+2)\omega_p t}{2}\right]\times \right. \\ \times\operatorname{sinc}\left[\frac{(R_{nm}+2)\omega_p t}{2}\right]+ \\ \left. +\exp\left[\frac{i(R_{nm}-2)\omega_p t}{2}\right]\operatorname{sinc}\left[\frac{(R_{nm}-2)\omega_p t}{2}\right]\right\}.$$

Подставляя (14) в (9) и принимая во внимание (15), получаем выражение для полной энергии $W(t)$:

$$W(t)=\left(\frac{ec\beta_0}{2\pi}\right)^2\int_0^\infty k_0^2dk_0\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\times \\ \times\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\left|\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}J_n(u)J_m(s)e^{-in\pi/2}\times\right.\right. \\ \times\left\{\left[\frac{K^2}{4\gamma^2}B_1(R_{nm},t)+B_3(R_{nm},t)\right]\sin\theta+\right. \\ \left.\left.+\ B_2(R_{nm},t)\frac{K}{\gamma}\cos\varphi\cos\theta\right\}\right|^2+ \\ +\left|\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}J_n(u)J_m(s)e^{-in\pi/2}\times\right. \\ \left.\left.\times\ B_2(R_{nm},t)\frac{K}{\gamma}\sin\varphi\right|^2\right). \tag{16}$$

4. СРАВНЕНИЕ С КЛАССИЧЕСКИМ ПОДХОДОМ

Сравнивая выражение (16), полученное в полуклассическом приближении, со спектрально-угловым распределением излучаемой энергии, полученным в раках классической электродинамики (см., например, [19]), можно видеть, что угловое распределение фотонов с поляризациями $\lambda=1$ и $\lambda=2$ в полуклассическом приближении отличается от классического, тогда как спектральные распределения одинаковы (величина ck_0 соответствует частоте фотона). Отметим, что в основном направлении излучения $\theta=0$, $\varphi=0$ (излучение на оси) полуклассическое приближение и классический подход дают одинаковые результаты.

Для достаточно долгого периода времени t, т. е. для ондулятора с большим числом секций, спектр излучения определяется подынтегральным выражением (16) и вырождается в набор узких пиков на значениях k_0, которые определяются набором условий

$$R_{nm}=0,\quad R_{nm}+1=0,\quad R_{nm}-1=0, \\ R_{nm}+2=0,\quad R_{nm}-2=0. \tag{17}$$

В частности, случай $t\to\infty$ формально соответствует бесконечному ондулятору. В этом случае можно использовать соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin xt}{x}\to\pi\delta(x). \tag{18}$$

Это означает, что для бесконечного ондулятора энергетический спектр сконцентрирован в точках, которые определяются условиями (17).

Сравним полученные в полуклассическом приближении спектрально-угловые распределения энергии с теми, которые были получены в рамках классической электродинамики. Из (16) следует, что

$$\frac{d^2W(t)}{d(ck_0)\,d\Omega}=c^{-1}\left(\frac{eck_0\beta_0}{2\pi}\right)^2\times \\ \times\left\{\left|\sin\theta\left[C_1(t)+\frac{K^2}{4\gamma^2}C_3(t)\right]+\right.\right. \\ \left.\left.+\ \cos\varphi\cos\theta\frac{K}{\gamma}C_2(t)\right|^2+\left|\sin\varphi\frac{K}{\gamma}C_2(t)\right|^2\right\}, \tag{19}$$
$$d\Omega=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

где функции $C_{1,2,3}(t)$ заданы как

$$
\begin{aligned}
C_1(t) &= \int_0^t dt' e^{i\kappa(t')},\\
C_2(t) &= \int_0^t dt' \sin(\omega_p t')\, e^{i\kappa(t')},\\
C_3(t) &= \int_0^t dt' \cos(2\omega_p t')\, e^{i\kappa(t')}\ .
\end{aligned}
\tag{20}
$$

В то же время, спектрально-угловое распределение излученной энергии, полученное классическим методом, имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2W(t)}{d(ck_0)\,d\Omega} = c^{-1}\left(\frac{eck_0\beta_0}{2\pi}\right)^2 \times\\
&\qquad\times\left|D_1\mathbf{x} + D_2\mathbf{y} + D_3\mathbf{z}\right|^2,\\
&D_1 = \frac{K}{\gamma}\tilde{C}_2 - \frac{K}{\gamma}\tilde{C}_4\cos^2\varphi\sin^2\theta +\\
&\qquad + \cos\varphi\sin\theta\cos\theta\left[\tilde{C}_1 + \frac{K^2}{4\gamma}\tilde{C}_3\right],\\
&D_2 = -\frac{K}{\gamma}\tilde{C}_2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta +\\
&\qquad + \cos\varphi\sin\theta\cos\theta\left[\tilde{C}_1 + \frac{K^2}{4\gamma}\tilde{C}_3\right],\\
&D_3 = -\frac{K}{\gamma}\tilde{C}_4\cos\varphi\sin\theta\cos\theta +\\
&\qquad + \left(\cos^2\theta - 1\right)\left[\tilde{C}_1 + \frac{K^2}{4\gamma}\tilde{C}_3\right],
\end{aligned}
\tag{21}
$$

где $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ — единичные векторы в направлении соответствующих координатных осей, а функции $\tilde{C}_{1,2,3,4}$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
\tilde{C}_1 &= \int_{-t/2}^{t/2} dt' e^{-i\kappa(t')},\\
\tilde{C}_2 &= \int_{-t/2}^{t/2} dt' \sin(\omega_p t')\, e^{-i\kappa(t')},\\
\tilde{C}_3 &= \int_{-t/2}^{t/2} dt' \cos(2\omega_p t')\, e^{-i\kappa(t')},\\
\tilde{C}_4 &= \int_{-t/2}^{t/2} dt' \cos(\omega_p t')\, e^{-i\kappa(t')}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Можно видеть, что распределения (19) и (21), полученные соответственно полуклассическим и классическим методами, существенно различаются в общем случае. Тем не менее, оба выражения могут быть сведены к одному и тому же виду:

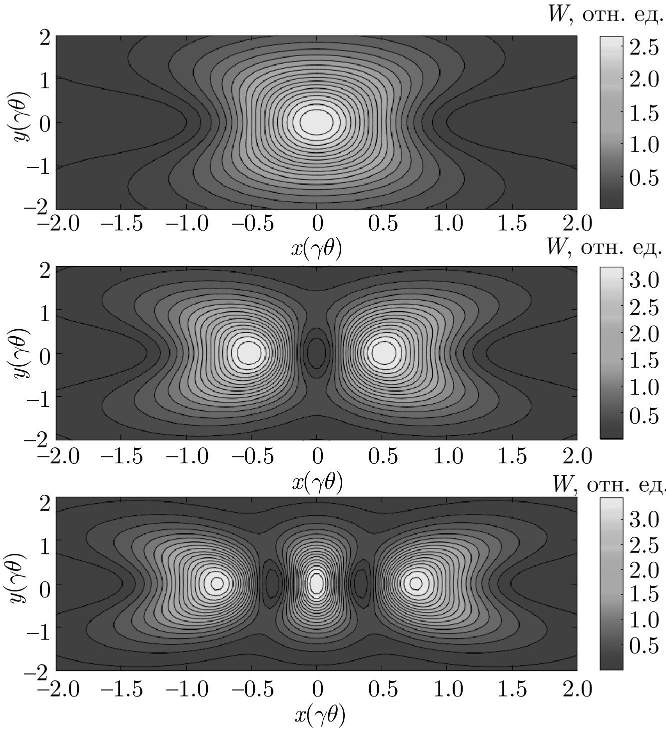

Рис. 1. Полное пространственное угловое распределение полной излученной энергии для первых трех гармоник, вычисленное в полуклассическом приближении

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2W(t)}{d(ck_0)\,d\Omega} \approx c^{-1}\left(\frac{e\beta_0 ck_0}{2\pi}\right)^2 \times\\
&\quad\times\Big[\theta^2\cos^2\varphi\,|C_1|^2 + \theta^2\sin^2\varphi\,|C_1|^2 +\\
&\quad + \frac{K^2}{\gamma^2}|C_2|^2 + \frac{K}{\gamma}\theta\cos\varphi\left(C_1C_2^* + C_1^*C_2\right)\Big]
\end{aligned}
\tag{23}
$$

для планарных ондуляторов, в которых $K/\gamma \ll 1$ и в приближении $\theta \ll 1$, если учесть, что время пролета электрона через ондулятор составляет $t = 2\pi N\omega_p^{-1}$. Численный анализ обеих формул подтверждает эти выводы. Соответствующие результаты представлены на рис. 1.

Отметим, что часто при описании поляризационных свойств излученной энергии $W(t)$ используются так называемые σ- и π-моды излучения. Напомним, что σ-мода характеризует излучение, перпендикулярное направлению внешнего магнитного поля, тогда как π-мода — параллельное. Для планарного ондулятора σ-мода формируется компонентами электрического поля в направлениях осей x и

z, а π-мода формируется компонентами электрического поля в направлении оси y (см., например, [19]).

Выделим вклады, соответствующие σ- и π-модам в выражении (16). Это можно сделать следующим образом. Отметим, что скалярное произведение электрического тока $j^i(x)$ на векторы $\epsilon^i_{\mathbf{k}\lambda}$ можно интерпретировать как проекцию вектора тока на направления, определяемые векторами поляризации $\epsilon^i_{\mathbf{k}\lambda}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\mathbf{k}\lambda}(x) &= \left[j^j(x)\epsilon^j_{\mathbf{k}\lambda}\right]\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}, \\ |\mathbf{j}_{\mathbf{k}\lambda}(x)| &= \left[j^j(x)\epsilon^j_{\mathbf{k}\lambda}\right]. \end{aligned} \tag{24}$$

Векторы $j^i_{\mathbf{k}\lambda}(x) = \mathbf{j}_{\mathbf{k}1}(x)$ могут быть разложены на компоненты, направленные по осям x, y и z; напомним также, что вектор $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}2}$ содержится в плоскости xy,

$$\begin{aligned} &\mathbf{j}_{\mathbf{k}1}(x) = \left[j^j(x)\epsilon^j_{\mathbf{k}\lambda}\right] \times \\ &\quad\times(\mathbf{x}\cos\varphi\cos\theta + \mathbf{y}\sin\varphi\cos\theta - \mathbf{z}\sin\theta), \\ &\mathbf{j}_{\mathbf{k}2}(x) = \left[j^j(x)\epsilon^j_{\mathbf{k}\lambda}\right](-\mathbf{x}\sin\varphi + \mathbf{y}\cos\varphi). \end{aligned} \tag{25}$$

Из (2) следует, что функции $|y_{\mathbf{k}\lambda}(t)|^2$ могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} &|y_{\mathbf{k}1}(t)|^2 = |y_{\mathbf{k}1}(t)|^2 \times \\ &\times\left(\mathbf{x}^2\cos^2\varphi\cos^2\theta + \mathbf{y}^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + \mathbf{z}^2\sin^2\theta\right), \\ &|y_{\mathbf{k}2}(t)|^2 = |y_{\mathbf{k}2}(t)|^2\left(\mathbf{x}^2\sin^2\varphi + \mathbf{y}^2\cos^2\varphi\right), \end{aligned} \tag{26}$$

где мы сохранили квадраты единичных векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ для того, чтобы отслеживать направления поляризации. Поскольку магнитное поле в планарном ондуляторе направлено по оси y, вклады от слагаемых, умноженных на $\mathbf{x}^2$ и $\mathbf{z}^2$, соответствуют σ-моде, а вклады от слагаемых, умноженных на $\mathbf{y}^2$, соответствуют π-моде.

Таким образом, выражения для энергии, излученной в σ- и π-модах, принимают вид

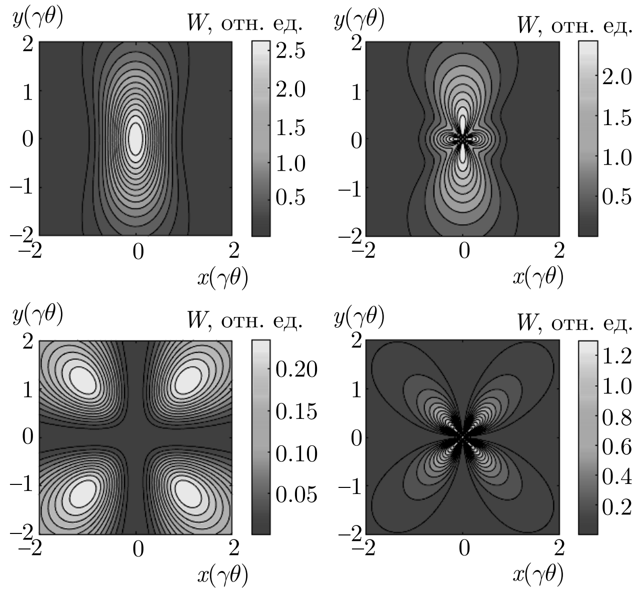

Рис. 2. Пространственное угловое распределение мод σ (сверху) и π (снизу) для первой гармоники, вычисленное классически (слева) и в полуклассическом приближении (справа)

$$\begin{aligned} W_\sigma(t) &= \left(\frac{ec\beta_0}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty k_0^2 dk_0 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \times \\ &\qquad\times \int_0^{2\pi} d\varphi\; p_{\mathbf{k}\sigma}(t), \\ W_\pi(t) &= \left(\frac{ec\beta_0}{2\pi}\right)^2 \int_0^\infty k_0^2 dk_0 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \times \\ &\qquad\times \int_0^{2\pi} d\varphi\; p_{\mathbf{k}\pi}(t), \\ p_{\mathbf{k}\sigma}(t) &= |y_{\mathbf{k}1}(t)|^2\left(\cos^2\varphi\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \\ &\qquad + |y_{\mathbf{k}2}(t)|^2\sin^2\varphi, \\ p_{\mathbf{k}\pi}(t) &= |y_{\mathbf{k}1}(t)|^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + |y_{\mathbf{k}2}(t)|^2\cos^2\varphi. \end{aligned} \tag{27}$$

Легко проверить, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{k}1}(t) + p_{\mathbf{k}2}(t) &= p_{\mathbf{k}\sigma}(t) + p_{\mathbf{k}\pi}(t), \\ W(t) &= W_\sigma(t) + W_\pi(t). \end{aligned} \tag{28}$$

Мы приводим результаты численного анализа распределений энергии для первых трех гармоник на рис. 2, 3, 4. Мы также отмечаем, что хотя распределение полной излученной энергии в основном совпадает с классическим результатом, полуклассический подход демонстрирует отличающееся и более детальное распределение излученной энергии в π- и σ-модах.

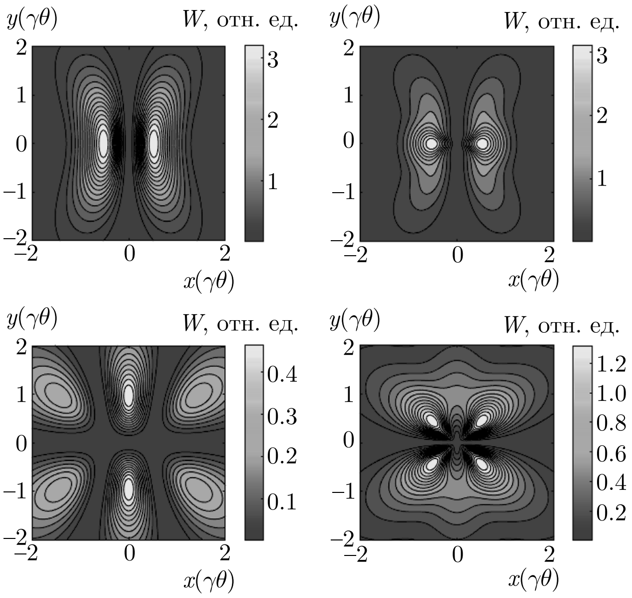

Рис. 3. Пространственное угловое распределение мод σ (сверху) и π (снизу) для второй гармоники, вычисленное классически (слева) и в полуклассическом приближении (справа)

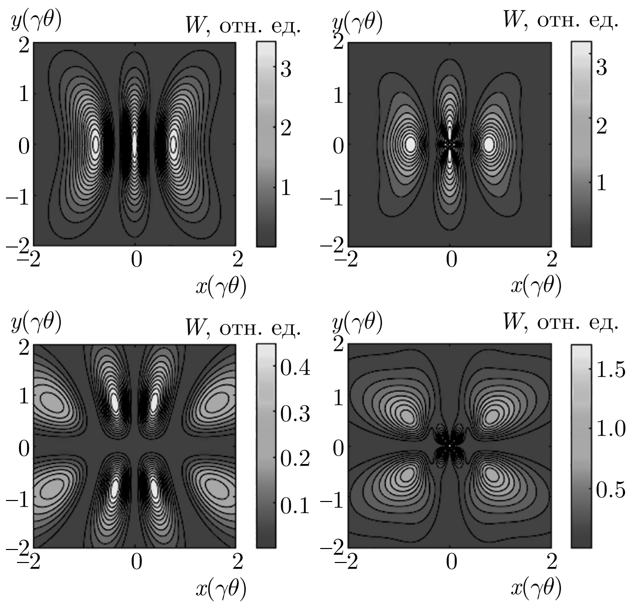

Рис. 4. Пространственное угловое распределение мод σ (сверху) и π (снизу) для третьей гармоники, вычисленное классически (слева) и в полуклассическом приближении (справа)

В заключение отметим, что выражения для характеристик излучения, полученные в полуклассическом приближении, даже в тех случаях, когда они не отличаются количественно от соответствующих классических выражений, имеют более простой аналитический вид, а их вывод существенно более прост с технической точки зрения.

Финансирование. Работа А. А. Ш. поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-32-60010), работа В. Г. Б. выполнена в рамках программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета. Работа Д. М. Г. поддержана Фондом поддержки исследований штата Сан-Паулу (FAPESP) (грант № 2016/03319-6). Работа Д. М. Г. и А. Д. Л. выполнена при поддержке Национального совета по научному и технологическому развитию (CNPq).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление излучения в планарном ондуляторе в полуклассическом приближении при использовании альтернативной параметризации траектории

В работе [15] для вычисления излучения было использовано специальное представление траектории электронов, движущихся в планарном ондуляторе. Предполагается, что траектория электронов плоская и симметричная относительно оси x и состоит из круговых дуг длины l и радиуса R. Это представление дает альтернативную параметризацию траектории электронов, движущихся в планарном ондуляторе. Здесь мы применяем полуклассическое приближение, для того чтобы рассчитать излучение электронов, движущихся по такой траектории.

Рассмотрим электроны, движущиеся в периодическом магнитном поле, параллельном оси z, где для каждого периода магнитное поле однородно и постоянно. Длина ондулятора считается бесконечной. Длина l каждой из дуг связана с эффективным радиусом кривизны R через так называемый угол влета, $\alpha = l/R$, $0 < \alpha < \pi$. Скорость электронов равна $v = c\beta = \omega R$, где ω — угловая скорость. Электроны движутся вдоль оси x со средней скоростью $v_0 = c\bar{\beta}$ и совершают периодические колебания вдоль осей x и y. Это предполагает, что

$$\bar{\beta} = \beta \operatorname{sinc}(\alpha/2), \quad T = 2\pi\omega_0^{-1} = 2\alpha\omega^{-1}, \quad \omega_0 = \pi\omega\alpha^{-1} = \pi\beta c l^{-1}. \tag{29}$$

Траектория электронов на временном промежутке $(0, T)$ может быть представлена в виде [15]

$$
\begin{aligned}
& x(t) = \\
& = \begin{cases} R\left[\sin(\alpha/2) + \sin(\omega t - \alpha/2)\right], & t \in T_1, \\ R\left[3\sin(\alpha/2) + \sin(\omega t - \alpha/2)\right], & t \in T_2, \end{cases} \\
& y(t) = \\
& = \begin{cases} R\left[\cos(\omega t - \alpha/2) - \cos(\alpha/2)\right], & t \in T_1, \\ R\left[\cos(\alpha/2) - \cos(\omega t - 3\alpha/2)\right], & t \in T_2, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{30}
$$

где временные интервалы T_1 и T_2 определены как

$$
T_1 = [0, T/2]; \quad T_2 = [T/2, T]. \tag{31}
$$

Ток $j^i(x)$, формирующийся электронами, которые движутся по траектории (30), имеет вид

$$
\begin{aligned}
& j^i(x) = ev^i(t)\,\delta(x - x(t))\,\delta(y - y(t))\,\delta(z - z(t)), \\
& v^i(t) = \dot{r}^i(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0), \\
& \dot{x}(t) = \begin{cases} \omega R \cos[\alpha/2 - \omega t], & t \in T_1, \\ \omega R \cos[3\alpha/2 - \omega t], & t \in T_2, \end{cases} \\
& \dot{y}(t) = \begin{cases} \omega R \sin[\alpha/2 - \omega t], & t \in T_1, \\ -\omega R \sin[3\alpha/2 - \omega t], & t \in T_2. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Вычислим энергию, излучаемую за один период колебаний T. Функции $y_{\mathbf{k}\lambda}(t)$ на временном промежутке $t = T$ могут быть вычислены в виде

$$
y_{\mathbf{k}\lambda}(T) = y_{\mathbf{k}\lambda}(T_1) + y_{\mathbf{k}\lambda}(T_2). \tag{33}
$$

Используя определения (4) для волнового вектора $\mathbf{k}$ и векторов поляризации $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\lambda}$, получаем

$$
\begin{aligned}
& y_{\mathbf{k}1}(T_j) = z_j e^{i\phi_j} \cos\theta \int\limits_{\tau_j^{in}}^{\tau_j^{out}} \omega^{-1} d\tau_j \times \\
& \times \left[c\bar{\beta}\cos\varphi + \omega R \cos\tau_j\right] \exp\left[i\varkappa(\tau_j)\right], \\
& y_{\mathbf{k}2}(T_j) = -z_j e^{i\phi_j} \int\limits_{\tau_j^{in}}^{\tau_j^{out}} \omega^{-1} d\tau_j \times \\
& \times \left[c\bar{\beta}\sin\varphi + (-1)^{j-1}\omega R \sin\tau_j\right] \exp\left[i\varkappa(\tau_j)\right],
\end{aligned}
\tag{34}
$$

где были использованы обозначения

$$
\begin{aligned}
& \varkappa(\tau_j) = ck_0\omega^{-1}\tau_j - \xi\sin\tau_j, \quad \xi = Rk_0\sin\theta, \\
& z_j = ie\exp\left[-i\xi f_j(\varphi, \alpha)\right]\left[\hbar ck_0 (2\pi)^2\right]^{-1/2}, \\
& \qquad j = 1, 2, \\
& f_1(\varphi, \alpha) = \sin(\alpha/2)\cos\varphi - \cos(\alpha/2)\sin\varphi, \\
& f_2(\varphi, \alpha) = \cos(\alpha/2)\sin\varphi + 3\sin(\alpha/2)\cos\varphi, \\
& \tau_1 = \omega t - \alpha/2 + \varphi, \quad \tau_2 = \omega t - 3\alpha/2 - \varphi, \\
& \tau_1^{in} = \varphi - \alpha/2, \quad \tau_1^{out} = \varphi + \alpha/2, \\
& \tau_2^{in} = -\varphi - \alpha/2, \quad \tau_2^{out} = \alpha/2 - \varphi, \\
& \phi_1 = \omega^{-1}\kappa(\alpha/2 - \varphi), \quad \phi_2 = \omega^{-1}\kappa(\varphi + 3\alpha/2).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Применяя известные разложения тригонометрических функций по функциям Бесселя,

$$
\begin{aligned}
& \exp(-i\xi\sin\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\xi)\exp(-in\tau), \\
& \sin\tau\exp(-i\xi\sin\tau) = i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n'(\xi)\exp(-in\tau), \\
& \cos\tau\exp(-i\xi\sin\tau) = \\
& \qquad = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{\xi} J_n(\xi)\exp(-in\tau),
\end{aligned}
\tag{36}
$$

перепишем (34) как

$$
\begin{aligned}
& y_{\mathbf{k}1}(T_j) = z_j e^{i\phi_j} \times \\
& \times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \cos\theta\left[n(k_0\sin\theta)^{-1} + \omega^{-1}c\bar{\beta}\cos\varphi\right] \times \\
& \qquad \times J_n(\xi)\,K_n(T_j), \\
& y_{\mathbf{k}2}(T_j) = -z_j e^{i\phi_j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\omega^{-1}c\bar{\beta}\sin\varphi J_n(\xi) + \right. \\
& \qquad \left. + (-1)^{j-1} iRJ_n'(\xi)\right] K_n(T_j),
\end{aligned}
\tag{37}
$$

где функции $K_n(T_j)$ имеют вид

$$
\begin{aligned}
& K_n(T_j) = \int\limits_{\tau_j^{in}}^{\tau_j^{out}} d\tau_j \exp\left[i\left(\omega^{-1}ck_0 - n\right)\tau_j\right] = \\
& = \exp\left[(-1)^j i\left(\omega^{-1}ck_0 - n\right)\varphi\right] \times \\
& \times \frac{\sin\left[\alpha\left(\omega^{-1}ck_0 - n\right)/2\right]}{\left(\omega^{-1}ck_0 - n\right)/2}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Функции $p_{\mathbf{k}\lambda}(T)$ на интервале T имеют вид

$$
p_{\mathbf{k}\lambda}(T) = \left|y_{\mathbf{k}\lambda}(T)\right|^2 = \left|y_{\mathbf{k}\lambda}(T_1) + y_{\mathbf{k}\lambda}(T_2)\right|^2. \tag{39}
$$

Подставляя выражения (37) в (39), получим

$$
\begin{aligned}
p_{\mathbf{k}1}(T) &= \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[n\,(k_0 \sin\theta)^{-1} + \omega^{-1} c\bar{\beta} \cos\varphi \right] \times \right. \\
&\qquad \left. \times \cos\theta J_n(\xi)\, S_1 \right|^2, \\
p_{\mathbf{k}2}(T) &= \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\omega^{-1} c\bar{\beta} \sin\varphi J_n(\xi)\, S_1 \, + \right. \right. \\
&\qquad \left. \left. + \, iRJ_n'(\xi)\, S_2 \right] \right|^2, \\
S_1 &= z_1 e^{i\phi_1} K_n(T_1) + z_2 e^{i\phi_2} K_n(T_2), \\
S_2 &= z_1 e^{i\phi_1} K_n(T_1) - z_2 e^{i\phi_2} K_n(T_2).
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Полная излученная энергия $W(T)$, таким образом, равна

$$
W(T) = \int_0^\infty k_0^2\, dk_0 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \times \\
\times \int_0^{2\pi} d\varphi \left[p_{\mathbf{k}1}(T) + p_{\mathbf{k}2}(T) \right], \tag{41}
$$

где $p_{\mathbf{k}1}(T)$ и $p_{\mathbf{k}2}(T)$ заданы выражениями (40).

ЛИТЕРАТУРА

1. F. R. Elder, A. M. Gurevitch, R. V. Langmuir et al., Phys. Rev. **71**, 829 (1947).
2. H. E. Huxley, A. R. Faruqi, J. Bordas et al., Nature **284**, 140 (1980); L. Chen, K. L. Durr, and E. Gouaux, Science **345**, 1021 (2014); S. Kneip, C. McGuffey, F. Dollar et al., Appl. Phys. Lett. **99**, 093701 (2011); G. N. Afanasiev, *Vavilov-Cherenkov and Synchrotron Radiation: Foundations and Applications*, Springer-Verlag, New York (2004); H. Saisho and Y. Gohshi, *Applications of Synchrotron Radiation to Materials Analysis*, Elsevier, Amsterdam (1996); M. Kono, *Medical Applications of Synchrotron Radiation*, ed. by M. Ando and C. Uyama, Springer, Tokyo (1998).
3. V. L. Ginsburg, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Fiz. **11**, 165 (1947).
4. N. A. Korkhmazyan and S. S. Elbakyan, Dokl. Akad. Nauk SSSR **203**, 791 (1972).
5. H. Motz, J. Appl. Phys. **22**, 527 (1951).
6. G. A. Schott, Phil. Mag. **13**, 657 (1907); Ann. Phys. **329**, 635 (1907); *Electromagnetic Radiation*, Cambrige University Press, Cambrige (1912).
7. J. Schwinger, Phys. Rev. **75**, 1912 (1949).
8. J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. **40**, 132 (1954).
9. A. A. Sokolov and I. M. Ternov, Sov. Phys. JETP **4**, 396 (1957); *Synchrotron Radiation*, Academic Verlag, Berlin (1968); *Radiation from Relativistic Electrons*, American Institute of Physics, New York (1986).
10. W. H. Furry, Phys. Rev. **81**, 115 (1951); R. P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749 (1949); D. M. Gitman, Izv. Vuzov Fizika **19**, 81 (1976); Izv. Vuzov Fizika **19**, 86 (1976); J. Phys. A **10**, 2007 (1977); in *Quantum Electrodynamics with External Fields*, ed. by D. M. Gitman, Izd. TGU, Tomsk (1977), p. 132.
11. J. Schwinger, *Particles, Sources and Fields*, Addison-Wesley, Massachusetts (1970) Vol. 1; (1973) Vol. 2.
12. J. Schwinger, Phys. Rev. D **7**, 1696 (1973).
13. V. G. Bagrov, D. M. Gitman, A. A. Shishmarev et al., J. Synchrotron Rad. **27**, 902 (2020).
14. D. F. Alferov, Y. A. Bashmakov, K. A. Belovintsev et al., Particle Accelerators **9**, 223 (1979); D. F. Alferov, Y. A. Bashmakov, and P. A. Cherenkov, Sov. Phys. Usp. **32**, 200 (1989); D. F. Alferov, Y. A. Bashmakov, and E. G. Bessonov, Preprint FIAN **23**, 1 (1972); Preprint FIAN **118**, 1 (1975); Zh. Tekh. Fiz. **46**, 2392 (1976); Sov. Phys.-Tech. Phys. **18**, 1336 (1974).
15. V. G. Bagrov, V. R. Khalilov, A. A. Sokolov et al., Annalen der Physik **30**, 1 (1973).
16. V. G. Bagrov, D. M. Gitman, A. A. Sokolov et al., J. Technic. Fiz. XLV **9**, 1948 (1975).
17. V. N. Baier and V. M. Katkov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53**, 1478 (1968); V. N. Baier, V. M. Katkov, and V. M. Strakhovenko, Zh. Eksp. Teor. Phys. **63**, 2121 (1973).
18. S. Krinsky, IEEE Trans. Nucl. Sci. **307**, 3078 (1983).
19. H. Wiedemann, *Synchrotron Radiation*, Springer-Verlag, Berlin (2003).
20. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 7 ed., Academic Press, New York (2007).