ЖЭТФ, 2021, том 159, вып. 4, стр. 761–775

ОСЦИЛЛЯТОРЫ С ЗАТУХАНИЕМ В РАМКАХ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ СИЛ КАЗИМИРА И ВАН ДЕР ВААЛЬСА

Ю. С. Бараш *

Институт физики твердого тела Российской академии наук
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия

Поступила в редакцию 6 ноября 2020 г.,
после переработки 14 декабря 2020 г.
Принята к публикации 14 декабря 2020 г.

Показано, что общая теория сил Казимира и Ван дер Ваальса описывает обусловленные взаимодействием части термодинамических потенциалов квантового гармонического осциллятора с затуханием, билинейно связанного с термостатом. По аналогии с широкой областью применимости общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса проведено расширение модели затухающего осциллятора и получены соответствующие термодинамические величины. В то время как в исходной модели тепловой резервуар содержит большое число свободных осцилляторов с исчезающе малым демпфированием, в расширенной модели термостат состоит из диссипативных составляющих, которые могут иметь любые допустимые зависящие от частоты и температуры восприимчивости вследствие их взаимодействия в термостате с дополнительными диссипативными каналами, непосредственно не влияющими на центральный осциллятор. Таким образом, полученные результаты оказываются применимы к случаю зависящей от частоты и температуры диссипативной функции центрального осциллятора.

Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 90-летию И. Е. Дзялошинского

DOI: 10.31857/S0044451021040209

1. ВВЕДЕНИЕ

Применяя флуктуационно-диссипационные соотношения к электромагнитному полю в конденсированной среде, Е. М. Лифшиц решил задачу об имеющем флуктуационное электромагнитное происхождение взаимодействии между разделенными пустой щелью толстыми пластинами [1]. Решение Лифшица показало, как можно получить единое описание сил Казимира и Ван дер Ваальса между макроскопическими телами с зависящими от частоты произвольными диэлектрическими проницаемостями.

С появлением квантово-полевых методов теории многих тел подход Лифшица был обобщен в работе Дзялошинского и Питаевского [2], в которой были получены имеющие широкую область применимости общие формулы, описывающие вклад длинноволнового флуктуационного электромагнитного поля, взаимодействующего с конденсированной средой, в термодинамические величины неоднородных диссипативных систем в условиях равновесия. Это позволило, в частности, распространить решение Лифшица для задачи о двух пластинах, разделенных пустой щелью, на случай взаимодействия через жидкую пленку [3]. С тех пор основные идеи и результаты общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса [1–4] составляют базис для современного описания термодинамических величин, обусловленных флуктуационным электромагнитным взаимодействием [5–11].

Позднее и вне зависимости от приведенных выше исследований значительное внимание было уделено термодинамике осциллятора, билинейно связанного с тепловым резервуаром [12–26]. Квантовая и классическая динамика осциллятора с затуханием, взаимодействующего с тепловым резервуаром и находящегося под его флуктуационным воздействием, изучались в течение многих лет [27–40]. Осциллятор с затуханием является характерным примером диссипативных квантовых систем [40, 41], представляющим интерес в связи с целым рядом задач и касающимся, в частности, квантового броуновского

* E-mail: barash@issp.ac.ru

движения [37, 39], влияния диссипации на процессы квантового туннелирования [33, 42] и некоторых общих аспектов статистической механики и термодинамики при наличии сильной связи с термостатом [26].

В предлагаемой статье сравниваются основные аспекты и результаты двух теорий, идентифицируются их общие черты и области существенного пересечения. По аналогии с широкой областью применимости общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса модель осциллятора с затуханием будет далее обобщена на случай термостатов с более сложной структурой.

На первый взгляд, две упомянутые выше области исследований существенно отличаются друг от друга. Модель Цванцига – Калдейры – Леггетта для осциллятора с затуханием [30, 33] представляет собой пример малой квантовой системы, которая демонстрирует диссипативное поведение, возникающее вследствие ее взаимодействия с термостатом. Такая модель позволяет изучить важные для квантовой динамики системы свойства, допуская точные решения в простых случаях. Ее также можно рассматривать как часть более сложных квантовомеханических задач. Простая структура термостата, состоящего из большого числа свободных осцилляторов, взаимодействующих только с центральным (системным) осциллятором, приводит к возможности описания диссипативного поведения при переходе к задаче с одной или двумя степенями свободы.

В противоположность модели осциллятора с затуханием, общая теория сил Казимира и Ван дер Ваальса рассматривает (в рамках микроскопического квантового подхода) взаимодействие длинноволновых компонент электромагнитного поля с реальной конденсированной системой, при котором не возникает необходимости ни в разделении двух подсистем на малую центральную систему и большой тепловой резервуар, ни в существенных упрощениях общей постановки задачи. Зависящие от частоты диссипативные диэлектрические проницаемости конденсированной среды фигурируют в теории в общем виде, в согласии с флуктуационно-диссипационными соотношениями, а их конкретная форма может быть задана исходя из независимых теоретических или экспериментальных данных. Результаты общей теории применимы к неоднородным конденсированным системам с произвольным пространственным профилем, в которых проявляются нелокальные корреляции микроскопического квантового электромагнитного поля в средах с зависящими от координат матричными диэлектрическими проницаемостями. Свободная от модельных предположений общая теория обладает существенно более широкими возможностями в рамках области ее применимости.

С другой стороны, две сравниваемые теории имеют ряд важных общих характерных черт. Поскольку свойства и взаимодействия Казимира и Ван дер Ваальса и находящегося под влиянием термостата осциллятора формируются под воздействием равновесных флуктуаций, сходные черты между ними известны [43], хотя непосредственное сравнение основных результатов для термодинамических потенциалов не проводилось. Кроме того, длинноволновое электромагнитное флуктуационное поле в теории сил Казимира и Ван дер Ваальса оказывается затухающим, имеющим комплексные собственные частоты, вследствие его взаимодействия с конденсированной средой, и в этом контексте напоминает осциллятор, который становится диссипативным из-за взаимодействия с термостатом.

Следует также отметить общую билинейную операторную структуру основных членов в гамильтонианах, описывающих взаимодействие, с операторами микроскопической квантовой плотности тока и электромагнитного потенциала в одной из теорий и с операторами положений центрального осциллятора и каждого из осцилляторов термостата в другой. В обоих случаях усреднение членов взаимодействия можно провести, используя флуктуационно-диссипационные соотношения. Еще одна существенная общая черта двух теорий состоит в том, что взаимодействие с центральным осциллятором не приводит, в рамках модели, к изменению восприимчивостей осцилляторов термостата. Это аналогично тому, что в общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса вклад от взаимодействия с длинноволновым флуктуационным электромагнитным полем в диэлектрические проницаемости конденсированной среды предполагается пренебрежимо малым.

Существенное пересечение двух обсуждаемых теорий становится очевидным в случае электромагнитного взаимодействия центрального осциллятора с термостатом. Учитывая это обстоятельство и проводя анализ, в некотором смысле в обратном порядке, вклад сил Казимира и Ван дер Ваальса в свободную энергию диссипативных систем был идентифицирован исходя из рассмотрения длинноволновых электромагнитных флуктуаций в элементарном RCL-контуре, который, по-существу, является примером осциллятора с затуханием [44]. Впрочем, в то время как общая теория применима к обычному RCL-контуру, контур удовлетворяет не всем усло-

виям модели, в которой осцилляторы термостата имеют бесконечно малые функции демпфирования и, следовательно, вещественные собственные частоты. Обычное сопротивление RCL-контура, напротив, определяется известными реальными процессами в металле, которые следует рассматривать как дополнительные внутренние каналы диссипации в термостате, не включенные в исходную модель. Это относится, конечно, к большей части систем, обычно изучаемых в общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса[1)].

Моделью электромагнитного происхождения, которая одновременно удовлетворяет как условиям модели осциллятора с затуханием, так и теории сил Казимира и Ван дер Ваальса, является заряженный осциллятор в равновесном поле излучения черного тела. В этой модели функция демпфирования у осциллятора возникает благодаря процессам реакции излучения [12, 13]. Связь этой конкретной задачи с теорией сил Казимира и Ван дер Ваальса, не замеченная в работах [12, 13], обсуждалась в [45], но только в предельном случае вещественных собственных частот, когда результат сводится к свободной энергии свободных осцилляторов с собственными частотами взаимодействующей системы, как это имеет место для взаимодействия Казимира и Ван дер Ваальса в системах с вещественными собственными частотами [46–50].

Как будет показано ниже, обусловленные взаимодействием части термодинамических потенциалов, полученные в рамках модели осциллятора с затуханием и в рамках свободной от модельных предположений общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса, совпадают, если их выразить через сходные величины. Это является следствием существенного пересечения двух подходов. Другими словами, термодинамика осциллятора с затуханием, билинейно связанного с термостатом, непосредственно описывается давно полученными результатами общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса [4, 50–54].

Предложенное в этой статье расширение исходной модели осциллятора с затуханием включает влияние дополнительных внутренних каналов диссипации в термостате. В результате, вместо имеющихся в исходной модели восприимчивостей свободных осцилляторов термостата, расширенная модель допускает наличие зависящих от частоты и температуры диссипативных восприимчивостей общего вида. Хотя центральный осциллятор, по предположению, непосредственно не связан с дополнительными каналами, его функция демпфирования приобретает зависимость от частоты и температуры через билинейное взаимодействие с диссипативными осцилляторами термостата или аналогичными им его составляющими. Расширенная модель допускает термодинамическое описание осциллятора с затуханием в равновесном состоянии и, вообще говоря, не предназначена для изучения динамики всей системы. Соответствующий результат для свободной энергии, полученный с зависящей от температуры функцией демпфирования центрального осциллятора, как будет показано, совпадает с выражением для свободной энергии в исходной модели, в то время как результат для внутренней энергии изменяется.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 приведены основные результаты для осциллятора с затуханием, используемые в последующих разделах. В разд. 3 представлен альтернативный вывод обусловленных взаимодействием частей свободной и внутренней энергий осциллятора с затуханием, что служит основой для дальнейшего рассмотрения. Разделы 4–6 показывают связь результатов для осциллятора с затуханием с результатами общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса. Расширенная модель для осциллятора с затуханием развита в разд. 7. Раздел 8 завершает статью.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОСЦИЛЛЯТОРА С ЗАТУХАНИЕМ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ТЕРМОСТАТОМ

Рассмотрим в качестве малой квантовой системы, взаимодействующей с термостатом, центральный осциллятор, взаимодействующий со свободными осцилляторами окружения. Введем соответствующие операторы положения $\hat{Q}$ и $\hat{q}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, N$).

Если внешнее возмущение в гамильтониане имеет вид

$$\hat{V}_{ext} = -\hat{Q} f_{ext,Q}(t) - \sum_{\alpha=1}^{N} \hat{q}_\alpha f_{ext,\alpha}(t) \qquad (1)$$

и линейный отклик на внешние силы $f_{ext,Q}$ и $f_{ext,\alpha}$ описывается следующими соотношениями для фурье-компонент усредненных величин:

[1)] Следуя выявленной в этой статье аналогии между результатами двух теорий, диссипативные свойства конденсированной среды мы сравниваем здесь с диссипативными свойствами одного только термостата, но не самого центрального осциллятора. Роль последнего в модели аналогична роли флуктуационного электромагнитного поля в теории сил Казимира и Ван дер Ваальса.

$$Q(\omega) = \chi_{QQ}(\omega) f_{ext,Q}(\omega) + \sum_{\alpha=1}^{N} \chi_{Q\alpha}(\omega) f_{ext,\alpha}(\omega), \quad (2)$$

$$q_\alpha(\omega) = \chi_{\alpha Q}(\omega) f_{ext,Q}(\omega) + \sum_{\delta=1}^{N} \chi_{\alpha\delta}(\omega) f_{ext,\delta}(\omega), \quad (3)$$

то содержащая входящие сюда восприимчивости флуктуационно-диссипационная теорема, как известно, может быть представлена в виде [55]

$$\left(Q^2\right)_\omega = \hbar \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \operatorname{Im}\Big[\chi_{QQ}(\omega)\Big], \quad (4)$$

$$\left(q_\alpha Q\right)_\omega = \frac{i\hbar}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \Big[\chi^*_{Q\alpha}(\omega) - \chi_{\alpha Q}(\omega)\Big], \quad (5)$$

$$\left(q_\alpha^2\right)_\omega = \hbar \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \operatorname{Im}\Big[\chi_{\alpha\alpha}(\omega)\Big], \quad (6)$$

$$\left(q_\alpha q_\delta\right)_\omega = \frac{i\hbar}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \Big[\chi^*_{\delta\alpha}(\omega) - \chi_{\alpha\delta}(\omega)\Big]. \quad (7)$$

Здесь $\left(AB\right)_\omega$ обозначает спектральную плотность симметризованной корреляционной функции в равновесном состоянии,

$$\frac{1}{2}\langle \hat{A}(t)\hat{B}(t') + \hat{B}(t')\hat{A}(t)\rangle = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (AB)_\omega \exp\left[-i\omega(t-t')\right] \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (8)$$

Для квантовых состояний, инвариантных по отношению к операции инверсии времени, должны выполняться соотношения $\chi_{Q\alpha}(\omega) = \chi_{\alpha Q}(\omega)$, $\chi_{\alpha\delta}(\omega) = \chi_{\delta\alpha}(\omega)$, и, например, равенство (5) сводится к соотношению

$$\left(q_\alpha Q\right)_\omega = \hbar \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \operatorname{Im}\Big[\chi_{Q\alpha}(\omega)\Big].$$

При наличии внешней силы и вызванных взаимодействием с термостатом диссипативных процессов линеаризованное динамическое уравнение для статистически усредненного оператора положения центрального осциллятора с массой M и частотой Ω имеет вид

$$M\ddot{Q}(t) + M\int_{-\infty}^{t} dt' \tilde{\gamma}(t-t')\dot{Q}(t') + M\Omega^2 Q(t) = \\ = f_{ext}(t), \quad (9)$$

где $\tilde{\gamma}(t)$ — диссипативная функция памяти.

Соответствующая зависящая от частоты восприимчивость, следовательно, есть $\chi_{QQ}(\omega) \equiv \chi_Q(\omega)$,

$$\chi_Q(\omega) = \frac{1}{M\left[(\Omega^2 - \omega^2) - i\omega\gamma(\omega)\right]}, \quad (10)$$

где функция демпфирования $\gamma(\omega)$ является фурье-образом $\tilde{\gamma}(t)$.

Восприимчивость α-го свободного осциллятора с массой m_α и частотой ω_α имеет вид

$$\chi_\alpha(\omega) = \frac{1}{m_\alpha} \frac{1}{\omega_\alpha^2 - \omega^2 - i\omega\varepsilon}, \quad \varepsilon \to +0. \quad (11)$$

Для нахождения перекрестных компонент $\chi_{Q\alpha}(\omega)$, $\chi_{\alpha\gamma}(\omega)$ матричной функции отклика удобно ввести полный квантовый гамильтониан модели Цванцига – Калдейры – Леггетта для затухающего осциллятора [30, 33] с добавленными классическими внешними силами:

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{Q}^2 - \hat{Q}f_{ext,Q} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{N}\left[\frac{\hat{p}_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{1}{2}m_\alpha\omega_\alpha^2\left(\hat{q}_\alpha - \frac{C_\alpha}{m_\alpha\omega_\alpha^2}\hat{Q}\right)^2\right] - \\ - \sum_{\alpha=1}^{N}\hat{q}_\alpha f_{ext,\alpha}. \quad (12)$$

Здесь $\hat{Q}$, $\hat{P}$ и $\hat{q}_\alpha$, $\hat{p}_\alpha$ — операторы положения и импульса соответственно центрального осциллятора и α-го осциллятора термостата. Центральный осциллятор взаимодействует с α-м осциллятором окружения с константой связи C_α. Форма входящих в гамильтониан (12) членов взаимодействия исключает обусловленную взаимодействием перенормировку частоты Ω.

Сравнительно простая модель (12), как известно, допускает детальное описание свойств находящегося под воздействием термостата осциллятора с затуханием [26, 30, 33, 37, 39, 40]. В частности, квантовые уравнения движения после исключения $\hat{q}_\alpha$ из уравнения для $\hat{Q}$, квантового статистического усреднения и преобразования Фурье сводятся к виду

$$M\left[\left(\Omega^2 - \omega^2\right) - i\omega\gamma(\omega)\right]Q(\omega) = \\ = f_{ext,Q}(\omega) + \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha \chi_\alpha(\omega) f_{ext,\alpha}(\omega), \quad (13)$$

$$m_\alpha(\omega_\alpha^2 - \omega^2)q_\alpha(\omega) - C_\alpha Q(\omega) = f_{ext,\alpha}(\omega). \quad (14)$$

Из уравнений (13), (14) вытекает

$$\chi_{QQ}(\omega) = \chi_Q(\omega), \quad (15)$$

$$\chi_{Q\alpha}(\omega) = \chi_{\alpha Q}(\omega) = C_\alpha \chi_Q(\omega)\chi_\alpha(\omega), \quad (16)$$

$$\chi_{\alpha\alpha}(\omega) = \chi_\alpha(\omega)\Big(1 + C_\alpha^2 \chi_Q(\omega)\chi_\alpha(\omega)\Big), \quad (17)$$

$$\chi_{\alpha\delta}(\omega) = C_\alpha C_\delta \chi_Q(\omega)\chi_\alpha(\omega)\chi_\delta(\omega), \quad \alpha \neq \delta, \quad (18)$$

где $\chi_Q(\omega)$ и $\chi_\alpha(\omega)$ определены в (10) и (11).

Как видно из выражений (4)–(7), (15)–(18) и (10), (11), рассматриваемые корреляционные функции содержат единственную величину $\gamma(\omega)$, конкретный вид которой определяется гамильтонианом (12):

$$i\omega M\gamma(\omega) = \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha^2 \left[\chi_\alpha(\omega) - \chi_\alpha(0)\right], \qquad (19)$$

и оказывается связан с так называемой спектральной плотностью взаимодействия

$$J(\omega) = \theta(\omega) \sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha^2 \chi''_\alpha(\omega), \qquad (20)$$

где $\theta(\omega)$ — единичная ступенчатая функция, а двойной штрих у χ обозначает взятие мнимой части.

Связь между функцией демпфирования $\gamma(\omega)$ и спектральной плотностью взаимодействия имеет вид

$$\gamma(\omega) = -\frac{2i\omega}{\pi M} \int_0^\infty \frac{J(\xi)d\xi}{\xi(\xi^2 - \omega^2 - i\omega\varepsilon)}, \quad \varepsilon \to +0. \qquad (21)$$

Определенные в (19), (20) величины удовлетворяют соотношению (21) не только в случае использования выражения (11), но также и для любых допустимых зависящих от частоты восприимчивостей $\chi_\alpha(\omega)$. Для установления справедливости формулы (21) в общем случае следует подставить (19) и (20) в (21) и применить к выражениям $\left[\chi_\alpha(\omega) - \chi_\alpha(0)\right]/\omega^2$ под знаком суммирования в левой части получившегося равенства следующее соотношение Крамерса – Кронига:

$$\chi'(\omega) = \frac{2}{\pi} \fint_0^\infty \frac{\xi\chi''(\xi)d\xi}{\xi^2 - \omega^2}. \qquad (22)$$

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ОСЦИЛЛЯТОРА С ЗАТУХАНИЕМ

Обусловленный взаимодействием центрального осциллятора с термостатом вклад в свободную энергию можно сравнительно просто найти, если приравнять, следуя общим соотношениям статистической физики [53–56], производную свободной энергии по параметру взаимодействия соответствующей усредненной производной от гамильтониана с последующим интегрированием полученного равенства по параметру взаимодействия. Умножая с этой целью все константы связи $C_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ в гамильтониане (12) на один и тот же параметр λ, приходим к усредненной производной гамильтониана по λ:

$$\left\langle \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda} \right\rangle_\lambda = -\sum_{\alpha=1}^{N} C_\alpha \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \Big((q_\alpha Q)_{\omega,\lambda} - \lambda C_\alpha \chi_\alpha(0) \left(Q^2\right)_{\omega,\lambda} \Big). \qquad (23)$$

Здесь $\langle \ldots \rangle_\lambda$ и $(\ldots)_{\omega,\lambda}$ означают соответственно усреднение по равновесному состоянию системы с гамильтонианом $\hat{H}(\lambda)$ и симметризованную спектральную плотность.

Так как восприимчивости осцилляторов термостата $\chi_\alpha(\omega)$ (11) не содержат C_α, они не зависят от параметра взаимодействия λ, в то время как функция демпфирования $\gamma(\omega, \lambda)$, как это следует из (19), проявляет квадратичную зависимость: $\gamma(\omega, \lambda) = \lambda^2\gamma(\omega)$. Следовательно, зависимость функции отклика $\chi_Q(\omega, \lambda)$ от этого параметра получается после подстановки в формулу (10) величины $\lambda^2\gamma(\omega)$ вместо $\gamma(\omega)$.

Применяя теперь флуктуационно-диссипационные соотношения (4), (5) и учитывая (15), (16), выражаем квадратичные и билинейные по положениям операторов спектральные плотности в (23) через соответствующие функции отклика и получаем свободную энергию в виде

$$\Delta_\lambda F = F(\lambda = 1) - F(\lambda = 0) = \int_0^1 d\lambda \left\langle \frac{\partial \hat{H}(\lambda)}{\partial \lambda} \right\rangle_\lambda =$$
$$= -\operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hbar \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \int_0^1 \frac{i\omega\lambda d\lambda \gamma(\omega)}{(\Omega^2 - \omega^2) - i\omega\lambda^2\gamma(\omega)} =$$
$$= \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi} \hbar \operatorname{cth} \frac{\hbar\omega}{2T} \times$$
$$\times \ln \frac{\Omega^2 - \omega^2 - i\omega\gamma(\omega)}{\Omega^2 - \omega^2 - i\omega\varepsilon}, \quad \varepsilon \to +0. \qquad (24)$$

При учете аналитических свойств функций отклика в верхней полуплоскости комплексной частоты формула (24) преобразуется к следующему выражению для свободной энергии:

$$\Delta_\lambda F = F - F_0 = T \sum_{n=0}^{\infty}{}' \ln \frac{\Omega^2 + \omega_n^2 + \omega_n \gamma(i\omega_n)}{\Omega^2 + \omega_n^2}. \qquad (25)$$

Здесь $\omega_n = 2\pi nT/\hbar$ — мацубаровская частота, а штрих у знака суммирования означает, что член с $n = 0$ берется с половинным весом. При получении

выражения (25) учитывалось условие $\gamma(\omega) \to 0$ при $\omega \to \infty$, которое должно выполняться в реальных системах.

Хотя член с $n = 0$ в (25) обращается в нуль, его удобно оставить для сравнения с аналогичным выражением, которое используется в более общем случае. Равенство нулю обусловленных взаимодействием эффектов в классическом пределе является специфическим свойством моделей типа Цванцига – Калдейры – Леггетта, описывающих системы с одной степенью свободы. Это происходит, в частности, из-за отсутствия в модели вызванной взаимодействием перенормировки частоты осциллятора Ω.

Обусловленная взаимодействием часть $\Delta_\lambda F$ свободной энергии центрального осциллятора (25) представляет собой разность свободных энергий полной системы, взятых с учетом и без учета взаимодействия осциллятора с окружением. Свободная энергия F осциллятора с затуханием как открытой системы, взаимодействующей с термостатом, получается из выражения (25) добавлением к его правой части членов, которые не зависят от констант связи и при отсутствии взаимодействия обеспечивают совпадение величины F со свободной энергией свободного осциллятора

$$T \ln\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{\hbar\Omega}{2T}\right) = T \ln\left[\frac{\hbar\Omega}{T}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}\right)\right].$$

Таким образом, исходя из (25), приходим к следующей свободной энергии осциллятора с затуханием:

$$F = T \ln\left[\frac{\hbar\Omega}{T}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}+\frac{\gamma(i\omega_n)}{\omega_n}\right)\right]. \qquad (26)$$

Свободная энергия открытой системы может быть представлена в виде $F = -T\ln Z(T)$, где Z — приведенная статистическая сумма, т. е. отношение статистических сумм полной системы и невозмущенного резервуара. Исходя из этого соотношения, из (26) приходим к хорошо известному выражению для приведенной статистической суммы линейного квантового осциллятора с затуханием [26, 40]:

$$Z(T) = \frac{T}{\hbar\Omega}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\omega_n^2}{\Omega^2+\omega_n^2+\omega_n\gamma(i\omega_n)}. \qquad (27)$$

Выражение для внутренней энергии осциллятора с затуханием следует из (26) при учете стандартного соотношения $E = -T^2\partial\left(F(T)/T\right)/\partial T$:

$$E = T\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{2\Omega^2+\omega_n\gamma(i\omega_n)-\omega_n^2\dfrac{d\gamma(i\omega_n)}{d\omega_n}}{\Omega^2+\omega_n^2+\omega_n\gamma(i\omega_n)}. \qquad (28)$$

Формула (26) для свободной энергии не содержит производной по частоте от функции демпфирования, поскольку параметр взаимодействия в (23), (24) считался изменяющимся при фиксированной температуре и, следовательно, при фиксированных мацубаровских частотах. С другой стороны, выражения для таких термодинамических потенциалов, которым отвечают процессы с изменяющейся температурой, с неизбежностью должны содержать производные по частоте от функции демпфирования, взятые при мацубаровских частотах, примером чему служит выражение (28).

Внутренняя энергия (28) совпадает с результатом, полученным ранее на основе предварительно найденной приведенной статистической суммы [16, 40]. Наличие производной по частоте от функции демпфирования в (28), как известно, отвечает наличию температурной зависимости у гамильтониана средней силы [26].

4. СВЯЗЬ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ДЗЯЛОШИНСКОГО И ПИТАЕВСКОГО

В цели этого и следующего разделов входит сравнение основных формул для термодинамических потенциалов, полученных в двух рассматриваемых теориях, и установление идентичности этих формул, возникающей при использовании сходных величин. В этом разделе рассматривается один из основных, свободных от модельных предположений, результатов, полученных Дзялошинским и Питаевским [2] в рамках развитой ими общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса. Речь идет о вариации обусловленной взаимодействием свободной энергии длинноволнового электромагнитного флуктуационного поля в неоднородной конденсированной среде.

Линейный электромагнитный отклик конденсированной среды, фигурирующий в общих выражениях теории, описывается поляризационным оператором $\mathcal{P}$, зависящим от мацубаровских частот и связанным с диэлектрической функцией соотношением

$$\mathcal{P}_{ik}(\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \\ = \frac{\omega_n^2}{\hbar c^2}\left[\epsilon_{ik}(i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\right]. \qquad (29)$$

Соответствующая вариация свободной энергии при малом изменении поляризационного оператора $\delta\mathcal{P}$, как было найдено, имеет вид [2]

$$\delta F = -\frac{T}{4\pi} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \mathcal{D}_{ik}(\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \delta\mathcal{P}_{ki}(\omega_n, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (30)$$

Здесь $\mathcal{D}_{ik}(\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ — температурная гриновская функция длинноволнового электромагнитного поля в среде. Соответствующая запаздывающая гриновская функция связана с равновесными корреляциями квантовых микроскопических потенциалов в среде при калибровочном условии равенства нулю скалярного потенциала.

Рассмотрим теперь вариацию обусловленной взаимодействием свободной энергии (25) (или (26)) при малом изменении функции демпфирования:

$$\delta F = -T \sum_{n=0}^{\infty}{}' \chi_Q(i\omega_n)\big[-M\omega_n \delta\gamma(i\omega_n)\big]. \quad (31)$$

Здесь было использовано выражение (10) для функции отклика осциллятора с затуханием. Уравнение (31) справедливо при любой возможной частотной зависимости функции демпфирования.

Близкая аналогия между формулами (30) и (31) допускает детальное описание. В то время как функция Грина в (30) связана с корреляциями флуктуирующих микроскопических электромагнитных потенциалов в среде, функция отклика χ_Q описывает корреляции флуктуаций положения центрального осциллятора Q (см. соотношения (4) и (15)). Спектральная плотность электромагнитных сил Ланжевена в среде связана, как известно, с поляризационным оператором, в то время как величина $i\omega M\gamma(\omega)$ связана со спектральной плотностью сил Ланжевена в случае осциллятора с затуханием.

Далее, для осциллятора с затуханием, как видно из выражений (13) и (10), функция $\chi_Q(\omega)$ описывает линейный отклик координаты Q на внешнюю силу $f_{ext,Q}(\omega)$, в то время как соотношение между силой трения и координатой Q есть

$$f_{friction}(\omega) = i\omega M\gamma(\omega)Q(\omega).$$

Аналогично, в теории сил Казимира и Ван дер Ваальса величина $-(1/\hbar c)\mathcal{D}$, как известно, играет роль обобщенной нелокальной матричной функции отклика для электромагнитных потенциалов под воздействием внешних токов, в то время как $-(c\hbar/4\pi)\mathcal{P}$ входит в соотношение между плотностью тока и электромагнитными потенциалами в средах. Группируя рассматриваемые величины вместе с указанными коэффициентами, в обоих выражениях (30) и (31) получаем одинаковые множители перед знаками суммирования.

Наконец, взаимодействие с длинноволновым электромагнитным полем рассматривается в общей теории как взаимодействие со сравнительно слабым полем в том смысле, что вклад от такого поля в диэлектрическую проницаемость конденсированной среды пренебрежимо мал. Поэтому поляризационный оператор (29) входит в выражения теории умноженным только на квадрат соответствующей константы связи. Аналогично, восприимчивости отдельных осцилляторов в термостате предполагаются не зависящими от соответствующих констант связи, что приводит к квадратичной зависимости функции демпфирования $\gamma(\omega)$ от параметра взаимодействия.

5. СВЯЗЬ С ВКЛАДОМ СИЛ КАЗИМИРА И ВАН ДЕР ВААЛЬСА В ПОЛНУЮ СВОБОДНУЮ ЭНЕРГИЮ

Возвращаясь к выражению (25) для свободной энергии, рассмотрим две функции,

$$D(\omega) = \Omega^2 - \omega^2 - i\omega\gamma(\omega),$$

$$D_0(\omega) = \Omega^2 - \omega^2 - i\omega\varepsilon \quad (\varepsilon \to +0),$$

взятые в (25) при мнимых мацубаровских частотах $\omega \to i\omega_n$. Корни дисперсионной функции $D(\omega)$, т. е. решения дисперсионного уравнения

$$D(\omega) = \Omega^2 - \omega^2 - i\omega\gamma(\omega) = 0, \quad (32)$$

представляют собой комплексные собственные частоты осциллятора с затуханием. В то же время уравнение $D_0(\omega) = 0$ определяет собственные частоты свободного осциллятора, т. е. при отсутствии его взаимодействия с термостатом.

Таким образом, формула (25) принимает вид

$$\Delta_\lambda F = F - F_0 = T \sum_{n=0}^{\infty}{}' \ln \frac{D(i\omega_n)}{D_0(i\omega_n)}. \quad (33)$$

Следует отметить, что выражение (33) представляет собой основную формулу для свободной энергии в общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса [50]. Эту формулу можно получить в рамках общей теории, используя, в частности, метод интегрирования по параметру взаимодействия [53, 54] аналогично тому, как это было сделано в разд. 3 для задачи об осцилляторе с затуханием.

Поскольку соотношения (30) и (31) тесно связаны друг с другом, а выражение (25) совпадает с (33), приходим к заключению, что общая теория сил Казимира и Ван дер Ваальса описывает обусловленную взаимодействием часть свободной энергии осциллятора с затуханием.

Ввиду того что на бесконечно далеких расстояниях взаимодействие обращается в нуль, при изучении взаимодействия Казимира и Ван дер Ваальса между телами параметр взаимодействия λ можно в конечном счете связать с расстоянием между ними. В этом случае свободные энергии F и F_0 и дисперсионные функции $D(\omega)$ и $D_0(\omega)$ в (33) отвечают соответственно расстоянию l между телами и случаю, когда тела находятся очень далеко друг от друга. Следовательно, в пределе $l \to \infty$ имеем $D(\omega)/D_0(\omega) \to 1$. Если функция $D(\omega)$ есть произведение нескольких дисперсионных функций, то не зависящие от l множители сокращаются и не вносят вклада в (33). Остающееся отношение двух функций обычно рассматривают как нормированную дисперсионную функцию, которая задает зависящий от расстояния спектр собственных мод в системе.

Далее, собственные моды в системе макроскопических тел различной геометрии могут зависеть от переменных, имеющих непрерывный или квазинепрерывный спектр значений, таких как компоненты волнового вектора. Выделяя эти непрерывные переменные и обозначая их буквой β, приходим с помощью соотношения (33) к следующей форме записи для обусловленной взаимодействием Казимира и Ван дер Ваальса части свободной энергии:

$$\Delta_\lambda F = F - F_0 = T \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int \rho(\beta)\, d\beta \ln D(\beta, i\omega_n), \quad (34)$$

где $\rho(\beta)$ — плотность состояний.

Формулы (25) или (26) для свободной энергии осциллятора с затуханием не обсуждались в литературе, несмотря на их очевидную связь с хорошо известной приведенной статистической суммой (27). Вместо этого обычно используется модифицированная форма этого результата, которая получается из формулы (25) ее преобразованием к интегрированию вдоль вещественной оси частот (ср. (24)) с использованием равенства $D(\beta, -\omega) = D^*(\beta, \omega)$ и последующим интегрированием по частям. Это приводит к следующему эквивалентному формуле (25) (и (33)) выражению:

$$\Delta_\lambda F = \int_0^\infty T \ln\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \Delta_\lambda \rho(\omega)\, d\omega, \quad (35)$$

$$\Delta_\lambda \rho(\omega) = \rho - \rho_0 = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial\omega} \ln \frac{D(\omega)}{D_0(\omega)}. \quad (36)$$

Появление здесь частной производной по частоте вместо полной производной связано с возможным появлением дополнительных переменных, от которых может зависеть дисперсионная функция. Такая возможность обсуждается в конце данного раздела, а также в разд. 7.

В отличие от теории взаимодействия Казимира и Ван дер Ваальса, в рамках которой рассматривается, как правило, только обусловленная взаимодействием часть свободной энергии, простая модель осциллятора с затуханием позволяет описать свободную энергию (26) взаимодействующего с окружением осциллятора с затуханием. Переписывая (26) в форме, аналогичной (35), (36), и используя определение (32) для функции $D(\omega)$, получаем

$$F = \int_0^\infty T \ln\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \rho(\omega)\, d\omega, \quad (37)$$

$$\rho(\omega) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial\omega} \ln\big(M D(\omega)\big). \quad (38)$$

Вследствие вытекающего из (10) и (32) равенства $M D(\omega) = \chi_Q^{-1}(\omega)$, из соотношений (37), (38) в рамках исходной модели осциллятора с затуханием находим

$$F = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty T \ln\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \mathrm{Im}\,\frac{d \ln \chi_Q(\omega)}{d\omega}\, d\omega, \quad (39)$$

что в точности совпадает с результатом для свободной энергии, используемым в теории осциллятора, билинейно взаимодействующего с термостатом [12–15, 17, 26].

Аналогично выражениям (35), (36), обусловленную взаимодействием свободную энергию (34) в общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса также можно представить в виде

$$\Delta_\lambda F = \int_0^\infty T \ln\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \Delta_\lambda \rho(\omega)\, d\omega, \quad (40)$$

$$\Delta_\lambda \rho(\omega) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\,\frac{\partial}{\partial\omega} \int \rho(\beta)\, d\beta \ln D(\beta, \omega). \quad (41)$$

Вообще говоря, любая из формул (26), (39) может использоваться для описания свободной энергии осциллятора с затуханием. Поскольку выражение (26) имеет более простой вид и не содержит

производной по частоте от восприимчивости осциллятора, форма записи свободной энергии (26) или (33) кажется более предпочтительной по сравнению с (39) или (37), (38). Это тем более верно в отношении анализа более сложных задач, включая типичные задачи теории сил Казимира и Ван дер Ваальса, где запись свободной энергии в виде (34) имеет ряд значительных преимуществ по сравнению с (40), (41).

Вдоль вещественной оси частот проницаемости принимают, как известно, комплексные значения и могу проявлять сложное поведение. Напротив, они принимают вещественные значения и показывают сравнительно простое монотонное поведение на верхней мнимой полуоси частот. В этом состояла аргументация Лифшица [1] при преобразовании его основного результата, на начальном этапе включающего интегрирование по вещественным частотам, к форме, включающей суммирование по мацубаровским частотам вдоль верхней мнимой полуоси частот[2)].

К тому же производные проницаемостей по частоте, возникающие после применения (41) к неоднородным конденсированным системам, могут драматически усложнить вид результата по сравнению с его формой в (34). Взяв в качестве примера хорошо известные дисперсионные функции для собственных мод в задаче Лифшица, нетрудно получить конкретные громоздкие выражения, содержащие производные от проницаемостей по частоте под знаком интегрирования вдоль полуоси вещественных частот. Из всего сказанного видно, что представление свободной энергии в виде (34) намного более предпочтительно по сравнению с (40), (41).

Заметим, что величина $\rho(\omega)$ фигурирует в (37) как эффективная спектральная плотность возбуждений. Для сводящейся в пределе пренебрежимо малой диссипации к дельта-функции величины $\rho(\omega)$ из формулы (37) получается свободная энергия свободного осциллятора. В то же время величина $\Delta_\lambda\rho(\omega)$ в (36) и (41) есть в лучшем случае разность между эффективными спектральными плотностями системы при наличии и отсутствии взаимодействия.

Далее, выражения для различных термодинамических потенциалов будут содержать одну и ту же величину $\Delta_\lambda\rho(\omega)$ только при отсутствии ее температурной зависимости. Согласно общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса, формулы (34) и (40), (41) для свободной энергии сохраняют свой вид в случае зависящих от температуры проницаемостей, что приводит к температурной зависимости величины $\Delta_\lambda\rho(\omega,T)$. При этом выражение для внутренней энергии, аналогичное по форме свободной энергии (40), (41), будет содержать другую величину $\Delta_\lambda\rho_E(\omega,T)\neq\Delta_\lambda\rho(\omega,T)$:

$$\Delta_\lambda E=\int\limits_0^\infty \frac{\hbar\omega}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\Delta_\lambda\rho_E(\omega,T)\,d\omega, \tag{42}$$

$$\Delta_\lambda\rho_E(\omega,T)=-\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}+\frac{T}{\omega}\frac{\partial}{\partial T}\right)\times \\ \times\int\rho(\beta)\,d\beta\ln D(\beta,\omega,T). \tag{43}$$

Для билинейной связи центрального осциллятора с термостатом функция демпфирования осциллятора в модели Цванцига – Калдейры – Леггетта, как известно, не зависит от температуры. Расширение этой модели, приводящее к тем же формулам (25), (26), (33) и (35)–(39), но при наличии температурной зависимости функции демпфирования $\gamma(\omega,T)$, индуцированной билинейной связью с окружением, будет рассмотрено в разд. 7.

6. ПАРНЫЕ И МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕЖДУ ЧАСТЯМИ ТЕРМОСТАТА

Выявление близкой аналогии между двумя теориями позволяет рассмотреть вопрос о существовании в модели осциллятора с затуханием аналога, который бы соответствовал, по крайней мере с формальной точки зрения, взаимодействию Казимира и Ван дер Ваальса между макроскопическими телами. В этом разделе будет показано, что таким аналогом является взаимодействие между разными частями термостата.

Хотя составляющие части термостата непосредственно друг на друга не воздействуют, между ними имеется эффективное непрямое взаимодействие через из связь с центральным осциллятором. Вследствие многочастичного происхождения взаимодействия, свободная энергия (25) и другие термодинамические потенциалы неаддитивны по отношению к вкладам отдельных составляющих термостата, в то время как функция демпфирования (19) и спектральная плотность взаимодействия (20) представляют собой аддитивные величины.

Парные и трехчастичные вклады в свободную энергию вытекают из соотношения (25) в пределе слабой связи. Рассмотрим термостат, подразделен-

[2)] Это было сделано Лифшицем до появления статьи Мацубара.

ный на некоторое число различных частей, чему отвечает функция демпфирования $\gamma = \sum_{n=1}^{p} \gamma_n$. Если приближение слабой связи применимо к взаимодействию центрального осциллятора с термостатом в целом, то можно разложить (25) по степеням γ и представить свободную энергию в виде

$$F = \sum_n F_n + \sum_{n<m} F_{nm} + \sum_{n<m<l} F_{n,m,l} + \ldots$$

Здесь величина F_n описывает индивидуальный вклад n-й части термостата в свободную энергию, содержащий только параметр γ_n и его степени.

Парное взаимодействие приводит к парному члену в свободной энергии, и основной вклад от каждой пары отвечает притяжению между частями:

$$F_{12} = -T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^2 \gamma_1(i\omega_n)\gamma_2(i\omega_n)}{(\Omega^2 + \omega_n^2)^2}. \qquad (44)$$

Аналогично, основной трехчастичный вклад в свободную энергию от комбинации трех различных частей есть

$$F_{123} = 2T \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n^3 \gamma_1(i\omega_n)\gamma_2(i\omega_n)\gamma_3(i\omega_n)}{(\Omega^2 + \omega_n^2)^3}. \qquad (45)$$

Суммы по мацубаровским частотам в (44) и (45) сходятся даже в простейшем случае омического режима, когда они могут быть выражены соответственно через элементарные и специальные функции. Так, предполагая $\gamma_{1,2}$ не зависящими от частоты, для парного вклада находим

$$F_{12} = -\frac{2\hbar\gamma_1\gamma_2}{\Omega} \left[\operatorname{cth} \frac{\hbar\Omega}{2T} - \frac{\hbar\Omega}{2T} \operatorname{sh}^{-2} \frac{\hbar\Omega}{2T} \right]. \qquad (46)$$

Обращение взаимодействия в нуль в пределе высоких температур, не имеющее места в общем случае, связано здесь с уже упоминавшимся в разд. 3 специфическим свойством модели Цванцига – Калдейры – Леггетта.

7. ОСЦИЛЛЯТОР С ЗАТУХАНИЕМ, ЛИНЕЙНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЙ С ДИССИПАТИВНЫМ ТЕРМОСТАТОМ

Большое число свободных осцилляторов с бесконечно малыми функциями демпфирования, формирующих спектральную структуру термостата в модели осциллятора с затуханием, можно рассматривать как собственные моды термостата. Соответствующие собственные частоты вещественны, поскольку предполагается, что при отсутствии влияния центрального осциллятора термостат является замкнутой системой.

Связь центрального осциллятора с отдельной модой термостата считается слабой, что объясняет очень слабое возмущение состояния составляющих термостат мод и согласуется с билинейной формой гамильтониана взаимодействия. В то же время центральный осциллятор может испытывать значительное диссипативное влияние, коллективно создаваемое большим количеством мод термостата. При этом функция демпфирования $\gamma(\omega)$ центрального осциллятора не обязательно мала, а ее частотная зависимость может изменяться в широких пределах в соответствии с формулами (19)–(21), где спектральная плотность взаимодействия изменяется вместе со спектральным распределением вещественных собственных частот термостата [22, 23, 33, 37, 40].

Такой подход широко и эффективно используется для изучения задач, касающихся, в основном, возникновения диссипации и связанных с ней эффектов в квантовых динамических системах. С другой стороны, нельзя исключить возможность того, что взаимодействующие с центральным осциллятором моды не исчерпывают все степени свободы термостата. Дополнительные внутренние каналы термостата, находящиеся в контакте с его основными модами, но непосредственно не связанные с центральным осциллятором, могут приводить к формированию зависящих от частоты и температуры диссипативных восприимчивостей $\chi_\alpha(\omega, T)$, заменяющих в этом случае рассматривавшиеся в исходной модели величины с бесконечно малыми функциями демпфирования. Влияние центрального осциллятора на восприимчивости составляющих элементов термостата, предполагаемое по-прежнему пренебрежимо малым, следует в этом случае сравнивать с соответствующими вкладами от дополнительных каналов, которые могут доминировать.

Без конкретизации части полного гамильтониана, связанной с дополнительными каналами, рассматриваемая расширенная модель, вообще говоря, не предназначена для изучения квантовой динамики полной системы. Однако, как показано в этом разделе, обусловленные взаимодействием термодинамические величины осциллятора с затуханием могут быть описаны в расширенных рамках аналогично рассмотренному в разд. 3 случаю. Ключевым здесь является то обстоятельство, что гамильтониан

взаимодействия центрального осциллятора с термостатом, необходимый для нахождения соответствующих термодинамических величин, в расширенной модели остается неизменным и может быть выделен из полного расширенного гамильтониана взятием производной по выбранному параметру взаимодействия.

Таким образом, представим полный гамильтониан в виде

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2}M\Omega^2\hat{Q}^2 - \hat{Q}f_{ext,Q} - \sum_{\alpha=1}^{N}\hat{q}_\alpha f_{ext,\alpha} + \\ + \sum_{\alpha=1}^{N}\frac{1}{2\chi_\alpha(0,T)}\left(\hat{q}_\alpha - C_\alpha\chi_\alpha(0,T)\hat{Q}\right)^2 + \hat{\tilde{H}}, \quad (47)$$

где вид слагаемого $\hat{\tilde{H}}$ не фиксирован, за исключением того, что он не содержит ни относящихся к центральному осциллятору операторов $\hat{Q}$, $\hat{P}$, ни констант связи C_α.

В соответствии с билинейной формой взаимодействия и определением линейных восприимчивостей, динамическое уравнение для $\hat{q}_\alpha(t)$, вытекающее из гамильтониана (47) после использования преобразования Фурье, статистического усреднения и исключения дополнительных степеней свободы, имеет вид

$$\chi_\alpha^{-1}(\omega,T)q_\alpha(\omega) = C_\alpha Q(\omega) + f_{ext,\alpha}(\omega). \quad (48)$$

Уравнение (48) отличается от (14) только вследствие различия между (11) и диссипативной восприимчивостью α-й составляющей термостата $\chi_\alpha(\omega,T)$.

Используя выражения (47), (48) вместо (12), (14), а в остальном следуя разд. 2, приходим к тем же равенствам (1)–(3) и флуктуационно-диссипационным соотношениям (4)–(7), а также к (9), (10) для центрального осциллятора с затуханием. Также заключаем, что равенства (13), (15), (16) и (19)–(21) будут в рассматриваемом случае выполняться после подстановки в них модифицированных восприимчивостей термостата $\chi_\alpha(\omega,T)$ вместо исходных (11).

Переходя далее к выводу разд. 3, умножаем константы связи C_α в гамильтониане (47) на один и тот же параметр взаимодействия λ. Это не приводит к изменениям восприимчивостей термостата $\chi_\alpha(\omega,T)$, не подверженных заметному влиянию центрального осциллятора и, следовательно, не зависящих от λ. Ввиду выполнения равенства (19), функция демпфирования центрального осциллятора по-прежнему является квадратичной функцией λ: $\gamma(\omega,T,\lambda) = \lambda^2\gamma(\omega,T)$. Таким образом, после получения такого же выражения (23) для производной модифицированного гамильтониана (47) по параметру λ и использования соотношений (4), (5) и (15), (16) можно провести интегрирование по параметру взаимодействия и получить те же самые выражения (24)–(26), (33) для обусловленной взаимодействием части свободной энергии осциллятора с затуханием, а также и формулу (27) для приведенной статистической суммы.

Свободная энергия в любой из форм записи (25), (26), (33), (37)–(39) становится в рамках расширенного подхода применимой к случаю, в котором функция демпфирования $\gamma(\omega,T)$ осциллятора с затуханием зависит, в любой допустимой форме, не только от частоты, но также и от температуры, несмотря на билинейную форму взаимодействия центрального осциллятора с термостатом. В этих условиях выражение (28) для внутренней энергии должно быть модифицировано:

$$E = T\sum_{n=0}^{\infty}{}' \frac{2\Omega^2 + \omega_n\gamma(i\omega_n) - \omega_n^2\left(\dfrac{\partial}{\partial\omega_n} + \dfrac{T}{\omega_n}\dfrac{\partial}{\partial T}\right)\gamma(i\omega_n,T)}{\Omega^2 + \omega_n^2 + \omega_n\gamma(i\omega_n,T)}. \quad (49)$$

Выражение (49) можно также представить в виде

$$E = \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\rho_E(\omega,T)\,d\omega, \quad (50)$$

$$\rho_E(\omega,T) = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial}{\partial\omega} + \frac{T}{\omega}\frac{\partial}{\partial T}\right) \times \\ \times \ln\bigl(MD(\omega,T)\bigr), \quad (51)$$

который согласуется с (42), (43).

Представленная в этом разделе расширенная модель показывает, что термодинамику квантового осциллятора с затуханием, билинейно взаимодействующего с термостатом, можно теоретически описать без использования модельных предположений, упрощающих реальную структуру термостата. Это позволяет, в частности, рассматривать в рамках такой модели RCL-контур, металлическое сопротивление которого обусловлено электрон-фононным взаимодействием, рассеянием электронов на примесях и другими физическими процессами в металле. Вклю-

чение свободных от модельных представлений внутренних процессов в термостате в модель осциллятора с затуханием было здесь проведено по аналогии с общей теорией сил Казимира и Ван дер Ваальса, применимой к реальным конденсированным системам с диэлектрическими проницаемостями общего вида.

Приведенное выше рассмотрение также показывает внутреннюю несогласованность недавней критики общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса, которая основывается на отсутствии в теории явного выражения для полного гамильтониана системы квантового электромагнитного поля в конденсированных средах [57–61]. Заключение, сделанное в работах [57–61], состоит в том, что такая теория не может привести к последовательному микроскопическому квантовому описанию термодинамических величин квантовых систем с взаимодействием.

Рассмотренная здесь расширенная модель представляет собой сравнительно простой пример, показывающий ошибочность этой критики. Уже из этого примера видно, что для нахождения обусловленной взаимодействием части термодинамических величин билинейно связанной с термостатом квантовой системы нет необходимости в знании части полного гамильтониана, описывающей термостат и не содержащей соответствующих параметров взаимодействия. Так как флуктуационно-диссипационные соотношения идентифицируют функции отклика исходя из их микроскопических выражений, данный подход обоснован с микроскопической точки зрения. При этом линейные функции отклика термостата можно далее рассматривать как известные из других теоретических или экспериментальных исследований. Это позволяет отделить рассматриваемую задачу от полного динамического описания квантовой системы в целом.

Следует также упомянуть о ряде моделей поглощающих конденсированных сред, взаимодействующих с квантовым электромагнитным полем, которые используются, в частности, для изучения взаимодействия Казимира и Ван дер Ваальса [57, 58, 60–74]. Эти модели включают в рассмотрение линейно поляризуемые осцилляторы (или состоящую из микроскопических гармонических полей среду), которые взаимодействуют с электромагнитным полем, как в ранних работах [75, 76], и, в дополнение к этому, с осцилляторами термостата [62, 77]. Последнее приводит к диссипативным эффектам в системе, аналогичным рассматриваемым в этой статье в рамках модели осциллятора с затуханием. Каноническое квантование электромагнитного поля, проведенное Хаттнером и Барнеттом [77], после диагонализации полного гамильтониана рассматриваемой модели методом Фано [78] привело к квантовым флуктуациям тока, полностью совместимым со всеми флуктуационно-диссипационными соотношениями. Кроме того, выбор функциональных параметров гамильтониана взаимодействия позволил имитировать произвольную зависящую от частоты диссипативную диэлектрическую функцию, удовлетворяющую соотношениям Крамерса – Кронига. Получившаяся в результате макроскопическая квантовая электродинамика поглощающих диспергирующих сред используется для изучения квантовых эффектов взаимодействия электромагнитного поля в конденсированных телах и их окрестностях [59, 65, 77, 79–94].

Поскольку полученные в рамках модели работы [77] результаты в итоге выражаются через имеющую произвольную частотную зависимость диэлектрическую функцию системы, можно было бы ожидать, что эти результаты имеют более общий характер, чем лежащий в основе модели гамильтониан. Это означало бы, однако, что конечные результаты выражаются через диэлектрические проницаемости сред в общем случае при наличии диссипации. Хотя данное предположение справедливо в отношении теории взаимодействия Казимира и Ван дер Ваальса [2], в общем случае оно не было подтверждено [95] (см. также [96]). Кроме того, в отличие от частотной зависимости, зависимость диэлектрических проницаемостей от температуры не воспроизводится в рамках обсуждаемого микроскопического модельного гамильтониана, содержащего только квадратичные и билинейные операторные члены при отсутствии зависящих от температуры параметров.

Таким образом, результаты для дисперсионных взаимодействий, полученные в рамках модели поглощающих сред, могут быть выражены через диэлектрические проницаемости материалов и должны находиться в согласии с общей теорией сил Казимира и Ван дер Ваальса [2, 4] в рамках области ее применимости. Сказанное, однако, не имеет отношения к результатам этой статьи, в которой модель осциллятора с затуханием представляет открытую малую квантовую систему, а не составную часть модели диссипативных диэлектрических проницаемостей конденсированных сред. В статье была выявлена аналогия между моделью осциллятора с затуханием в ее исходной форме, в которой центральный осциллятор билинейно взаимодействует с осцилляторами термостата, и общей теорией взаимодействия Казимира и Ван дер Ваальса, свободной от

модельных предположений в ее рассмотрении длинноволнового флуктуационного квантового электромагнитного поля, взаимодействующего с конденсированными телами.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, что равновесная термодинамика осциллятора с затуханием, билинейно взаимодействующего с термостатом, изученная ранее в рамках модели Цванцига – Калдейры – Леггетта, может быть описана результатами общей теории сил Казимира и Ван дер Ваальса. Найденное значительное перекрытие между двумя теориями детально изучено. Представлена модифицированная модель, допускающая частотную и температурную зависимости функции демпфирования центрального осциллятора, и получены соответствующие модифицированные термодинамические потенциалы.

Финансирование. Работа выполнена в рамках Государственного задания ИФТТ РАН Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 гг.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ **29**, 94 (1955) [E. M. Lifshitz, Sov. Phys. JETP **2**, 73 (1956)].

2. И. Е. Дзялошинский, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **36**, 1797 (1959) [I. E. Dzyaloshinskii and L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **9**, 1282 (1959)].

3. И. Е. Дзялошинский, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ **37**, 229 (1959) [I. E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **10**, 161 (1959)].

4. I. E. Dzyaloshinskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, Adv. Phys. **10**, 165 (1961).

5. S. K. Lamoreaux, Rep. Progr. Phys. **68**, 201 (2004).

6. V. A. Parsegian, *Van der Waals Forces: A Handbook for Biologists, Chemists, Engineers, and Physicists*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK (2006).

7. G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, Rev. Mod. Phys. **81**, 1827 (2009).

8. M. Bordag, G. L. Klimchitskaya, U. Mohideen, and V. M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*, Oxford Univ. Press, Oxford, UK (2009).

9. R. H. French, V. A. Parsegian, R. Podgornik, R. F. Rajter, A. Jagota, J. Luo, D. Asthagiri, M. K. Chaudhury, Y.-m. Chiang, S. Granick, S. Kalinin, M. Kardar, R. Kjellander, D. C. Langreth, J. Lewis, S. Lustig, D. Wesolowski, J. S. Wettlaufer, W.-Y. Ching, M. Finnis, F. Houlihan, O. A. von Lilienfeld, C. J. van Oss, and T. Zemb, Rev. Mod. Phys. **82**, 1887 (2010).

10. *Casimir Physics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 834, ed. by D. Dalvit, P. Milonni, D. Roberts, and F. Rosa, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg (2011).

11. L. M. Woods, D. A. R. Dalvit, A. Tkatchenko, P. Rodriguez-Lopez, A. W. Rodriguez, and R. Podgornik, Rev. Mod. Phys. **88**, 045003 (2016).

12. G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell, Phys. Rev. Lett. **55**, 2273 (1985).

13. G. Ford, J. Lewis, and R. O'Connell, Ann. of Phys. **185**, 270 (1988).

14. G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell, J. Stat. Phys. **53**, 439 (1988).

15. G. W. Ford and R. F. O'Connell, Physica E **29**, 82 (2005).

16. P. Hänggi and G.-L. Ingold, Acta Phys. Pol. B **37**, 1537 (2006).

17. G. W. Ford and R. F. O'Connell, Phys. Rev. B **75**, 134301 (2007).

18. C. Hörhammer and H. Büttner, J. Stat. Phys. **133**, 1161 (2008).

19. P. Hänggi, G.-L. Ingold, and P. Talkner, New J. Phys. **10**, 115008 (2008).

20. G.-L. Ingold, P. Hänggi, and P. Talkner, Phys. Rev. E **79**, 061105 (2009).

21. T. G. Philbin, New J. Phys. **14**, 083043 (2012).

22. B. Spreng, G.-L. Ingold, and U. Weiss, Europhys. Lett. **103**, 60007 (2013).

23. R. Adamietz, G.-L. Ingold, and U. Weiss, Eur. Phys. J. B **87**, 90 (2014).

24. T. G. Philbin and J. Anders, J. Phys. A **49**, 215303 (2016).

25. M. Kolář, A. Ryabov, and R. Filip, Sci. Rep. **9**, 10855 (2019).

26. P. Talkner and P. Hänggi, Rev. Mod. Phys. **92**, 041002 (2020).

27. В. Б. Магалинский, ЖЭТФ **36**, 1942 (1959) [V. B. Magalinskii, Sov. Phys. JETP **9**, 1381 (1959)].

28. G. W. Ford, M. Kac, and P. Mazur, J. Math. Phys. **6**, 504 (1965).

29. P. Ullersma, Physica **32**, 27, 56, 74, 90 (1966).

30. R. Zwanzig, J. Stat. Phys. **9**, 215 (1973).

31. A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. **46**, 211 (1981).

32. A. Schmid, J. Low Temp. Phys. **49**, 609 (1982).

33. A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Ann. of Phys. **149**, 374 (1983).

34. H. Grabert, U. Weiss, and P. Talkner, Z. Phys. B **55**, 87 (1984).

35. P. S. Riseborough, P. Hanggi, and U. Weiss, Phys. Rev. A **31**, 471 (1985).

36. G. W. Ford and M. Kac, J. Stat. Phys. **46**, 803 (1987).

37. H. Grabert, P. Schramm, and G.-L. Ingold, Phys. Rep. **168**, 115 (1988).

38. G. W. Ford, J. T. Lewis, and R. F. O'Connell, Phys. Rev. A **37**, 4419 (1988).

39. P. Hänggi and G.-L. Ingold, Chaos **15**, 026105 (2005).

40. U. Weiss, *Quantum Dissipative Systems*, World Sci., Singapore (2012).

41. A. O. Caldeira, *An Introduction to Macroscopic Quantum Phenomena and Quantum Dissipation*, Cambridge Univ. Press, New York (2014).

42. A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. T. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987).

43. G.-L. Ingold, A. Lambrecht, and S. Reynaud, Phys. Rev. E **80**, 041113 (2009).

44. Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, Письма ЖЭТФ **15**, 567 (1972) [Yu. S. Barash and V. L. Ginzburg, JETP Lett. **15**, 403 (1972)].

45. C. H. Obcemea, Int. J. Quant. Chem. **31**, 113 (1987).

46. F. London, Trans. Faraday Soc. **33**, 8b (1937).

47. H. B. G. Casimir, Proc. Kon. Nederland. Akad. Wetensch. **51**, 793 (1948).

48. N. Van Kampen, B. Nijboer, and K. Schram, Phys. Lett. A **26**, 307 (1968).

49. B. W. Ninham, V. A. Parsegian, and G. H. Weiss, J. Stat. Phys. **2**, 323 (1970).

50. Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, УФН **116**, 5 (1975) [Y. S. Barash and V. L. Ginzburg, Sov. Phys. Uspekhi **18**, 305 (1975)].

51. А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, Физматгиз, Москва (1962).

52. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния*, Физматлит, Москва (2004).

53. Ю. С. Бараш, *Силы Ван дер Ваальса*, Наука, Москва (1988).

54. Y. S. Barash and V. L. Ginzburg, in *The Dielectric Function of Condensed Systems*, ed. by L. V. Keldysh, D. A. Kirzhnitz, and A. A. Maradudin, Elsevier (1989), Ch. 6, p. 389.

55. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, Москва (1976) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Butterworth-Heinemann, Oxford (1980)].

56. А. А. Абрикосов, *Основы теории металлов*, Наука, Москва (1987).

57. F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit, and P. W. Milonni, Phys. Rev. A **81**, 033812 (2010).

58. G. Barton, New J. Phys. **12**, 113045 (2010).

59. T. G. Philbin, New J. Phys. **12**, 123008 (2010).

60. F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit, and P. W. Milonni, Phys. Rev. A **84**, 053813 (2011).

61. T. G. Philbin, New J. Phys. **13**, 063026 (2011).

62. D. Kupiszewska, Phys. Rev. A **46**, 2286 (1992).

63. G. Barton, Proc. Roy. Soc. Lond. A **453**, 2461 (1997).

64. S. Y. Buhmann and D.-G. Welsch, Progr. Quant. Electr. **31**, 51 (2007).

65. S. Scheel and S. Y. Buhmann, Acta Phys. Slovaca **58**, 675 (2008).

66. F. S. S. Rosa, D. A. R. Dalvit, and P. W. Milonni, in *Doing Physics*: *A Festshcrift for Thomas Erber*, Lect. Notes in Physics, ed. by P. W. Johnson, Illinois Institute of Technology Press, Chicago (2010), Ch. 18, p. 187; arXiv:0912.0279.

67. G. Barton, J. Phys.: Condens. Matter **23**, 355004 (2011).

68. C. Eberlein and R. Zietal, Phys. Rev. A **86**, 062507 (2012).

69. R. Bennett, Phys. Rev. A **89**, 062512 (2014).

70. M. Bordag, Phys. Rev. A **96**, 062504 (2017).

71. М. А. Браун, ТМФ **190**, 277 (2017) [M. A. Braun, Theor. and Math. Phys. **190**, 237 (2017)].

72. J. Klatt, M. B. Farías, D. A. R. Dalvit, and S. Y. Buhmann, Phys. Rev. A **95**, 052510 (2017).

73. М. Бордаг, ТМФ **195**, 391 (2018) [M. Bordag, Theor. and Math. Phys. **195**, 834 (2018)].

74. H. Safari, P. Barcellona, S. Y. Buhmann, and A. Salam, New J. Phys. **22**, 053049 (2020).

75. U. Fano, Phys. Rev. **103**, 1202 (1956).

76. J. J. Hopfield, Phys. Rev. **112**, 1555 (1958).

77. B. Huttner and S. M. Barnett, Phys. Rev. A **46**, 4306 (1992).

78. U. Fano, Phys. Rev. **124**, 1866 (1961).

79. S. M. Barnett, B. Huttner, and R. Loudon, Phys. Rev. Lett. **68**, 3698 (1992).

80. T. Gruner and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **51**, 3246 (1995).

81. R. Matloob, R. Loudon, S. M. Barnett, and J. Jeffers, Phys. Rev. A **52**, 4823 (1995).

82. R. Matloob and R. Loudon, Phys. Rev. A **53**, 4567 (1996).

83. T. Gruner and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **53**, 1818 (1996).

84. H. T. Dung, L. Knöll, and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **57**, 3931 (1998).

85. A. Tip, L. Knöll, S. Scheel, and D.-G. Welsch, Phys. Rev. A **63**, 043806 (2001).

86. L. G. Suttorp and M. Wubs, Phys. Rev. A **70**, 013816 (2004).

87. N. A. R. Bhat and J. E. Sipe, Phys. Rev. A **73**, 063808 (2006).

88. C. Eberlein and R. Zietal, Phys. Rev. A **86**, 022111 (2012).

89. R. Bennett and C. Eberlein, Phys. Rev. A **88**, 012107 (2013).

90. S. Y. Buhmann, *Dispersion Forces I*: *Macroscopic Quantum Electrodynamics and Ground-State Casimir, Casimir–Polder and Van der Waals Forces*, Springer, Berlin/Heidelberg (2013).

91. A. Drezet, Phys. Rev. A **96**, 033849 (2017).

92. M. Kosik, O. Burlayenko, C. Rockstuhl, I. Fernandez-Corbaton, and K. Słowik, Sci. Rep. **10**, 10855 (2020).

93. C. Forestiere, G. Miano, M. Pascale, and R. Tricarico, Phys. Rev. A **102**, 043704 (2020).

94. C. You, A. C. Nellikka, I. D. Leon, and O. S. Magaña-Loaiza, Nanophotonics **9**, 1243 (01 Jun. 2020).

95. В. И. Перель, Я. М. Пинский, ЖЭТФ **54**, 1889 (1968) [V. I. Perel' and Y. M. Pinskii, Sov. Phys. JETP **27**, 1014 (1968)].

96. L. P. Pitaevskii, in *Casimir Physics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 834, ed. by D. Dalvit, P. Milonni, D. Roberts, and F. Rosa, Springer (2011), Ch. 2, p. 23.