

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МОДЕЛИ ДИКЕ В СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОЙ ДИПОЛЬНОЙ ФАЗЕ В СОСТОЯНИИ «СВЯЗАННОГО СИЯНИЯ»

С. И. Мухин^{*}, А. Мукерджи, С. С. Сеидов

Кафедра теоретической физики и квантовых технологий,
Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»
119049, Москва, Россия

Поступила в редакцию 20 ноября 2020 г.,
после переработки 6 декабря 2020 г.
Принята к публикации 6 декабря 2020 г.

Найдено аналитическое решение квазиклассических уравнений движения модели Дике в сверхизлучательном состоянии. Зависимости от времени колебаний амплитуд сверхизлучательного фотонного конденсата и когерентной заселенности массива двухуровневых атомов в микроволновой полости выражены через эллиптические функции Якоби и свидетельствуют о существовании адиабатического инварианта в системе с сильной связью. Периодические биения амплитуд фотонного и когерентного атомного состояний сдвинуты во времени, представляя собой эффект «связанного сияния», когда энергия, заключенная в двухуровневых системах, во время «темноты» внезапно переходит в энергию фотонного конденсата, «освещающего» полость на время полупериода колебаний перед тем, как она вновь погрузится в «темноту».

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 90-летию И. Е. Дзялошинского

DOI: 10.31857/S0044451021040192

1. ВВЕДЕНИЕ

Предсказанный ранее сверхизлучательный фазовый переход в модели Дике [1] цепочки из $N \gg 1$ двухуровневых систем (ДУС), связанных с одной бозонной модой в резонансной полости [2, 3], был представлен как [4] самосогласованный поворот на конечный угол операторов псевдоспина в представлении Гольштейна – Примакова [5, 6], описывающих когерентные состояния ДУС. Мы рассматриваем гамильтониан модели Дике [1] в виде

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) + g \hat{p} \hat{S}^y - E_J \hat{S}^z, \quad (1)$$

где введены операторы $\hat{S}^\alpha = \sum_i \hat{s}_i^\alpha$ суммарных компонент псевдоспина, описывающих ДУС. Для определенности можно рассмотреть систему из N сверхпроводящих островков, каждый из которых разделен пополам джозефсоновским контактом, в пред-

ставлении куперовского ящика [7]. Цепочка помещена в резонансную полость с частотой ω — частотой единственной фотонной моды. Вторично квантованные операторы фотонной моды есть

$$\hat{p} = i \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad \hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2 \omega}} (\hat{a}^\dagger + \hat{a}), \quad (2)$$

где $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Полный квадрат псевдоспина $\hat{S}^2$ сохраняется, так как он коммутирует с (1): $[\hat{S}^2, H] = 0$. Туннелирование куперовских пар представлено членом $-E_J \hat{S}^z$. Член $g \hat{p} \hat{S}^y$ описывает дипольную связь между куперовскими парами и фотонным полем с константой связи g . В работе [2] показано, что квантовый фазовый переход переводит систему (1) в дважды вырожденное дипольно-упорядоченное состояние. В данной работе мы приводим аналитическое решение, описывающее динамику джозефсоновских контактов в микроволновой полости и демонстрирующее существование метастабильного состояния «связанного сияния» с когерентными периодическими биениями диполей, которое связано с дважды вырожденной дипольно-упорядоченной фазой, найденной ранее. Первые два члена в (1) соответству-

^{*} E-mail: i.m.sergei.m@gmail.com

ют энергии гармонического осциллятора фотонной моды. Расщепление уровней ДУС представлено членом $-E_J \hat{S}^z$, а член $g\hat{p}\hat{S}^y$ описывает дипольную энергию связи фотонов с ДУС. В работе [4] было показано, что самосогласованный поворот представления Гольштейна – Примакова операторов $\hat{S}_{x,y,z}$ позволяет достаточно прозрачно описать квантовый фазовый переход второго рода в модели Дике (1). А именно, когда константа связи g становится больше критического значения g_c , суперспин $S = N/2$ постепенно поворачивается от оси z к оси y на угол $|\theta| \leq \pi/2$, где верхний предел соответствует максимуму дипольного момента $\langle \hat{S}_y \rangle \propto S \sin \theta$ ДУС. Одновременно с этим фотонный оператор $\hat{p}$ приобретает внедиагональное среднее значение $\langle \hat{p} \rangle \propto -gS \sin \theta$, говорящее о возникновении макроскопического когерентного («сверхизлучательно») фотонного конденсата, связанного с дипольным моментом ДУС с энергией $\propto g\langle \hat{S}_y \rangle \langle \hat{p} \rangle$. Очевидно, что одновременная смена знаков: $\langle \hat{S}_y \rangle, \langle \hat{p} \rangle \rightarrow -\langle \hat{S}_y \rangle, -\langle \hat{p} \rangle$, приводит систему в новое состояние с той же самой энергией спин-фотонной связи, тем самым свидетельствуя о существовании дважды вырожденного основного состояния. Нами найдено аналитическое решение уравнений движения, описывающих «медленное» блуждание системы между двумя вырожденными основными состояниями: хранящаяся в ДУС энергия $\propto \langle \hat{S}_z \rangle$ периодически закачивается в фотонный конденсат, в то время как амплитуда суммарного дипольного момента ДУС $\propto \langle \hat{S}_y \rangle$ и амплитуда сверхизлучательного конденсата $\propto \langle \hat{p} \rangle$ меняют знак на противоположный, как функции времени. Найдены два первых интеграла для медленного движения когерентных амплитуд в квазиклассическом пределе.

Квазиклассические уравнения движения средних значений импульса фотона и декартовых проекций суммарного псевдоспина в основном состоянии могут быть получены согласно [8], начиная с уравнений Гейзенберга, в виде

$$\ddot{\hat{A}} = -\frac{1}{\hbar^2} [\hat{H}, [\hat{H}, \hat{A}]], \quad (3)$$

где $\hat{A} = \hat{p}, \hat{S}_\alpha$ и $\alpha = x, y, z$. Далее, используем гамильтониан модели Дике (1), уравнение (3) и коммутационные отношения между компонентами спина, координатой и импульсом гармонического осциллятора. Получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\hat{S}}_z = -g^2 \hat{p}^2 \hat{S}_z - gE_J \hat{p} \hat{S}_y, \quad (4)$$

$$\ddot{\hat{S}}_y = -E_J^2 \hat{S}_y - gE_J \hat{p} \hat{S}_z, \quad (5)$$

$$\ddot{\hat{S}}_x = -E_J^2 \hat{S}_x - g^2 \hat{p}^2 \hat{S}_x, \quad (6)$$

$$\ddot{\hat{p}} = -\omega^2 \left\{ \hat{p} + g\hat{S}_y \right\}. \quad (7)$$

Для перехода от операторов к их средним значениям в основном состоянии необходимо сделать следующее. Сначала введем амплитуду сверхизлучательного фотонного конденсата λ_R [2] как сдвиг бозонных операторов в (2):

$$\hat{a}^\dagger = \hat{c}^\dagger - i\lambda_R, \quad \hat{a} = \hat{c} + i\lambda_R, \quad (8)$$

$$\hat{p} = \sqrt{2\hbar\omega}\lambda_R + i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{c}^\dagger - \hat{c}), \quad (9)$$

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{c}^\dagger + \hat{c}).$$

Как показано в [4], одновременно с появлением конденсата λ_R происходит поворот псевдоспина на угол θ вокруг оси x . Далее мы совершаем поворот полного спина на угол θ вокруг оси x и на угол $\phi - \pi/2$ вокруг оси z , где θ, ϕ зависят от времени:

$$\begin{aligned} \hat{S}^z &= \hat{J}^z \cos \theta - \hat{J}^y \sin \theta, \\ \hat{S}^y &= \hat{J}^z \sin \theta \sin \phi + \hat{J}^y \cos \theta \sin \phi - \hat{J}^x \cos \phi, \\ \hat{S}^x &= \hat{J}^z \sin \theta \cos \phi + \hat{J}^y \cos \theta \cos \phi + \hat{J}^x \sin \phi, \end{aligned} \quad (10)$$

операторы декартовых проекций суммарного спина $\hat{J}^{x,y,z}$ определены через представление Гольштейна – Примакова:

$$\begin{aligned} \hat{J}^z &= S - \hat{b}^\dagger \hat{b}, \\ \hat{J}^y &= i\sqrt{\frac{S}{2}} \left(\hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2S}} - \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2S}} \hat{b} \right) \simeq \\ &\simeq i\sqrt{\frac{S}{2}} (\hat{b}^\dagger - \hat{b}), \\ \hat{J}^x &= \sqrt{\frac{S}{2}} \left(\hat{b}^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2S}} + \sqrt{1 - \frac{\hat{b}^\dagger \hat{b}}{2S}} \hat{b} \right) \simeq \\ &\simeq \sqrt{\frac{S}{2}} (\hat{b}^\dagger + \hat{b}), \end{aligned} \quad (11)$$

и $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$.

Поворот объясняется просто: в основном состоянии с малой константой связи g угол поворота $\theta = 0$ и оператор $\hat{S}_z = \hat{J}^z$ в гамильтониане Дике (1) почти диагонален, следовательно, диагональные элементы $\langle \hat{S}^y \rangle = \langle \hat{J}^y \rangle$ стремятся к нулю. Поэтому «дипольный

момент», пропорциональный $\langle \hat{S}^y \rangle$, равен нулю и фотоны квазиклассически расщепляются со спинами. С другой стороны, когда угол поворота θ ненулевой, возникает конечный «дипольный момент» спиновой подсистемы, пропорциональный $\langle \hat{S}^y \rangle = \langle \hat{J}^z \rangle \sin \theta$, который связан с когерентным фотонным конденсатом $\langle \hat{p} \rangle = \lambda_R$. Последнее приводит к неустойчивости основного состояния системы. Мы заменяем операторы в (4)–(7) их средними по основному состоянию в представлении Гейзенберга: $\hat{A} \rightarrow \langle \hat{A} \rangle$, используя соотношения (9)–(11). Далее рассматриваем резонансный случай: $\hbar\omega = E_J$.

В отличие от [2] сдвиг бозонных операторов в (11) не проводился, так как его роль на себя взял поворот на угол θ . Тогда из (4)–(6) очевидно, что система уравнений описывает нелинейную эволюцию полного спина $\mathbf{S}$ в системе отсчета, вращающейся вокруг оси z в фазовом пространстве псевдоспина с частотой E_J . Поскольку мы рассматриваем резонансный случай $\omega = E_J$, угол ϕ в (10) меняется во времени как $\phi = \omega t$, следовательно, полный спин $\mathbf{S}$ вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z , а фотонная переменная p в (7) осциллирует с частотой ω и при этом линейно связана со спином через последний член в правой части (7). Удобно ввести следующие обозначения для средних значений как функций от времени ($\hbar = 1$):

$$p = \sqrt{2\omega}\lambda_R(t) \equiv -\sqrt{2\omega}g_0(t)\cos(\omega t), \quad (12)$$

$$S_z = S \cos \theta(t), \quad (13)$$

$$S_y = S \sin \theta(t) \sin(\omega t), \quad (14)$$

$$S_x = S \sin \theta(t) \cos(\omega t). \quad (15)$$

Поскольку в сверхизлучательном состоянии [2, 4] фотонный сдвиг в термодинамическом пределе $\lambda_R \propto S = N/2 \gg 1$, можно использовать квазиклассическое приближение для основного состояния: $\langle \hat{p}^2 \rangle \approx \langle \hat{p} \rangle^2$ в (4)–(7).

2. ДИПОЛЬНЫЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В «ЗАМОРОЖЕННЫХ» СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Примечательно, что в статическом пределе, т. е. при $\lambda_R, \theta, \phi \equiv \text{const}$ в уравнениях (12)–(15), три уравнения (4), (5) и (7) становятся алгебраическими и остаются только два из них, так как уравнение (4) обращается в тождество. Это означает, что дважды вырожденное решение говорит о фазовом переходе в спонтанно упорядоченную дипольную фазу ДУС с замороженными электрическим и магнитным полями в резонансной полости. Очевидно, что подобное

основное состояние системы возможно, если скрещенные электрическое и магнитное поля подчиняются статическим граничным условиям на границе полости, т. е. поверхностный заряд должен быть статичен и (сверх)ток должен быть постоянен. Мы также подчеркиваем, что, как следует из правых частей уравнений (5) и (7), действительно существуют два решения, отличающиеся одновременной сменой знаков: $\theta \rightarrow -\theta$ и $\lambda_R \rightarrow -\lambda_R$ (ср. с [2]).

3. «СВЯЗАННОЕ СИЯНИЕ» СВЕРХИЗЛУЧАТЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ ДИКЕ В ПРЕДЕЛЕ АДИАБАТИЧЕСКИХ ДУС

В этом разделе получим аналитическое решение уравнений (4)–(7), используя подход с двумя временными масштабами [8] в пределе адиабатической эволюции ДУС. Мы опускаем уравнение (6), так как $\hat{S}_x$ не входит в гамильтониан Дике (1) и в уравнения (4), (5), (7). Также мы разбиваем временную эволюцию на «быструю», пропорциональную $\exp(i\omega t)$, и «медленную», описываемую функциями $g_0(t)$ и $\theta(t)$, которые определены формулами (12)–(15). Тогда, подставляя (12)–(15) в (5) и (7) и усредняя левую и правую части по быстрым осцилляциям ω , получим следующую систему уравнений для изменяющихся адиабатически функций:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{g\sqrt{2\omega}}{2} g_0(t), \quad (16)$$

$$\sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{gS\sqrt{\omega}} \dot{g}_0(t). \quad (17)$$

Процедура усреднения по быстрым осцилляциям, приводящая к (16) и (17), проста. А именно, необходимо подставить (12)–(15) в (5) и умножить обе части уравнения на $\cos(\omega t)$. Затем надо вычислить среднее по «быстрым» осцилляциям за короткий период времени ($\sim \omega^{-1}$), считая переменные, содержащие «медленные» члены, константами (адиабатическая эволюция ДУС). Интегрируя по короткому временному периоду, получим (16). Аналогично, умножая обе части уравнения (7) на $\sin(\omega t)$ и повторяя ту же самую процедуру, получим (17). По той же причине уравнение (4) вновь обращается в тождество, как в «замороженном» случае, рассмотренном выше, после пренебрежения второй производной по времени от «медленной» функции $\cos \theta$ в левой части (4). Для упрощения обозначений далее будем пользоваться единицами $\hbar = 1$. Умножая левую часть (16) на $\sin \theta$ и используя (17), получим первый

адиабатический интеграл динамических уравнений, усредненных по быстрым осцилляциям:

$$\cos \theta(t) - \frac{g^2_0(t)}{S} = \text{const} \equiv C, \quad (18)$$

где C — полная энергия системы, усредненная по быстрым осцилляциям, $C \propto \langle \hat{H} \rangle$. Далее, дифференцируя (17) единожды по времени и выражая $\cos \theta(t)$ через $g_0(t)$ с использованием (18), получим нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка для неизвестной функции $g_0(t)$:

$$\frac{2\ddot{g}_0(t)}{gS\sqrt{\omega}} + \frac{g\sqrt{\omega}}{2} g_0(t) \left(C + \frac{g^2_0(t)}{S} \right) = 0. \quad (19)$$

Решение данного уравнения точно выражается через функции Якоби. Если выбрать $C = 1 - 2k^2$ с $0 \leq k \leq 1$ [9], то решение уравнения (19) имеет вид

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \sqrt{2Sk} \operatorname{cn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right), \\ \lambda_R &= \sqrt{2Sk} \operatorname{cn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (20)$$

где k — модуль эллиптического интеграла. Используя решение (20), оставшиеся переменные можно выразить алгебраически из (16), (17) как (ср. с [8])

$$\begin{aligned} S_z &= S \cos \theta = S \left\{ 1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \right\}, \\ S_y &= -S \sin \theta \sin(\omega t) = 2kS \times \\ &\times \operatorname{sn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \operatorname{dn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь sn , dn , cn — эллиптические функции Якоби. С другой стороны, при выборе $C = k^2 - 2$, решения имеют вид

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \sqrt{2S} \operatorname{dn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right), \\ \lambda_R &= \sqrt{2S} \operatorname{dn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S_z &= S \cos \theta = \\ &= Sk^2 \left\{ 1 - 2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \right\}, \\ S_y &= -S \sin \theta \sin(\omega t) = \\ &= 2k^2 \operatorname{sn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \times \\ &\times \operatorname{cn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (23)$$

Эффективная частота Ω , характеризующая биения эллиптических функций Якоби в (20)–(23), выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$ [9] (расходится при $k = 1$) следующим образом:

$$\begin{aligned} g_0 \left(t + \frac{2\pi}{\Omega} \right) &= g_0(t), \quad \Omega \equiv \omega \frac{\pi}{K(k)} \frac{g}{2g_c}, \\ g_c &\equiv \sqrt{\frac{E_J}{S}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь g_c — критическая константа связи, при которой сверхизлучательное состояние стабильно [2]. Следовательно, в пределе $k \rightarrow 1$ предположение о «медленной» эволюции $\theta(t)$, т. е. $\Omega \ll \omega$, которое мы приняли в начале вычислений, выполняется, если

$$\begin{aligned} \Omega \equiv \omega \frac{\pi}{K(k)} \frac{g}{2g_c} &\ll \omega, \quad \text{т. е. } K(k) \gg \frac{\pi}{2} \frac{g}{g_c}, \\ \text{следовательно, } 1 - 2 \exp \left\{ -\frac{\pi}{2} \frac{g}{g_c} \right\} &\leq k \leq 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, физическое явление фазы «связанного сияния» описывается решениями (20)–(23). Выражения для электрического поля и суммарного дипольного момента, создаваемых в камере, которые колеблются между двумя вырожденными основными состояниями модели Дике, записываются как

$$\hat{\mathbf{E}} = i\sqrt{\frac{1}{V}} (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \boldsymbol{\epsilon}, \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{d}} = -2e l \boldsymbol{\epsilon} \hat{S}_y, \quad (27)$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$, V , l — вектор поляризации, объем полости и эффективная толщина джозефсоновского контакта соответственно, $2e$ — элементарный заряд куперовской пары. Для двух возможных выборов адиабатического инварианта C , приведенных выше, представлены два следующих набора решений для электрического поля $\mathbf{E}$ и суммарного дипольного момента ДУС $\mathbf{d}$.

1. Случай 1. $C = 1 - 2k^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) &= \frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt{V}} \boldsymbol{\epsilon} \sqrt{2Sk} \operatorname{cn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \times \\ &\times \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\mathbf{d}(t) = 2elS\varepsilon \cdot 2k \operatorname{sn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \times \\ \times \operatorname{dn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \sin(\omega t), \quad (29)$$

$$E_J S_z(t) = E_J S \left[1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \right]. \quad (30)$$

2. Случай 2. $C = k^2 - 2$:

$$\mathbf{E}(t) = \frac{2\sqrt{\omega}}{\sqrt{V}} \varepsilon \sqrt{2S} \operatorname{dn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \times \\ \times \cos(\omega t), \quad (31)$$

$$\mathbf{d}(t) = 2elS\varepsilon \cdot 2k^2 \operatorname{sn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \times \\ \times \operatorname{cn} \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \sin(\omega t), \quad (32)$$

$$E_J S_z(t) = E_J S k^2 \left[1 - 2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{g\sqrt{S\omega}}{2} t, k \right) \right]. \quad (33)$$

Следует отметить интересный факт. В обоих случаях выражение для дипольной энергии ДУС, т.е. $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$, одинаково. Различие в фотонной части $\hat{p}^2/2$ и зеемановской части $-E_J S_z$. Однако мы рассматривали «медленную эволюцию», что означает $k \rightarrow 1$. В данном пределе выражения для всех энергетических вкладов совпадают.

Используя уравнения, записанные выше для двух случаев, построим графики зависимости электрического поля фотонного конденсата от времени $E(t)$, а также распределение энергии системы. Энергия распределена между энергией связи двухуровневых систем электромагнитным полем в полости $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ и «зеемановской» энергией $-E_J \hat{S}_z$, т.е. джозефсоновской энергией туннелирования куперовских пар в гамильтониане (1). Для $C = 1 - 2k^2$ на рис. 1 показаны зависящие от времени осцилляции когерентного электрического поля фотонного конденсата (сплошная линия) вместе с «медленной» огибающей кривой (штриховая линия), которая обозначает периодическое изменение фазы быстрых колебаний на π , т.е. двойное вырождение основного

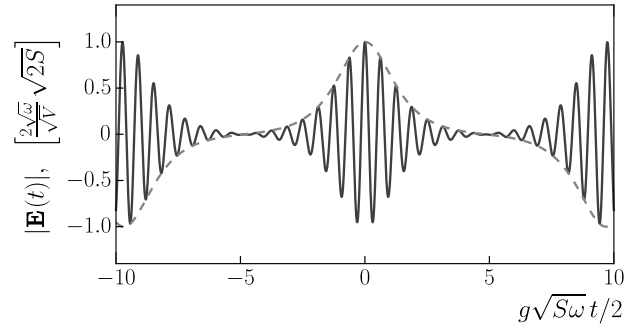


Рис. 1. Зависимость от времени осцилляций когерентного электрического поля фотонного конденсата (сплошная линия) с «медленной» огибающей (штриховая линия), которая свидетельствует о периодическом изменении фазы осцилляций на π

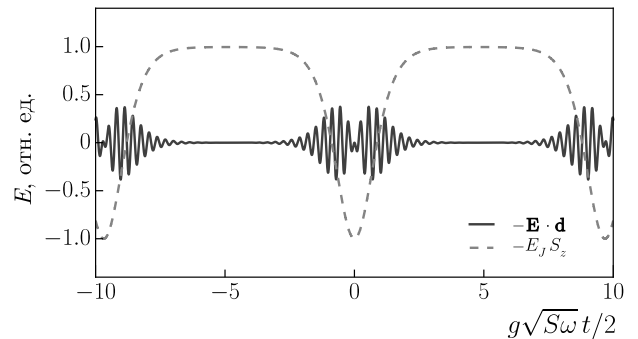


Рис. 2. Зависимости от времени дипольной энергии в поле фотонного конденсата, пропорциональной $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$ (сплошная линия), и «зеемановской» энергии, пропорциональной $-E_J S_z$ (штриховая линия)

состояния снимается динамическим образом. График на рис. 2 ясно демонстрирует, что энергия основного состояния проявляет периодическое внезапное превращение «энергии нулевых колебаний» куперовских пар (штриховая линия) в энергию «сияния» фотонного конденсата, связанного с диполями ДУС (сплошная линия), правда, модель не включает диссипацию.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена модель Дике с N псевдоспинами $1/2$, взаимодействующими с единственной модой фотонного поля в резонаторе в квазиклассическом сверхизлучательном режиме. С использованием недавно предложенного теоретического метода [4] вращающегося представления Гольштейна – Примакова декартовых компонент полного спина была

рассмотрена квазиклассическая динамика системы операторных уравнений Гейзенберга. С помощью подхода двух временных масштабов («короткий» и «длинный») впервые получены аналитические выражения для электрического поля и дипольного момента (среднего значения компоненты псевдоспина $\langle S_y \rangle$) в резонансной полости. Решения выражаются через эллиптические функции Якоби, описывая внутреннее сверхизлучательное состояние «связанного сияния». Множество других задач, связанных с данной, таких как бифуркации и хаос в асимптотическом пределе, область интегрируемости и т. д., представляет интерес для дальнейшего исследования.

Благодарности. С. И. М. благодарит Карло Бейнаккера, Константина Ефетова, Бернарда ван Хека и Николая Гнездилова за полезные дискуссии во время работы над статьей, а также коллег из Института теоретической физики им. Лоренца за гостеприимство во время его пребывания в Лейдене.

Финансирование. Работа проведена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках программы повышения конкурентоспособности по

гранту НИТУ «МИСиС» К4-2018-061, выполненной по государственному постановлению от 16 марта 2013, № 211.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. H. Dicke, Phys. Rev. **93**, 99 (1954).
2. C. Emary and T. Brandes, Phys. Rev. E **67**, 066203 (2003).
3. K. Hepp and E. H. Lieb, Ann. Phys. **76**, 360 (1973).
4. S. I. Mukhin and N. V. Gnezdilov, Phys. Rev. A **97**, 053809 (2018).
5. T. Holstein and H. Primakoff, Phys. Rev. **58**, 1098 (1940).
6. В. П. Карасев, ТМФ **95**(1), 3 (1993).
7. A. Shnirman, G. Schön, and Z. Hermon, Phys. Rev. Lett. **79**, 2371 (1997).
8. S. I. Mukhin and N. V. Gnezdilov, arXiv:1711.00348.
9. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996).