ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 3, стр. 553–562

ПРОВОДИМОСТЬ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ РЭЛЕЯ ПРИ КРИТИЧЕСКОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ — ПОРОГЕ ПРОТЕКАНИЯ

Б. Я. Балагуров *

Институт биохимической физики им. Н. М. Эмануэля Российской академии наук
119334, Москва, Россия

Поступила в редакцию 7 ноября 2020 г.,
после переработки 14 ноября 2020 г.
Принята к публикации 14 ноября 2020 г.

Рассмотрена проводимость двумерной модели Рэлея (изотропной матрицы с периодическим расположением круговых включений) при критической концентрации — пороге протекания. В рамках бинарного приближения вычислена эффективная проводимость модели с фазовым переходом металл–идеальный проводник. Для альтернативной модели с фазовым переходом металл–диэлектрик соответствующая эффективная проводимость определена соотношением взаимности Келлера – Дыхне.

DOI: 10.31857/S0044451021030160

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная модель композита с регулярным расположением включений круговой формы впервые рассмотрена Рэлеем в работе [1]. Для эффективной проводимости σ_e этой модели в [1] были вычислены первые члены разложения соответствующего вириального ряда по степеням малой концентрации включений. Впоследствии решение, позволяющее найти произвольный член этого ряда, было дано разными методами в работах [2, 3] (см. также [4]). Согласно [2, 3] для вычисления проводимости двумерной модели Рэлея необходимо разрешить бесконечную систему алгебраических уравнений. Как показал численный анализ [3], для определения величины σ_e в достаточно широком диапазоне изменения входящих в задачу параметров достаточно ограничиться рассмотрением конечной подсистемы уравнений небольшого размера. В то же время для модели с фазовым переходом этот размер может быть неограниченно большим. Это обстоятельство серьезно затрудняет исследование обсуждаемой задачи численным методом.

В предыдущей работе [5] обсуждаемая задача о проводимости двумерной модели Рэлея с фазовым переходом типа металл–идеальный проводник рассмотрена аналитическим методом в рамках бинарного приближения. В этом приближении исходная проблема сводится к изучению протекания тока через пару соседних круговых включений. При этом потенциал задачи выражается через электростатическую функцию Грина для «тела», состоящего из двух кругов. Для вычисления функции Грина в [5] определена система собственных функций (см. [6,7]) для упомянутого «тела». Использование полученного таким образом потенциала позволило определить эффективную проводимость рассматриваемой модели. Следует отметить, что использованное в работе [5] бинарное приближение тем точнее описывает проводимость рассмотренной двумерной модели, чем ближе она к точке фазового перехода.

В настоящей работе рассмотрена задача о проводимости двумерной модели Рэлея при критической концентрации (пороге протекания), когда происходит соприкосновение соседних кругов. В том же бинарном приближении потенциал выражен через функцию Грина, а та, в свою очередь, — через систему собственных функций для пары соприкасающихся включений. Спецификой этого случая является непрерывность спектра собственных значений и дельта-функционный вид соотношения ортонормированности для поляризационных собственных функций. С помощью найденного потенциала вычислена эффективная проводимость модели в точке фазового перехода типа металл–идеальный проводник. Для альтернативной модели с фазовым переходом типа металл–диэлектрик соответствующая эффективная проводимость определена из со-

* E-mail: balagurov@deom.chph.ras.ru, byabalagurov@mail.ru

отношения взаимности Келлера – Дыхне [8, 9]. Сравнение полученного результата с гипотезой подобия [10, 11] позволяет определить соответствующий критический индекс проводимости.

Знание системы собственных функций для какого-либо макроскопического тела позволяет не только находить соответствующую электростатическую функцию Грина, но и давать решение, например, краевых задач Дирихле и Неймана, а также вычислять поляризуемость этого тела. В качестве примера в Приложении найден тензор дипольной поляризуемости двух соприкасающихся кругов (параллельных круговых цилиндров для трехмерной задачи).

2. БИНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Двумерная модель Рэлея представляет собой изотропную матрицу проводимости σ_1 с системой включений круговой формы радиуса R и проводимости σ_2. Центры кругов расположены в узлах квадратной решетки с периодом $2a$. При критической концентрации $a = R$ — пороге протекания — каждое из включений касается четырех ближайших соседей. При $\sigma_2 \gg \sigma_1$ в подобном двумерном композите происходит фазовый переход типа металл–идеальный проводник. В этом случае проводимость модели в целом определяется областью контакта соседних включений, где ток должен преодолевать низкопроводящую прослойку. Следует ожидать при этом, что ток протекает через эту прослойку в виде узкого канала возле точки соприкосновения включений. Для оценки вклада области контакта в эффективную проводимость воспользуемся, как и в [5], бинарным приближением — рассмотрим пару соседних кругов (см. рис. 1), помещенную в неограниченного размера матрицу. Входящий в эту пару и исходящий из нее токи, расположенные «вдали» от области контакта, представим в виде точечных источника и стока.

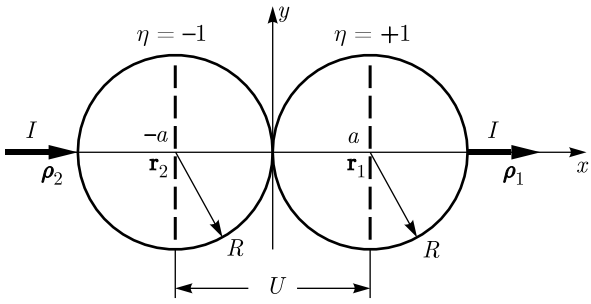

Рис. 1

В данном случае уравнение сохранения тока принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = I \left\{ \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_2) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_1) \right\}. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока

$$\mathbf{j} = -\sigma(\mathbf{r}) \nabla \varphi(\mathbf{r}), \tag{2}$$

$\sigma(\mathbf{r})$ — проводимость среды, $\varphi(\mathbf{r})$ — электрический потенциал. Положим

$$\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_1 [1 - (1 - h) v(\mathbf{r})], \quad h = \sigma_2 / \sigma_1, \tag{3}$$

где $v(\mathbf{r}) = 1$ внутри включения и $v(\mathbf{r}) = 0$ вне его. В этом случае уравнение для потенциала принимает вид

$$\nabla \left\{ \left[1 - (1 - h) v(\mathbf{r}) \right] \nabla \varphi(\mathbf{r}) \right\} = \\ = \frac{I}{\sigma_1} \left\{ \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_1) - \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}_2) \right\}. \tag{4}$$

Введем, следуя ссылкам [6, 7], функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, подчиняющуюся уравнению

$$\nabla_{\mathbf{r}} \left\{ \left[1 - (1 - h) v(\mathbf{r}) \right] \nabla_{\mathbf{r}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \tag{5}$$

С учетом формулы (5) для потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ из уравнения (4) получаем следующее выражение:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{I}{\sigma_1} \left\{ G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_1) - G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}_2) \right\}. \tag{6}$$

Величина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, подчиняющаяся уравнению (5), определена в [6, 7] с помощью метода собственных функций. Для функции Грина $G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho})$, где ρ принадлежит поверхности тела, имеет место следующее выражение согласно [6, 7]:

$$G(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) = -\sum_{\nu} \frac{1 + \varepsilon_\nu}{h + \varepsilon_\nu} \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) \psi_\nu(\mathbf{r}) - \\ - \sum_{k} \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho}) \bar{\psi}_k(\mathbf{r}). \tag{7}$$

Здесь вектор $\mathbf{r}$ произволен и может принадлежать как телу, так и пространству вне его.

В выражении (7) $\psi_\nu(\mathbf{r})$ и $\bar{\psi}_k(\mathbf{r})$ — регулярные и обращающиеся в нуль при $r \to \infty$ собственные функции, а $\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})$ и $\bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho})$ — их значения на поверхности тела при $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$. Поляризационные функции $\psi_\nu(\mathbf{r})$, обладающие мультипольной асимптотикой, удовлетворяют уравнению Лапласа внутри (i) и вне (e) тела:

$$\nabla^2 \psi_\nu^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla^2 \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r}) = 0. \tag{8}$$

На поверхности S тела (при $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}$) для функции $\psi_\nu(\mathbf{r})$ имеем следующие граничные условия:

$$\psi_\nu^{(e)}\Big|_S = \psi_\nu^{(i)}\Big|_S, \quad \frac{\partial\psi_\nu^{(e)}}{\partial n} = -\varepsilon_\nu\,\frac{\partial\psi_\nu^{(i)}}{\partial n}. \tag{9}$$

Здесь $\partial/\partial n$ — нормальная производная, $\varepsilon_\nu > 0$ — собственное значение для поляризационного состояния. Система $\{\psi_\nu(\mathbf{r})\}$ ортонормирована по соотношению

$$\int \big(\nabla\psi_\mu(\mathbf{r})\cdot\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\big)\,d\mathbf{r} = \delta_{\mu\nu}, \tag{10}$$

где интегрирование распространяется на все пространство, или

$$\int \big(\nabla\psi_\mu(\mathbf{r})\cdot\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\big)[1-v(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r} = \frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\delta_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Здесь интеграл берется по области вне тела.

Функции зарядовых состояний $\bar\psi_k(\mathbf{r})$ вне тела также подчиняются уравнению Лапласа и обладают монопольной асимптотикой. Им отвечает одно и то же собственное значение $\bar\varepsilon_k = \infty$. Для монолитного (неразъемного) тела зарядовая функция $\bar\psi(\mathbf{r})$ одна. На поверхности тела она принимает постоянное значение

$$\bar\psi^{(e)}(\mathbf{r})\big|_S = \bar\Psi = \text{const}. \tag{12}$$

В то же время $\bar\psi^{(i)}(\mathbf{r}) = \bar\Psi$ в любой точке внутри тела.

Разъемному «телу», состоящему из n частей, отвечает n зарядовых функций $\bar\psi_k(\mathbf{r})$, где $k = 1, 2, \ldots, n$. Каждая из них принимает постоянные (вообще говоря, разные) значения на поверхностях частей этого тела.

Функции $\bar\psi_k(\mathbf{r})$ ортонормированы согласно

$$\int \big(\nabla\bar\psi_k(\mathbf{r})\cdot\nabla\bar\psi_{k'}(\mathbf{r})\big)[1-v(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r} = \delta_{kk'}. \tag{13}$$

Подсистемы поляризационных $\{\psi_\nu(\mathbf{r})\}$ и зарядовых $\{\bar\psi_k(\mathbf{r})\}$ функций взаимно ортогональны:

$$\int \big(\nabla\psi_\nu(\mathbf{r})\cdot\nabla\bar\psi_k(\mathbf{r})\big)[1-v(\mathbf{r})]\,d\mathbf{r} = 0. \tag{14}$$

Таким образом, совокупность $\{\psi_\nu(\mathbf{r}), \bar\psi_k(\mathbf{r})\}$ представляет собой ортонормированную систему функций. Заметим, однако, что эта совокупность полной системой не является (см. [6, 7]). Отметим также, что в рассматриваемой в работе двумерной задаче функции с монопольной асимптотикой логарифмически расходятся при $r \to \infty$. В этом случае на зарядовые функции накладывается условие $\bar\psi_k(\mathbf{r}) = 0$ на окружности достаточно большого радиуса. Как будет видно ниже, для соприкасающихся кругов собственные значения образуют непрерывный спектр, а соотношение ортонормированности для поляризационных собственных функций имеет дельта-функционный вид. В этом случае сумму в формуле (7) следует заменить на соответствующий интеграл.

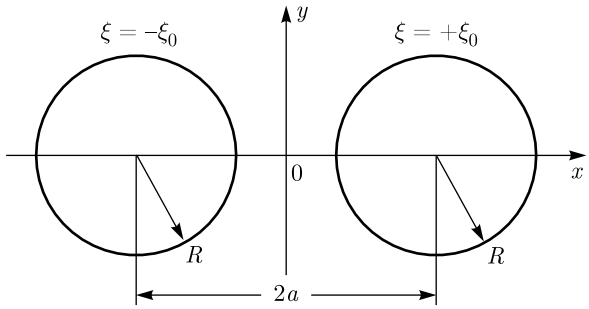

Рис. 2

3. КООРДИНАТНАЯ СИСТЕМА

Задачу определения собственных функций для «тела» в виде соприкасающихся кругов будем решать в биполярной системе координат, соответствующим образом преобразованной. Согласно [12] биполярные координаты (ξ, θ) связаны с декартовыми (x, y) с помощью соотношения

$$x + iy = c\,\mathrm{th}\,\frac{\xi + i\theta}{2}, \tag{15}$$

здесь $-\infty \leqslant \xi \leqslant +\infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Из (15) следует, что

$$\xi = \frac{1}{2}\,\ln\frac{(x+c)^2+y^2}{(x-c)^2+y^2}, \quad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{2cy}{c^2-x^2-y^2} \tag{16}$$

и

$$\theta = \pi - \mathrm{arctg}\,\frac{2cy}{r^2-c^2} \tag{17}$$

при $r = \sqrt{x^2+y^2} > c$. В ситуации, изображенной на рис. 2, имеем

$$c = \sqrt{a^2-R^2}, \quad \xi_0 = \ln\frac{a+\sqrt{a^2-R^2}}{R}. \tag{18}$$

При $a \to R \quad (c \to 0)$ из (16) и (17) следует

$$\xi \approx \frac{2cx}{x^2+y^2}, \quad \theta \approx \pi - \frac{2cy}{x^2+y^2} \tag{19}$$

и

$$\xi_0 \approx c/R. \tag{20}$$

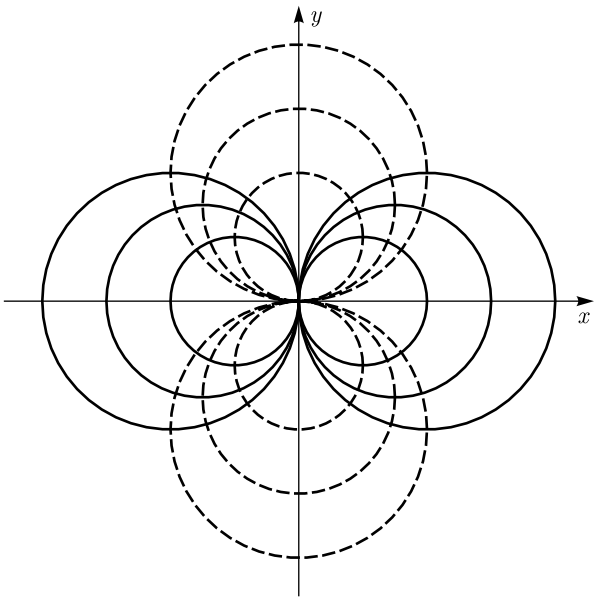

Рис. 3

(Здесь и далее символом $\approx$ обозначается асимптотическое выражение.)

Положим

$$\xi = \xi_0\,\eta, \quad \theta = \pi + \xi_0\,\beta, \tag{21}$$

тогда из (15) получаем

$$x + iy = c\ \mathrm{cth}\,\frac{\xi_0\,(\eta + i\beta)}{2}. \tag{22}$$

Отсюда в пределе $c \to 0$ находим

$$x + iy = \frac{2R}{\eta + i\beta}, \tag{23}$$

так что

$$x = 2R\,\frac{\eta}{\eta^2 + \beta^2}, \quad y = -\,2R\,\frac{\beta}{\eta^2 + \beta^2} \tag{24}$$

и, соответственно,

$$\eta = 2R\,\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \beta = -\,2R\,\frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{25}$$

Введенные в (23)–(25) величины η и β являются координатами вырожденной биполярной системы.

Координаты η и β изменяются в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. При этом $\eta \to 0$, $\beta \to 0$ при $r \to \infty$ и $\eta \to \to \pm\infty$, $\beta \to \pm\infty$ при $r \to 0$. Значениям $\eta > 0$ отвечает правая полуплоскость $x > 0$, а $\eta < 0$ — левая ($x < 0$). В то же время значению $\beta > 0$ соответствует нижняя полуплоскость ($y < 0$), а $\beta < 0$ — верхняя ($y > 0$).

Координатные линии вырожденной биполярной системы представляют собой два набора взаимно ортогональных окружностей, соприкасающихся в точке $x = 0$, $y = 0$ (см. рис. 3). Действительно, исключая из равенств (24) величину β при $\eta = \mathrm{const}$, получим уравнение

$$\left(x - \frac{R}{\eta}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{\eta}\right)^2. \tag{26}$$

Согласно (26) постоянным значениям $\eta = \pm\eta_0$ отвечает пара соприкасающихся окружностей радиуса R/η_0 с центрами в точках $\pm R/\eta_0$ на оси x. Аналогичным образом постоянным $\beta = \pm\beta_0$ отвечает пара соприкасающихся окружностей радиуса R/β_0 с центрами в точках $\pm R/\beta_0$ на оси y.

В вырожденной системе биполярных координат для градиента потенциала φ имеем следующее выражение:

$$\nabla\,\varphi = \frac{\mathbf{e}_\eta}{H_\eta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \frac{\mathbf{e}_\beta}{H_\beta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}, \tag{27}$$

где

$$H_\eta = H_\beta = H(\eta, \beta) = \frac{2a}{\eta^2 + \beta^2} \tag{28}$$

— коэффициент Ламе. В (27) $\mathbf{e}_\eta$ и $\mathbf{e}_\beta$ — орты нормалей к координатным линиям $\eta = \mathrm{const}$ и $\beta = \mathrm{const}$:

$$\mathbf{e}_\eta = -\,\mathbf{i}_x\,\frac{\eta^2 - \beta^2}{\eta^2 + \beta^2} + \mathbf{i}_y\,\frac{2\eta\beta}{\eta^2 + \beta^2}, \tag{29}$$

$$\mathbf{e}_\beta = -\,\mathbf{i}_x\,\frac{2\eta\beta}{\eta^2 + \beta^2} - \mathbf{i}_y\,\frac{\eta^2 - \beta^2}{\eta^2 + \beta^2}. \tag{30}$$

Здесь $\mathbf{i}_x$ и $\mathbf{i}_y$ — орты декартовых осей x и y соответственно. Отметим, что $\mathbf{e}_\eta$ является единичным вектором внутренней к границе правого круга нормали и внешней — к границе левого.

Уравнение Лапласа в координатах (η, β) принимает вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} = 0. \tag{31}$$

В данном случае при решении этого уравнения методом разделения переменных отсутствует, в отличие от работы [5], требование периодичности по одной из координат. Поэтому соответствующая константа разделения принимает произвольные значения, образуя непрерывный спектр.

Регулярные частные решения уравнения (31) для правого включения, конечные при $x \to +0$ ($\eta \to \to +\infty$), имеют следующий вид:

$$e^{-\nu\eta}\sin\nu\beta, \quad e^{-\nu\eta}\cos\nu\beta. \tag{32}$$

Здесь величина ν положительна и меняется в пределах от 0 до ∞. Для левого включения аналогичные решения отличаются от (32) заменой $e^{-\nu\eta}$ на $e^{\nu\eta}$.

Для исчезающих при $r \to \infty$ $(\eta \to 0,\ \beta \to 0)$ регулярных решений с мультипольной асимптотикой имеем соответственно

$$\begin{gathered} \operatorname{sh}\nu\eta\,\sin\nu\beta, \quad \operatorname{sh}\nu\eta\,\cos\nu\beta, \\ \operatorname{ch}\nu\eta\,\sin\nu\beta, \quad \operatorname{ch}\nu\eta\,\cos\nu\beta - 1 \end{gathered} \tag{33}$$

с тем же параметром ν.

Отметим, наконец, что решением уравнения (31) с монопольной (логарифмической) асимптотикой является функция

$$\ln(\eta^2 + \beta^2), \tag{34}$$

или $2\ln(2R/r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, в декартовых координатах.

4. СИСТЕМА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

С рассматриваемым включением в виде пары соприкасающихся кругов связаны четыре типа поляризационных собственных функций $\psi_{\lambda\nu}(\mathbf{r}) = \psi_{\lambda\nu}(\eta,\beta)$ $(\lambda = 1,2,3,4)$, которым отвечают двукратно вырожденные собственные значения $\varepsilon_{1\nu} = \varepsilon_{3\nu}$ и $\varepsilon_{2\nu} = \varepsilon_{4\nu}$.

Нормированные функции первого типа $\psi_{1\nu}(\mathbf{r})$ с собственными значениями

$$\varepsilon_{1\nu} = \operatorname{th}\nu \tag{35}$$

имеют вид

$$\psi_{1\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = A_\nu\ \operatorname{ch}\nu\eta\,\sin\nu\beta, \quad |\eta| \leqslant 1, \tag{36}$$

вне включения и

$$\psi_{1\nu}^{(1)}(\mathbf{r}) = A_\nu\ \operatorname{ch}\nu\, e^{-\nu\eta}\ \sin\nu\beta, \quad \eta \geqslant 1, \tag{37}$$

$$\psi_{1\nu}^{(2)}(\mathbf{r}) = A_\nu\ \operatorname{ch}\nu\, e^{\nu\eta}\ \sin\nu\beta, \quad \eta \leqslant -1, \tag{38}$$

внутри правого (1) и левого (2) кругов соответственно. Здесь

$$A_\nu = \sqrt{\frac{1-\varepsilon_{1\nu}}{2\pi\nu}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu}\,\frac{e^{-\nu}}{\operatorname{ch}\nu}}. \tag{39}$$

Функции $\psi_{1\nu}(\mathbf{r})$ симметричны по координате x и антисимметричны по y.

Функции второго типа $\psi_{2\nu}(\mathbf{r})$, которым отвечают собственные значения

$$\varepsilon_{2\nu} = \operatorname{cth}\nu, \tag{40}$$

антисимметричны по x и симметричны по y:

$$\psi_{2\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = B_\nu\ \operatorname{sh}\nu\eta\,\cos\nu\beta, \quad |\eta| \leqslant 1, \tag{41}$$

$$\psi_{2\nu}^{(1)}(\mathbf{r}) = B_\nu\ \operatorname{sh}\nu\, e^{-\nu(\eta-1)}\ \cos\nu\beta, \quad \eta \geqslant 1, \tag{42}$$

$$\psi_{2\nu}^{(2)}(\mathbf{r}) = -\,B_\nu\ \operatorname{sh}\nu\, e^{\nu(\eta+1)}\ \cos\nu\beta, \quad \eta \leqslant -1, \tag{43}$$

где

$$B_\nu = \sqrt{\frac{\varepsilon_{2\nu}-1}{2\pi\nu}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi\nu}\,\frac{e^{-\nu}}{\operatorname{sh}\nu}}. \tag{44}$$

Функции третьего типа $\psi_{3\nu}(\mathbf{r})$ с собственными значениями $\varepsilon_{3\nu} = \varepsilon_{1\nu} = \operatorname{th}\nu$ симметричны и по x, и по y:

$$\psi_{3\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = A_\nu\,(\operatorname{ch}\nu\eta\,\cos\nu\beta - 1), \quad |\eta| \leqslant 1, \tag{45}$$

$$\psi_{3\nu}^{(1)}(\mathbf{r}) = A_\nu\left[\operatorname{ch}\nu\, e^{-\nu(\eta-1)}\cos\nu\beta - 1\right], \quad \eta \geqslant 1, \tag{46}$$

$$\psi_{3\nu}^{(2)}(\mathbf{r}) = A_\nu\left[\operatorname{ch}\nu\, e^{\nu(\eta+1)}\cos\nu\beta - 1\right], \quad \eta \leqslant -1. \tag{47}$$

Нормировочный коэффициент A_ν определен в формуле (39).

Функции четвертого типа с собственными значениями $\varepsilon_{4\nu} = \varepsilon_{2\nu} = \operatorname{cth}\nu$ антисимметричны и по x, и по y:

$$\psi_{4\nu}^{(e)}(\mathbf{r}) = B_\nu\ \operatorname{sh}\nu\eta\,\sin\nu\beta, \quad |\eta| \leqslant 1, \tag{48}$$

$$\psi_{4\nu}^{(1)}(\mathbf{r}) = B_\nu\ \operatorname{sh}\nu\, e^{-\nu(\eta-1)}\sin\nu\beta, \quad \eta \geqslant 1, \tag{49}$$

$$\psi_{4\nu}^{(2)}(\mathbf{r}) = -\,B_\nu\ \operatorname{sh}\nu\, e^{\nu(\eta+1)}\sin\nu\beta, \quad \eta \leqslant -1. \tag{50}$$

Коэффициент B_ν определен в формуле (44).

Зарядовая собственная функция одна:

$$\bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) = \bar{A}\left\{2\,\ln\frac{L}{2a} + \ln\bigl(\eta^2+\beta^2\bigr) + \right. \\ \left. + 2\int\limits_0^\infty e^{-\nu}\,\frac{\operatorname{ch}\nu\eta\,\cos\nu\beta - 1}{\operatorname{ch}\nu}\,\frac{d\nu}{\nu}\right\}, \tag{51}$$

где

$$\bar{A} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left[\ln\frac{L}{2a} + I\right]^{-1/2}, \tag{52}$$

$$J = \int\limits_0^\infty e^{-\nu}\,\frac{\operatorname{ch}\nu - 1}{\operatorname{ch}\nu}\,\frac{d\nu}{\nu}. \tag{53}$$

Выражение (51) принимает постоянное значение при $\eta = \pm 1$, в чем можно убедиться, используя соотношение

$$\ln \frac{\eta^2 + \beta^2}{\eta^2} = 2 \int\limits_0^\infty e^{-\nu|\eta|} \, (1 - \cos \nu\beta \,) \, \frac{d\nu}{\nu} \tag{54}$$

при $\eta = \pm 1$. Функция $\bar{\psi}(\mathbf{r})$ обращается в нуль при $r = L$, где $L \gg R$. Действительно, в случае больших r имеем

$$r \gg R: \quad \bar{\psi}^{(e)}(\mathbf{r}) \approx 2\,\bar{q}\,\ln \frac{L}{r}. \tag{55}$$

Здесь

$$\bar{q} = \bar{A} \tag{56}$$

— полный заряд рассматриваемого включения.

5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Как отмечено в работах [6, 7], собственные функции образуют полную систему на поверхности S соответствующего тела. Для формулировки соотношения полноты наряду с поверхностным значением функций (аналогами потенциалов)

$$\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho}) = \psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}, \quad \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho}) = \bar{\psi}_k^{(e)}(\mathbf{r})\Big|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}} \tag{57}$$

необходимо ввести сопряженные с ними величины

$$\begin{aligned} \Phi_\nu(\boldsymbol{\rho}) &= \big(\mathbf{n}\,\nabla\psi_\nu^{(e)}(\mathbf{r})\big)\Big|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}, \\ \bar{\Phi}_k(\boldsymbol{\rho}) &= \big(\mathbf{n}\,\nabla\bar{\psi}_k^{(e)}(\mathbf{r})\big)\Big|_{\mathbf{r}=\boldsymbol{\rho}}, \end{aligned} \tag{58}$$

имеющие смысл плотности поверхностного заряда. В формуле (58) $\mathbf{n}$ — орт внешней к поверхности тела нормали.

Введение системы поверхностных функций позволяет, прежде всего, упростить соотношения ортонормированности:

$$\int\limits_S \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\,\Phi_{\nu'}(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho} = -\,\frac{\varepsilon_\nu}{1+\varepsilon_\nu}\,\delta_{\nu\nu'}, \tag{59}$$

$$\int\limits_S \Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\,\bar{\Phi}_k(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho} = 0, \tag{60}$$

$$\int\limits_S \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho})\,\Phi_\nu(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho} = 0, \tag{61}$$

$$\int\limits_S \bar{\Psi}_k(\boldsymbol{\rho})\,\bar{\Phi}_{k'}(\boldsymbol{\rho})\,d\boldsymbol{\rho} = -\,\delta_{kk'}. \tag{62}$$

Здесь $d\boldsymbol{\rho} = dS$ — элемент площади, а интегрирование в (59)–(62) проводится по всей поверхности S тела.

Соотношение полноты для системы поверхностных функций имеет вид

$$\sum_\nu \frac{1+\varepsilon_\nu}{\varepsilon_\nu}\,\Psi_\nu(\boldsymbol{\rho})\,\Phi_\nu(\boldsymbol{\rho}') + \sum_k \bar{\Phi}_k(\boldsymbol{\rho})\,\bar{\Phi}_k(\boldsymbol{\rho}') = \\ = -\delta(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'). \tag{63}$$

Отметим, что в случае непрерывного спектра собственных значений ε_ν в правой части равенства (59) символ Кронекера $\delta_{\nu\nu'}$ заменяется на дельта-функцию $\delta(\nu - \nu')$, а сумма по ν в соотношении (63) — на соответствующий интеграл.

2. Для рассматриваемого в работе включения поляризационные поверхностные функции выражаются через $\psi_{\lambda\nu}^{(e)}(\eta, \delta)$ следующим образом:

$$\Psi_{\lambda\nu}^{(1)}(\beta) = \psi_{\lambda\nu}^{(e)}(+1, \beta), \quad \Psi_{\lambda\nu}^{(2)}(\beta) = \psi_{\lambda\nu}^{(e)}(-1, \beta), \tag{64}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda\nu}^{(1)}(\beta) &= -\frac{1}{H_0}\,\frac{\partial\psi_{\lambda\nu}^{(e)}}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=+1}, \\ \Phi_{\lambda\nu}^{(2)}(\beta) &= \frac{1}{H_0}\,\frac{\partial\psi_{\lambda\nu}^{(e)}}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=-1}, \end{aligned} \tag{65}$$

где $H_0 = H(1, \beta)$ — коэффициент Ламе. Выбор знаков в (65) обусловлен тем, что единичный вектор $\mathbf{e}_\eta$ является ортом внутренней нормали для правой окружности и внешней для левой. Зарядовые поверхностные функции $\bar{\Psi}^{(1)}(\beta)$, $\bar{\Psi}^{(2)}(\beta)$, $\bar{\Phi}^{(1)}(\beta)$ и $\bar{\Phi}^{(2)}(\beta)$ выражаются через $\bar{\psi}^{(e)}(\eta, \beta)$ аналогичным образом.

Используя приведенные в предыдущем разделе выражения для функций $\psi_{\lambda\nu}^{(e)}(\eta, \beta)$ и $\bar{\psi}^{(e)}(\eta, \beta)$, найдем

$$\Psi_{1\nu}^{(1)}(\beta) = \Psi_{1\nu}^{(2)}(\beta) = A_\nu \operatorname{ch}\nu \sin\nu\beta, \tag{66}$$

$$\Psi_{2\nu}^{(1)}(\beta) = -\,\Psi_{2\nu}^{(2)}(\beta) = B_\nu \operatorname{sh}\nu \cos\nu\beta, \tag{67}$$

$$\Psi_{3\nu}^{(1)}(\beta) = \Psi_{3\nu}^{(2)}(\beta) = A_\nu \big(\operatorname{ch}\nu \cos\nu\beta - 1\big), \tag{68}$$

$$\Psi_{4\nu}^{(1)}(\beta) = -\Psi_{4\nu}^{(2)}(\beta) = B_\nu \operatorname{sh}\nu \sin\nu\beta\,; \tag{69}$$

$$\Phi_{1\nu}^{(1)}(\beta) = \Phi_{1\nu}^{(2)}(\beta) = -\frac{\nu\,A_\nu}{H(1,\beta)} \operatorname{sh}\nu \sin\nu\beta, \tag{70}$$

$$\Phi^{(1)}_{2\nu}(\beta) = -\Phi^{(2)}_{2\nu}(\beta) = -\frac{\nu\, B_\nu}{H(1,\beta)}\,\mathrm{ch}\,\nu\cos\nu\beta, \qquad (71)$$

$$\Phi^{(1)}_{3\nu}(\beta) = \Phi^{(2)}_{3\nu}(\beta) = -\frac{\nu\, A_\nu}{H(1,\beta)}\,\mathrm{sh}\,\nu\cos\nu\beta, \qquad (72)$$

$$\Phi^{(1)}_{4\nu}(\beta) = -\Phi^{(2)}_{4\nu}(\beta) = -\frac{\nu\, B_\nu}{H(1,\beta)}\,\mathrm{ch}\,\nu\sin\nu\beta. \qquad (73)$$

Зарядовые функции равны

$$\bar{\Psi} = 2\,\bar{A}\left[\ln\frac{R}{2a} + I\right], \qquad (74)$$

$$\bar{\Phi}(\beta) = -\,\frac{\bar{A}}{H(1,\beta)}\,\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi\beta}{2}} \qquad (75)$$

с коэффициентом $\bar{A}$ из формулы (52) и величиной J из (53). При выводе выражения (75) использовано равенство

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos bx}{\mathrm{ch}\,ax}\,dx = \frac{\pi}{2a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{\pi b}{2a}}. \qquad (76)$$

Найденная система поверхностных функций (66)–(75) ортонормирована по соотношениям

$$\sum_{\sigma=1}^{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi^{(\sigma)}_{\lambda\nu}(\beta)\,\Phi^{(\sigma)}_{\lambda'\nu'}(\beta)\,H(1,\beta)\,d\beta = -\frac{\varepsilon_{\lambda\nu}}{1+\varepsilon_{\lambda\nu}}\,\delta_{\lambda\lambda'}\,\delta(\nu-\nu'), \qquad (77)$$

$$\sum_{\sigma=1}^{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{\Psi}^{(\sigma)}\,\Phi^{(\sigma)}_{\lambda\nu}(\beta)\,H(1,\beta)\,d\beta = 0, \qquad (78)$$

$$\sum_{\sigma=1}^{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Psi^{(\sigma)}_{\lambda\nu}(\beta)\,\bar{\Phi}^{(\sigma)}(\beta)\,H(1,\beta)\,d\beta = 0, \qquad (79)$$

$$\sum_{\sigma=1}^{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\bar{\Psi}^{(\sigma)}\,\bar{\Phi}^{(\sigma)}(\beta)\,H(1,\beta)\,d\beta = -\,1. \qquad (80)$$

Из равенств (77) и (80) определялись нормировочные коэффициенты A_ν, B_ν и $\bar{A}$, приведенные в предыдущем разделе.

Соотношение полноты в данном случае принимает вид

$$\sum_{\lambda=1}^{4}\int\limits_0^\infty \frac{1+\varepsilon_{\lambda\nu}}{\varepsilon_{\lambda\nu}}\,\Psi^{(\sigma)}_{\lambda\nu}(\beta)\,\Phi^{(\sigma')}_{\lambda\nu}(\beta')\,d\nu + \bar{\Psi}^{(\sigma)}(\beta)\,\bar{\Phi}^{(\sigma')}(\beta') = -\,\delta_{\sigma\sigma'}\,\frac{\delta(\beta-\beta')}{H(1,\beta)}. \qquad (81)$$

Нетрудно убедиться, что подстановка выражений (66)–(75) обращает это равенство в тождество.

6. ПОТЕНЦИАЛ

1. Искомый потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ рассматриваемой задачи находим подстановкой общего выражения для функций Грина $G(\rho,\mathbf{r})$, имеющей в данном случае вид

$$G(\rho,\mathbf{r}) = -\sum_{\lambda=1}^{4}\int\limits_0^\infty d\nu\,\frac{1+\varepsilon_{\lambda\nu}}{h+\varepsilon_{\lambda\nu}}\,\Psi_{\lambda\nu}(\boldsymbol{\rho})\,\psi_{\lambda\nu}(\mathbf{r}) - \bar{\Psi}(\boldsymbol{\rho})\,\bar{\psi}(\mathbf{r}), \qquad (82)$$

в формулу (6). В результате получаем

$$\varphi(\mathbf{r}) = -2\frac{I}{\sigma_1}\int\limits_0^\infty d\nu\,\frac{1+\varepsilon_{2\nu}}{h+\varepsilon_{2\nu}}\,\Psi_{2\nu}(\boldsymbol{\rho}_1)\,\psi_{2\nu}(\mathbf{r}). \qquad (83)$$

Здесь вектор $\mathbf{r}$ — любой, а вектор $\boldsymbol{\rho}_1$ равен $(2R,0)$ в декартовых координатах и $(1,0)$ в вырожденных биполярных.

Для потенциалов вне включений ($|\eta|\leqslant 1$) и внутри правого круга ($\eta\geqslant 1$) имеем соответственно

$$\varphi^{(e)}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{\pi\sigma_1}\int\limits_0^\infty\frac{d\nu}{\nu}\,\frac{1}{h+\mathrm{cth}\,\nu}\,\frac{\mathrm{sh}\,\nu\eta}{\mathrm{sh}\,\nu}\,\cos\nu\beta, \qquad (84)$$

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{\pi\sigma_1}\int\limits_0^\infty\frac{d\nu}{\nu}\,\frac{e^{-\,\nu(\eta-1)}}{h+\mathrm{cth}\,\nu}\,\cos\nu\beta. \qquad (85)$$

Как следует из формул (84), (85), потенциал непрерывен на границе ($\eta=+1$) правого круга. Кроме того, выполняется граничное условие

$$\left.\frac{\partial\varphi^{(e)}}{\partial\eta}\right|_{\eta=+\,1} - h\,\left.\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\eta}\right|_{\eta=+\,1} = -\frac{I}{\sigma_1}\,\delta(\beta), \qquad (86)$$

следующее из уравнения (4).

2. Используя формулу (84), для плотности тока на оси y (при $\eta = 0$) имеем

$$j(0,y) = -\sigma_1 \left[\frac{1}{H(\eta,\beta)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \eta} \right]_{\eta=0}. \qquad (87)$$

С учетом $H(0,\beta) = 2R/\beta^2$ из (87) получим выражение

$$j(0,y) = \frac{I}{2\pi R}\, \beta^2 \int\limits_0^\infty d\nu\, \frac{\operatorname{cth}\nu}{h + \operatorname{cth}\nu} \cos\nu\beta. \qquad (88)$$

При $h \gg 1$ в интеграле из (88) существенны $\nu \ll \ll 1$:

$$j(0,y) = \frac{I}{2\pi R}\, \beta^2 \int\limits_0^\infty d\nu\, \frac{\cos\nu\beta}{1 + h\nu}. \qquad (89)$$

Представим это выражение в следующем виде:

$$j(0,y) = \langle j \rangle\, \frac{h}{\pi}\, g(\gamma), \quad \langle j \rangle = \frac{I}{2R}, \qquad (90)$$

где

$$j(\gamma) = \gamma^2 \int\limits_0^\infty \frac{\cos\gamma t}{1+t}\, dt, \quad \gamma = \frac{2R}{hy}. \qquad (91)$$

Здесь $\langle j \rangle$ — средняя плотность тока и учтено, что при $\eta = 0$ величина $\beta = -2R/y$.

Для упрощения анализа выражения (91) преобразуем величину $g(\gamma)$ следующим образом. Введем функцию

$$F(\gamma) = \gamma^2 \int\limits_0^\infty \frac{\cos\gamma t}{1+t}\, e^{-x(1+t)}\, dt, \qquad (92)$$

так что

$$F(0) = g(\gamma), \quad F(\infty) = 0. \qquad (93)$$

Для производной $F'(x)$ соответствующий интеграл может быть вычислен в явном виде:

$$F'(x) = -\gamma^2 e^{-x}\, \frac{x}{x^2 + \gamma^2}, \qquad (94)$$

откуда с учетом определений (93) находим

$$g(\gamma) = \gamma^2 \int\limits_0^\infty e^{-x}\, \frac{x dx}{x^2 + \gamma^2}. \qquad (95)$$

Отсюда при больших значениях параметра γ получаем

$$\gamma \gg 1: \quad g(\gamma) \approx 1 - \frac{6}{x^2} + \ldots \qquad (96)$$

При малых значениях γ проведем в выражении (95) интегрирование по частям. В результате получим

$$g(\gamma) = \gamma^2 \left\{ \ln\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty e^{-x}\, \ln(x^2 + \gamma^2)\, dx \right\}, \qquad (97)$$

откуда следует

$$\gamma \ll 1: \quad g(\gamma) \simeq \ln\frac{1}{\gamma} - \mathbb{C}, \qquad (98)$$

где

$$\mathbb{C} = -\int\limits_0^\infty e^{-x}\, \ln x\, dx = 0.577\ldots \qquad (99)$$

— постоянная Эйлера.

Согласно (96)–(98) при рассматриваемых значениях $h \gg 1$ плотность тока имеет острый пик высотой $j(0,0) = \langle j \rangle\, \dot{h}/\pi \gg \langle j \rangle$ (в точке контакта включений) шириной приблизительно $R/h \ll R$.

Этот результат подтверждает справедливость обсуждавшейся в разд. 2 картины протекания тока в модели с фазовым переходом типа металл–идеальный проводник. При этом в пределе $h \to \infty$ плотность тока $j \approx h \to \infty$ при $y = 0$ и $j = 0$ при $y \neq 0$. Следовательно, величина j в этом пределе принимает дельта-функционный вид: $j(0,y) = \mathrm{const} \cdot \delta(y)$. Определяя обычным образом эту константу, получим, что

$$j(0,y) = I\, \delta(y) \qquad (100)$$

в пределе $h \to \infty$. Последний результат означает, что использованное в работе бинарное приближение в пределе $h \to \infty$ становится точным.

7. ЭФФЕКТИВНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Так как эффективная проводимость σ_e модели в целом совпадает с проводимостью отдельной ячейки, то

$$\sigma_e = \frac{I}{U}. \qquad (101)$$

Здесь I — полный ток, текущий через ячейку, U — приложенная к ней разность потенциалов и учтено, что $a \approx R$. В соответствии с рис. 2 величина U выражается через потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ следующим образом:

$$U = \varphi^{(2)}(\mathbf{r}_2) - \varphi^{(1)}(\mathbf{r}_1) = -2\, \varphi^{(1)}(\mathbf{r}_1) \qquad (102)$$

с $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$ из формулы (85) при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = (R, 0)$. Точке $x = R$, $y = 0$ соответствуют вырожденные биполярные координаты $(\eta_1, 0)$, где, как следует из определений (25), $\eta_1 = 2$.

Вычисляя с помощью выражения (85) для $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$ разность потенциалов U, найдем величину σ_e, которую представим в виде

$$\frac{1}{\sigma_e} = \frac{2}{\pi\sigma_1} \int\limits_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{e^{-\nu}}{h + \operatorname{cth}\nu}. \tag{103}$$

Выражением (103) для σ_e, справедливым при $h = \sigma_2/\sigma_1 \gg 1$, дается эффективная проводимость исследуемой модели с фазовым переходом металл–идеальный проводник при критической концентрации — пороге протекания.

Величину σ_e как функцию ее аргументов запишем в виде

$$\sigma_e = \sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2), \tag{104}$$

где p — безразмерная концентрация (доля занимаемой площади) первой компоненты матрицы, σ_1 и σ_2 — проводимости матрицы и включений соответственно. Отметим, что в выражении (103) концентрация p равна критической $p_c = 1 - \pi/4$. Эффективная проводимость альтернативной модели с фазовым переходом типа металл–диэлектрик может быть найдена из полученных выше результатов с помощью так называемого соотношения взаимности Келлера – Дыхне [8,9]. Как отмечено в этих работах (см. также книгу [4]), в двумерном случае имеет место соотношение, связывающее эффективные проводимости взаимных, отличающихся друг от друга заменой $\sigma_1 \rightleftarrows \sigma_2$, систем:

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2)\, \sigma_e(p; \sigma_2, \sigma_1) = \sigma_1\sigma_2. \tag{105}$$

Введя безразмерную эффективную проводимость f согласно

$$\sigma_e(p; \sigma_1, \sigma_2) = \sigma_1\, f(p, h), \quad h = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \tag{106}$$

приведем равенство (105) к следующему виду:

$$f(p, h)\, f(p, 1/h) = 1. \tag{107}$$

Из этого соотношения, используя выражение (103), после замены $h \to 1/h$ находим безразмерную эффективную проводимость модели с фазовым переходом типа металл–диэлектрик при критической концентрации:

$$f(p_c, h) = \frac{2}{\pi}\, h \int\limits_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{\operatorname{th}\nu}{h + \operatorname{th}\nu}\, e^{-\nu}. \tag{108}$$

Выражение (108) справедливо при $h \ll 1$.

Для оценки $f(p_c, h)$ при малых h разобьем интеграл из (108) на две части, введя величину ν_0 такую, что $h \leqslant \nu_0 \leqslant 1$:

$$f(p_c, h) = \frac{2}{\pi}\, h \left\{ \int\limits_0^{\nu_0} \frac{d\nu}{\nu} \frac{\operatorname{th}\nu}{h + \operatorname{th}\nu}\, e^{-\nu} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{\nu_0}^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{\operatorname{th}\nu}{h + \operatorname{th}\nu}\, e^{-\nu} \right\}. \tag{109}$$

Для первого интеграла имеем

$$\int\limits_0^{\nu_0} \frac{d\nu}{\nu} \frac{\operatorname{th}\nu}{h + \operatorname{th}\nu}\, e^{-\nu} \simeq \int\limits_0^{\nu_0} \frac{d\nu}{h + \nu} \simeq \ln\frac{\nu_0}{h}. \tag{110}$$

Для второго интеграла получаем

$$\int\limits_{\nu_0}^\infty \frac{d\nu}{\nu} \frac{\operatorname{th}\nu}{h + \operatorname{th}\nu}\, e^{-\nu} \simeq \int\limits_{\nu_0}^\infty e^{-\nu}\, \frac{d\nu}{\nu}. \tag{111}$$

Отсюда, интегрируя по частям, находим

$$\int\limits_{\nu_0}^\infty e^{-\nu}\, \frac{d\nu}{\nu} = e^{-\nu}\, \ln\nu \Big|_{\nu_0}^\infty +$$
$$+ \int\limits_{\nu_0}^\infty e^{-\nu}\, \ln\nu\, d\nu \simeq -\ln\nu_0 - \mathbb{C}, \tag{112}$$

где $\mathbb{C}$ — постоянная Эйлера, определенная согласно (99). В результате получаем окончательно

$$f(p_c, h) = \frac{2}{\pi}\, h \left(\ln\frac{1}{h} - \mathbb{C} \right). \tag{113}$$

В соответствии со сказанным в предыдущем разделе, следует ожидать, что в пределе $h \to 0$ выражение (113) является точным.

В рамках гипотезы подобия [10, 11] величина $f(p_c, h)$ описывается степенно́й функцией:

$$f(p_c, h) \sim h^s, \tag{114}$$

где s — второй критический индекс проводимости. В выражении (114) пренебрегается возможной логарифмической зависимостью. Поэтому следует считать, что в (113) $s = 1$. Отметим, что численные исследования проводимости двумерной модели Рэлея [3] дает оценку $s \approx 0.95$.

Благодарности. Автор выражает благодарность Д. А. Головневой и Н. А. Хлопотуновой за помощь в подготовке рукописи статьи к печати.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Знание системы собственных функций для некоторого макроскопического тела дает возможность определить его дипольную поляризуемость.

В случае тела, помещенного в однородное электрическое поле напряженности $\mathbf{E}_0$, соответствующий потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ имеет следующую асимптотику (двумерный случай):

$$r \to \infty: \quad \varphi(\mathbf{r}) \approx -\big(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r}\big) + 2\,\frac{\big(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\big)}{r^2} + \ldots \qquad (A.1)$$

Здесь

$$\mathbf{p} = \hat{\Lambda}\,\mathbf{E}_0 \qquad (A.2)$$

— дипольный момент тела, $\hat{\Lambda}$ — его тензор дипольной поляризуемости. Для составляющих этого тензора согласно [6, 7] имеем

$$\Lambda_{\alpha\beta} = -4\pi(1-\varepsilon)\sum_{\nu}\frac{d_{\nu\alpha}\,d_{\nu\beta}}{\varepsilon+\varepsilon_\nu}, \qquad (A.3)$$

где $\mathbf{d}_\nu$ — аналог дипольного момента в асимптотике поляризационной собственной функции:

$$r \to \infty: \quad \psi_\nu(\mathbf{r}) \approx 2\,\frac{\big(\mathbf{r}\cdot\mathbf{d}_\nu\big)}{r^2} + \ldots \qquad (A.4)$$

В формуле (A.3) ε — диэлектрическая проницаемость тела. В случае непрерывного спектра собственных значений ε_ν в (A.3) вместо суммы должен стоять интеграл.

Для пары соприкасающихся кругов дипольным поведением при $r \to \infty$ обладают функции $\psi^{(e)}_{2\nu}(\mathbf{r})$ и $\psi^{(e)}_{1\nu}(\mathbf{r})$. Для соответствующих дипольных моментов имеем

$$\mathbf{d}_{2\nu} = \nu\,B_\nu\,R\dot{\mathbf{i}}_x, \quad \mathbf{d}_{1\nu} = \nu\,A_\nu\,R\dot{\mathbf{i}}_y. \qquad (A.5)$$

Для составляющих тензора дипольной поляризуемости $\hat{\Lambda}$ получаем

$$\Lambda_{xx} = -\,2R^2\int\limits_0^\infty \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon+\operatorname{cth}\nu}\,\frac{e^{-\,\nu}}{\operatorname{sh}\nu}\,\nu\,d\nu, \qquad (A.6)$$

$$\Lambda_{yy} = -\,2R^2\int\limits_0^\infty \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon+\operatorname{th}\nu}\,\frac{e^{-\,\nu}}{\operatorname{ch}\nu}\,\nu\,d\nu. \qquad (A.7)$$

Отметим, что выражения (A.6), (A.7) удовлетворяют равенствам

$$\Lambda_{xx}(\varepsilon) = -\,\Lambda_{yy}(1/\varepsilon), \quad \Lambda_{yy}(\varepsilon) = -\,\Lambda_{xx}(1/\varepsilon), \qquad (A.8)$$

являющихся следствием соотношения взаимности (см. [4]).

В двух частных случаях, используя формулы

$$\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad (A.9)$$

получим

$$\Lambda_{xx} = -\,\frac{\pi^2R^2}{12}, \quad \Lambda_{yy} = -\,\frac{\pi^2R^2}{6} \qquad (A.10)$$

при $\varepsilon = 0$ и

$$\Lambda_{xx} = \frac{\pi^2R^2}{6}, \quad \Lambda_{yy} = \frac{\pi^2R^2}{12} \qquad (A.11)$$

при $\varepsilon = \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lord Rayleigh, Phil. Mag. S. **34**, № 211, 481 (1892).
2. W. T. Perrins, D. B. McKenzie, and B. C. McPhedran, Proc. Roy. Soc. Lond. A **369**, 207 (1979).
3. Б. Я. Балагуров, В. А. Кашин, ЖЭТФ **117**, 978 (2000).
4. Б. Я. Балагуров, *Электрофизические свойства композитов. Макроскопическая теория*, URSS, Москва (2015).
5. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **157**, 669 (2020).
6. Б. Я. Балагуров, ЖЭТФ **94**, 95 (1988).
7. Б. Я. Балагуров, *Метод собственных функций в макроскопической электростатике*, URSS, Москва (2016).
8. J. B. Keller, J. Math. Phys. **5**, 548 (1964).
9. А. М. Дыхне, ЖЭТФ **59**, 110 (1970).
10. A. L. Efros and B. I. Shrlovskii, Phys. Stat. Sol. (b) **76**, 475 (1976).
11. J. P. Straley, J. Phys. C **9**, 783 (1976).
12. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. II, Изд-во иностр. лит., Москва (1960).