

# СИММЕТРИЙНЫЙ ПОДХОД В ЗАДАЧЕ О РАСШИРЕНИИ ГАЗОВ В ВАКУУМ

*E. A. Кузнецов<sup>a,b,c\*</sup>, М. Ю. Каган<sup>d,e</sup>*

*<sup>a</sup> Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук  
119991, Москва, Россия*

*<sup>b</sup> Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук  
142432, Черноголовка, Московская обл., Россия*

*<sup>c</sup> Сколковский Институт науки и технологий  
121205, Сколково, Московская обл., Россия*

*<sup>d</sup> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
109028, Москва, Россия*

*<sup>e</sup> Институт физических проблем им. П. Л. Капицы Российской академии наук  
119334, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 7 января 2021 г.  
после переработки 7 января 2021 г.  
Принята к публикации 7 января 2021 г.

Представлен краткий обзор результатов о разлете квантовых и классических газов в вакуум на основе использования симметрий. Для квантовых газов в приближении Грасса–Питаевского дополнительные симметрии возникают для газов с химическим потенциалом  $\mu$ , зависящим от плотности  $n$  степенным образом с показателем  $\nu = 2/D$ , где  $D$  – размерность пространства. Для газовых конденсатов бозе-атомов при температурах  $T \rightarrow 0$  эта симметрия возникает для двумерных систем. При  $D = 3$  и, соответственно,  $\nu = 2/3$  такая ситуация реализуется для взаимодействующего ферми-газа при низких температурах в так называемом унитарном пределе [1]. Эта же симметрия для классических газов в трехмерной геометрии возникает для газов с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Оба эти факта были обнаружены в 1970 году независимо Талановым [2] для двумерного нелинейного Шредингера (совпадающего с уравнением Грасса–Питаевского), описывающего стационарную самофокусировку света в средах с керровской нелинейностью, а для классических газов – Анисовым и Лысиковым [3]. В квазиклассическом пределе уравнения Грасса–Питаевского совпадают с уравнениями гидродинамики идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1+2/D$ . Автомодельные решения в этом приближении описывают на фоне расширяющегося газа угловые деформации газового облака в рамках уравнений типа Ермакова. Такого рода изменения формы расширяющегося облака наблюдаются в многочисленных экспериментах как при разлете газа после воздействия мощного лазерного излучения, например, на металл, так и при разлете квантовых газов в вакуум.

*Статья для специального выпуска ЖЭТФ, посвященного 90-летию И. Е. Дзялошинского*

**DOI:** 10.31857/S0044451021040222

## 1. ВВЕДЕНИЕ: ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Симметрии в физике всегда играли ключевую роль при получении точных соотношений и результатов, на них основанных. Вряд ли имеет смысл пе-

речислять много различных физических примеров, где используются симметрии. Нам кажется достаточным сослаться на курс Ландау–Лифшица [4], где их великое множество. В данном кратком обзоре мы рассмотрим, как симметрии реализуются в задаче разлета в вакуум квантовых и классических газов в рамках соответственно уравнений Грасса–Питаевского (ГП) и уравнений газовой динамики (уравнения непрерывности и уравнения Эйле-

---

\* E-mail: kuznetso@itp.ac.ru

ра для одноатомных газов с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ ). Если говорить о квантовых газах, то мы будем рассматривать такие, для которых химический потенциал  $\mu$  зависит от плотности  $n$  степенным образом с показателем  $\nu = 2/D$ , где  $D$  — размерность пространства. Именно только для таких значений показателя  $\nu$  возникает дополнительная симметрия. Отметим, что в приближении ГП при температуре  $T \rightarrow 0$  для конденсата слабонеидеального бозе-газа главным взаимодействием является  $s$ -рассеяние. Если длина рассеяния  $a_s$  положительна, то между атомами имеется отталкивание и состояние такого газа в магнитооптических ловушках оказывается устойчивым. При этом химический потенциал  $\mu = gn$ , где  $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ . Таким образом, только для двумерного бозе-газа появляется симметрия, о которой пойдет речь ниже. В случае отрицательной длины рассеяния между бозе-атомами возникает притяжение. В нелинейной оптике такого рода притяжение приводит к самофокусировке света для сред с керровской нелинейностью. Отталкивание, в свою очередь, приводит к дефокусировке светового пучка, которая приводит к тем же самым эффектам, что и дифракция в поперечном направлении к пучку. В случае  $a_s < 0$  бозе-конденсаты оказываются неустойчивыми, что приводит к формированию сжимающихся областей газа — коллапса (см. обзор [5] и ссылки там), наблюдаемому в эксперименте [6, 7]. Чтобы получить неустойчивое значение длины рассеяния в экспериментах, используют резонанс Фешбаха [8, 9], позволяющий изменять  $a_s$  в больших пределах: от очень больших положительных значений до сильно отрицательных. Если для бозе-атомов в случае отрицательных  $a_s$  возникает коллапс, то для ферми-газов  $s$ -притяжение обеспечивает образование куперовских пар, которые при  $T \rightarrow 0$  образуют сверхтекущий бозе-конденсат. Варьируя длину рассеяния с помощью резонанса Фешбаха, можно создать бозе-конденсат в так называемом унитарном пределе [1], который реализуется при условии  $(|a_s|k_F)^{-1} \rightarrow 0$ , где  $p_F = \hbar k_F$  — импульс Ферми. В этом режиме положительный химический потенциал  $\mu(n) = 2(1 + \beta)\varepsilon_F$ , где в соответствии с работами [10–13]  $\beta = -0.63$  есть универсальная константа, а

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 n)^{2/3}$$

— локальная энергия Ферми. Величина  $m$  представляет собой удвоенную массу ферми-атома. В унитарном пределе, таким образом, химический потенциал имеет степенную зависимость от плотности с показателем  $\nu = 2/3$ .

Наиболее простая симметрия в случае степенной зависимости химического потенциала от плотности — это симметрия относительно растяжений пространственных координат и времени вида

$$\mathbf{r} \rightarrow \alpha \mathbf{r}, \quad t \rightarrow \alpha^2 t, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — скейлинговый параметр. Этот факт легко проверить исходя из уравнения ГП [14] для волновой функции бозе-конденсата  $\psi$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \mu(n) \psi, \quad (2)$$

где  $n = |\psi|^2$ . Сохранение числа частиц  $N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$  и степенная зависимость  $\mu \propto n^{2/D}$  обеспечивают одинаковые зависимости от скейлингового параметра  $\alpha$  кинетического члена и химического потенциала (определенного нелинейность в (2)): они пропорциональны  $\alpha^{-2}$ .

В нелинейной оптике и физике плазмы уравнение ГП (2) имеет название нелинейного уравнения Шредингера (НУШ). Стандартный вид НУШ возникает после приведения к безразмерному виду уравнения (2):

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta \psi - (\nu + 1) |\psi|^{2\nu} \psi = 0, \quad (3)$$

которое представимо в гамильтоновом виде [5]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \psi^*}$$

с гамильтонианом

$$H = \int \left[ \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + |\psi|^{2(\nu+1)} \right] d\mathbf{r}. \quad (4)$$

Следует отметить, что скейлинговая симметрия (1) есть также в уравнении Шредингера для движения квантовореманнической частицы в потенциале  $U = -\beta r^{-2}$  независимо от знака  $\beta$  и при любой размерности  $D$ . Эта же симметрия присутствует и для гидродинамики идеального газа с показателями адиабаты  $\gamma = 5/3$  для потенциальных трехмерных течений [3] и  $\gamma = 2$  в случае двумерных течений. Последнее, в частности, связано с тем, что уравнение ГП (2) в квазиклассическом пределе (приближение Томаса–Ферми) совпадает с уравнениями гидродинамики для потенциальных течений газа [15, 16], и поэтому данная симметрия сохраняется в случае газовой динамики с  $\gamma = 1+2/D$ . На это обстоятельство внимание авторов [3] обратил Дзялошинский [17].

Однако скейлинговое преобразование не исчерпывает всех симметрий уравнений (2) и (3). Более общая является симметрия относительно преобразований Таланова [2] — преобразований конформного

типа, которые включают в себя как скейлинговые преобразования амплитуды, так и изменения фазы волновой функции  $\psi$ . Это преобразование было найдено для двумерного НУШ, описывающего стационарную самофокусировку света в среде с керровской нелинейностью. Роль времени в уравнении (3) играет координата  $z$  вдоль направления распространения пучка света.

При преобразованиях Таланова общего вида (для всех  $\nu = 2/D$ ) уравнение (3) остается инвариантным при замене волновой функции  $\psi$ , координат  $\mathbf{r}$  и времени  $t$  на новую волновую функцию  $\tilde{\psi}$  и новые координаты  $\mathbf{r}'$  и время  $t'$  [18]:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= \frac{\tau}{\tau + t} \exp \left[ \frac{i r^2}{4(\tau + t)} \right] \tilde{\psi}(\mathbf{r}', t'), \\ \mathbf{r}' &= \frac{\mathbf{r}\tau}{\tau + t}, \quad t' = \frac{t\tau}{\tau + t}.\end{aligned}\tag{5}$$

В линейной оптике эти соотношения известны как линзовье преобразования.

Важно отметить, что суперпозиция преобразований с  $\lambda_1 = \tau_1^{-1}$  и  $\lambda_2 = \tau_2^{-1}$  представляет преобразование (5) с  $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2$ . Таким образом, преобразования (5) образуют абелевую группу [18].

Прямыми следствием этой симметрии является теорема вириала, полученная Власовым, Петрищевым, Талановым [19] для двумерного НУШ с кубической нелинейностью:

$$\frac{d^2}{dt^2} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} = 4H,\tag{6}$$

Впервые эта теорема была установлена в работе [19] для фокусирующей нелинейности. Легко видеть, что уравнение (6) справедливо и в случае отталкивания (дефокусирующей нелинейности) [15, 16]. Важно, что теорема вириала (6) верна при любом значении  $\nu = 2/D$  [18, 20]. Отметим, что, с точки зрения классификации, НУШ с  $\nu = 2/D$  относится к так называемым критическим моделям [5, 18, 20].

Простое интегрирование уравнения (6) дает, что средний квадрат размера облака  $R^2 = \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r}/N$  меняется во времени квадратично:

$$NR^2 = 2Ht^2 + C_1 t + C_2.\tag{7}$$

В случае отталкивания (дефокусирующей нелинейности) гамильтониан  $H$  положителен. Поэтому при больших временах,  $t \rightarrow \infty$ , средний размер  $R$  растет со временем линейно. Соотношение (7) содержит две константы,  $C_1$  и  $C_2$ , которые являются новыми по сравнению с  $H$  и  $N$  интегралами движения. Однако

они отличаются от гамильтониана и числа частиц наличием явной зависимости от времени  $t$ :

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{d}{dt} \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} - 4Ht, \\ C_2 &= \int r^2 |\psi|^2 d\mathbf{r} - 2Ht^2 - C_1 t.\end{aligned}\tag{8}$$

Такого рода интегралы относятся к неавтономным, что, как будет видно далее, не позволяет установить полную интегрируемость при автомодельной редукции квазиклассических уравнений. Примером таких неавтономных интегралов движения служит закон сохранения центра масс, явно содержащий время  $t$ .

В случае газовой динамики впервые, по-видимому, эта симметрия была найдена Овсянниковым [21], а эффективно была использована Анисимовым и Лысиковым [3] для построения точного осесимметричного автомодельного решения, описывающего нелинейные угловые деформации газового облака на фоне его расширения в вакуум. Впоследствии было выяснено, что такого рода деформации наблюдаются в различных физических задачах, например, при воздействии мощного лазерного излучения на твердое вещество, в результате чего на фоне расширяющегося газового облака его первоначальная форма в виде диска преобразуется в сигарообразную форму (см. монографию [22] и содержащиеся там ссылки). Для квантовых газов при их расширении в вакуум такие трансформации являются типичными как для бозе-газов, так и для ферми-газов (см. соответственно работы [23] и [24, 25] и ссылки в них). Следует отметить, что первые масштабно-инвариантные, зависящие от времени решения для бозе-конденсатов в гидродинамическом режиме для анизотропной ловушки были найдены Каганом, Сурковым и Шляпниковым [26]; в частности, ими был определен спектр дыхательных мод осциллирующего типа. Позднее автомодельные режимы наблюдались в экспериментах группы Томаса [24, 25] при анизотропном расширении из оптической ловушки в вакуум сильновзаимодействующего вырожденного ферми-газа атомов  ${}^6\text{Li}$ .

Хотелось бы отметить, что в шестидесятых годах прошлого века эта задача — задача о разлете газа в вакуум — была весьма популярна. Первые классические результаты в этом направлении были получены Овсянниковым (1956 г.) [21] и Дайсоном (1968 г.) [27]. Эти работы имели множество различных приложений не только в гидродинамике, но также и в астрофизике (см., например, оригинальную статью Зельдовича [28]).

В данном небольшом обзоре мы в основном ограничимся рассмотрением квазиклассического расширения квантовых газов в вакуум, что совпадает с разлетом идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1 + 2/D$ . С помощью автомодельного решения будет показано, каким образом эволюционирует форма разлетающегося облака для квантовых газов в квазиклассическом пределе и для разлета идеального газа. Динамика автомодельного разлета в этом случае описывается в рамках системы обыкновенных дифференциальных уравнений ермаковского типа. Следует отметить, что впервые рассматриваемая симметрия была использована Ермаковым в 1880 г. [29] при построении решений для ряда механических систем, включая движение классической частицы в потенциале, представляющем сумму осцилляторного потенциала и потенциала  $V(r) = \beta/r^2$ . Следует отметить, что эта же симметрия помогает в нахождении спектра в квантовом случае для систем  $N$  частиц, двигающихся в плоскости и взаимодействующих между собой с потенциалом  $V(r_{ij}) = \beta/r_{ij}^2$  ( $r_{ij}$  — расстояние между частицами) в присутствии внешнего осцилляторного потенциала [30, 31]. Отметим также, что в семидесятые годы прошлого века результаты Ермакова были переоткрыты Рейем и Рейдом [32]. Сейчас все такого рода уравнения принято называть системами Ермакова — Рея — Рейда (см., например, работу [33] и ссылки в ней). В Заключении этой статьи мы обсудим, в чем состоит различие между разлетом квантового и классического газов, а также экспериментальные данные по разлету квантовых газов в вакуум.

## 2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КВАЗИКЛАССИКА

Рассмотрим уравнения ГП для волновой функции  $\psi$  бозе-конденсата [14]:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \mu(n) \psi. \quad (9)$$

Здесь  $m$  — масса бозона. В случае бозе-атомов  $m$  — масса атома, для ферми-атомов  $m$  — масса куперовской пары, т. е. равна удвоенной массе атома. Химический потенциал  $\mu$  для бозе-атомов равен

$$\mu = gn, \quad (10)$$

где  $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$  — константа взаимодействия, пропорциональная длине  $s$ -рассеяния  $a_s$ . Для положительных значений длины рассеяния между бозонами

имеет место отталкивание, а при  $a_s < 0$  — притяжение. В последнем случае конденсат неустойчив — развитие этой неустойчивости ведет к коллапсу (см., например, обзор [5]).

Для ферми-атомов отрицательное значение  $a_s$  при уменьшении температуры,  $T \rightarrow 0$ , способствует сначала формированию куперовского спаривания атомов, впоследствии образующих бозе-конденсат. Как уже отмечалось во Введении, предел  $(|a_s|k_F)^{-1} \rightarrow 0$ , где  $p_F = \hbar k_F$  — импульс Ферми, соответствует так называемому унитарному режиму, для которого

$$\mu(n) = 2(1 + \beta)\varepsilon_F, \quad (11)$$

где  $\beta = -0.63$ , а

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (6\pi^2 n)^{2/3}$$

— локальная энергия Ферми. В этом случае уравнение движения для волновой функции конденсата  $\psi$  ( $T \rightarrow 0$ ) представляет собой обобщенное уравнение ГП (2) с  $\mu(n)$  (11).

После простого приведения к безразмерному виду уравнения ГП при  $\nu = 2/D$  получаем стандартное НУШ (3) с гамильтонианом (4), в котором первый член совпадает с полной кинетической энергией, а второе слагаемое ответственно за отталкивание между бозе-частицами.

Вводя стандартным образом амплитуду и фазу,  $\psi = A \exp(i\varphi(r, t))$  ( $n = A^2$ ), НУШ (3) переписывается в виде двух уравнений — уравнения непрерывности для  $n$  и уравнения эйконала для фазы  $\varphi$ :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\nabla \cdot n \nabla \varphi) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mu(n) + T_{QP} = 0, \quad (13)$$

где  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  представляет собой скорость (предполагается отсутствие вихрей,  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ ). Во втором уравнении слагаемое

$$T_{QP} = -\frac{\Delta \sqrt{n}}{2\sqrt{n}} \quad (14)$$

ответственно за квантовое давление.

Уравнения для плотности  $n$  и фазы  $\varphi$  сохраняют гамильтонову форму:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \varphi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta n}, \quad (15)$$

где гамильтониан совпадает с (4). В переменных  $n$  и  $\varphi$  гамильтониан  $H$  имеет вид

$$H = \int \left[ \frac{n(\nabla\varphi)^2}{2} + \frac{(\nabla\sqrt{n})^2}{2} + n^{\nu+1} \right] d\mathbf{r}. \quad (16)$$

Как уже отмечалось во Введении, НУШ (3) при  $\nu = 2/D$  обладает дополнительной симметрией относительно преобразований Таланова [2]. Преобразования Таланова содержат как скейлинговые преобразования вида  $t \rightarrow \alpha^2 t$  и  $\mathbf{r} \rightarrow \alpha \mathbf{r}$  благодаря сохранению полного числа частиц  $N = \int |\psi|^2 d\mathbf{r}$ , так и преобразования фазы. Обе эти симметрии — нетеровского типа, они приводят к появлению двух дополнительных интегралов движения,  $C_1$  и  $C_2$  (7), следующих из интегрирования соотношения вириала (6).

Квазиклассическое приближение (нестационарное приближение Томаса–Ферми) для уравнения ГП соответствует пренебрежению квантовым давлением в уравнении (13):

$$\mu(n) \gg |T_{QP}|. \quad (17)$$

В результате уравнения движения превращаются в уравнения гидродинамики для потенциального течения идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1 + 2/D$ :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (\nabla \cdot n \nabla \varphi) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \mu(n) = 0. \quad (19)$$

Следует подчеркнуть, что все симметрии в этих уравнениях сохраняются. Для этой системы остается справедливой также и теорема вириала; в этом случае в гамильтониане (16) необходимо пренебречь вторым слагаемым, ответственным за квантовое давление.

В основном далее мы будем пренебрегать квантовым давлением. Пренебрежение квантовым давлением предполагает более быстрые пространственные и временные изменения фазы (большие фазовые градиенты и производные по времени) по сравнению с пространственно-временными вариациями модуля  $\psi$ -функции в уравнении ГП. Подчеркнем, что все указанные симметрии не зависят от характера взаимодействия — отталкивания или притяжения. Это же относится и к теореме вириала (6). Для отталкивания из теоремы вириала следует, что асимптотически при больших  $t$  средний размер облака квантового газа, расширяющегося в вакуум, вне зависимости от того, учитывается или не учитывается квантовое давление, растет линейно со временем, т. е. имеет место выход на баллистический режим [34, 35].

Рассмотрим, каким образом происходит разлет квантовых газов в вакуум в квазиклассическом приближении. В этом случае уравнения движения, как отмечалось, совпадают с уравнениями гидродинамики для идеального газа с  $\gamma = 1 + 2/D$ . В трехмерном случае, таким образом, речь идет о разлете в вакуум одноатомного газа (напомним, что для идеального газа  $\gamma = (i+2)/i$ , где  $i$  — число степеней свободы).

В 1970 году Анисимов и Лысиков [3] открыли очень интересное явление, связанное с нелинейными деформациями формы газового облака, расширяющегося в вакуум. Такое поведение непосредственно следует из найденного ими решения для газа с  $\gamma = 5/3$  (см. также работы [22, 36, 37]). В данном разделе мы воспользуемся теоремой вириала и построим анизотропное квазиклассическое решение, которое совпадает с решением Анисимова–Лысикова при  $D = 3$ .

Будем искать решение уравнений (12) и (13) в автомодельном виде:

$$n = \frac{1}{V(\mathbf{a})} f(\xi), \quad (20)$$

где скейлинговые параметры  $\mathbf{a}$  являются функциями времени  $t$ ,  $\xi_l = x_l/a_l$  — автомодельные переменные, а  $V(\mathbf{a}) = \prod_{l=1}^D a_l$  — объем в пространстве скейлинговых параметров. Отметим, что анзац (20) сохраняет полное число частиц.

Подстановка (20) в уравнение непрерывности (12) допускает интегрирование, в результате чего фаза  $\varphi$  находится с точностью до произвольной функции  $\varphi_0(t)$ :

$$\varphi = \varphi_0(t) + \sum_l \frac{\dot{a}_l a_l}{2} \xi_l^2. \quad (21)$$

Функция  $\varphi_0(t)$  определяется из уравнения эйконала. Подстановка (21) в (13) дает  $D$  уравнений движения для параметров  $a_l$ :

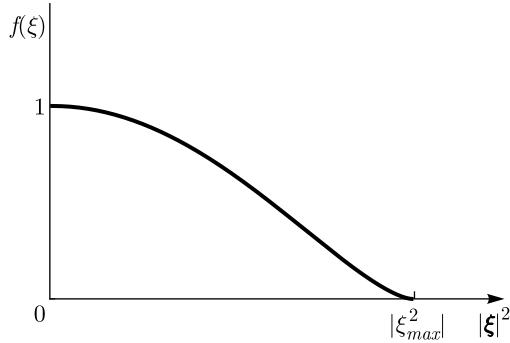
$$\ddot{a}_l a_l = \frac{\lambda}{V(\mathbf{a})^{2/D}}, \quad (22)$$

где  $\lambda$  — произвольная положительная константа, определяемая из начальных условий. Для  $f(\xi)$  в результате имеем

$$f(\xi) = \left[ 1 - \frac{D\lambda}{2(2+D)} \xi^2 \right]^{D/2}. \quad (23)$$

Таким образом, плотность в переменных  $\xi$  зависит только от модуля  $|\xi|$ . При

$$|\xi| > |\xi|_{max} = \sqrt{\frac{2(2+D)}{D\lambda}}$$



**Рис. 1.** Поведение  $f(\xi)$  для ферми-газа в унитарном пределе (произвольные единицы)

плотность  $n$  следует положить равной нулю (см. рис. 1 для  $D = 3$ ). В соответствии с уравнениями (22) динамика параметров  $a_i(t)$  ( $i = 1, \dots, D$ ) представляет собой уравнения Ньютона для движения частицы в  $D$ -мерном пространстве,

$$\ddot{a}_i = -\frac{\partial U}{\partial a_i}, \quad (24)$$

в потенциале

$$U(\mathbf{a}) = \frac{D\lambda}{2V(\mathbf{a})^{2/D}}. \quad (25)$$

Отметим, что эти уравнения относятся к так называемым системам ермаковского типа [29] (см. также работу [33] и ссылки там).

Очевидно, что уравнения (24) должны иметь ту же симметрию, что и исходное уравнение ГП (2). Во-первых, уравнения (24) сохраняют энергию

$$E = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^D \dot{a}_l^2 + U(\mathbf{a}). \quad (26)$$

Во-вторых, для уравнений (24) прямым вычислением легко устанавливается вириальное соотношение (6), записанное в терминах  $a_i$ . Для  $\sum a_i^2$  имеем

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i a_i^2 = 2 \sum_i \left[ \left( \frac{da_i}{dt} \right)^2 + a_i \frac{d^2 a_i}{dt^2} \right].$$

Подстановка (24) в это соотношение дает

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_i a_i^2 = 2 \sum_i \left( \frac{da_i}{dt} \right)^2 + \frac{2D\lambda}{V(\mathbf{a})^{2/D}} = 4E,$$

что совпадает с (6). Дважды интегрируя, получаем два интеграла,  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\sum_i a_i^2 = 2Et^2 + C_1 t + C_2. \quad (27)$$

Казалось бы, наличие трех интегралов для системы (24) —  $E$ ,  $C_1$  и  $C_2$  — гарантирует ее интегрируемость для всех физических размерностей, включая  $D = 3$ . Однако это не так в силу того, что интегралы  $C_1$  и  $C_2$  как функционалы от  $a_i$  явно зависят от времени:

$$C_1 = \frac{d}{dt} \sum_i a_i^2 - 4Et, \quad (28)$$

$$C_2 = \sum_i a_i^2 - 2Et^2 - C_1 t, \quad (29)$$

и по этой причине являются неавтономными, хотя и находятся в инволюции с другими интегралами движения, ср. с (8).

## 2.1. Разлет двумерного газа

Вначале рассмотрим более подробно разлет двумерного газа (см. работу [16]). В цилиндрической системе координат с  $a^2 = a_1^2 + a_2^2$  и полярным углом  $\phi$  интеграл энергии записывается в виде

$$E = \frac{\dot{a}^2}{2} + \frac{a^2 \dot{\phi}^2}{2} + \frac{2\lambda}{a^2 \sin 2\phi}.$$

Домножая далее  $E$  на  $a^2 = 2Et^2 + C_1 t + C_2$ , легко получить, что комбинация

$$\tilde{E} = E a^2 - \frac{1}{2} a^2 \dot{a}^2 = EC_2 - \frac{1}{8} C_1^2$$

является константой (интеграл Ермакова). В результате мы приходим к закону сохранения новой «энергии»

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{d\phi}{d\tau} \right)^2 + U_{eff}(\phi) \quad (30)$$

с новым временем  $\tau$ :

$$d\tau = \frac{dt}{r^2}, \quad \tau = \int_0^t \frac{dt'}{2E(t')^2 + C_1 t' + C_2}, \quad (31)$$

где

$$U_{eff}(\phi) = \frac{2\lambda}{\sin 2\phi} \quad (32)$$

играет роль потенциальной энергии. Величина  $U_{eff}$  всегда положительна и стремится к бесконечности при  $\phi \rightarrow 0$  и  $\phi \rightarrow \pi/2$ . Минимальное значение  $U_{eff} = -2\lambda$  при  $\phi = \pi/4$  соответствует изотропному случаю. В изотропном случае меняется только величина  $a^2$ , определяемая из соотношения вириала:

$$a^2 = 2Et^2 + C_1 t + C_2.$$

Новое время  $\tau$  (31) может быть легко выражено через  $t$ :

$$\sqrt{2\tilde{E}}\tau = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2E}(t+t_0)}{\chi} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2E}t_0}{\chi},$$

где  $\chi^2 = \tilde{E}/E$  и  $t_0 = C_1/4E$ , так что  $\tau = 0$  при  $t = 0$ . Если начальная скорость газа равна нулю (что типично для эксперимента), то константа  $C_1 = 0$  и

$$\sqrt{2\tilde{E}}\tau = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2\tilde{E}}t}{C_2}.$$

В этом случае асимптотически при  $t \rightarrow \infty$

$$\tau \rightarrow \tau_\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2\tilde{E}}}. \quad (33)$$

Траектория  $\phi(\tau)$  находится из интегрирования выражения (30):

$$\tau = \int \frac{d\phi}{\sqrt{2[\tilde{E} - U_{eff}(\phi)]}}.$$

Отсюда  $\tau$ -период в потенциале  $U_{eff}(\phi)$  (32) выражается через интеграл

$$T = 2 \int_{\phi^{(-)}}^{\phi^{(+)}} \frac{d\phi}{\sqrt{2[\tilde{E} - U_{eff}(\phi)]}},$$

где  $\phi^{(\pm)}$  — корни уравнения  $\tilde{E} = U_{eff}(\phi)$  (точки остановки). При больших значениях  $\tilde{E}$  колебания слабо зависят от деталей потенциала  $U_{eff}(\phi)$ . Асимптотически угловая «скорость»  $d\phi/d\tau \rightarrow \pm\sqrt{2\tilde{E}}$ , а  $\tau$ -период  $T \rightarrow \pi/\sqrt{2\tilde{E}}$ , т. е. в этом пределе  $T$  превосходит в два раза  $\tau_\infty$  (33). Отметим также, что зависимость  $T(\tilde{E})$  является монотонной для  $U_{eff}(\phi)$  с максимумом, соответствующим минимуму потенциала  $U_{eff}(\pi/4)$ . Это означает, что при  $C_1 = 0$  вторая точка остановки является недостижимой при  $t \rightarrow \infty$ . В частности, если стартовать с левой точки остановки, то система не достигает правой точки остановки. И наоборот: если стартовая точка правая, то левая недостижима. Такая ситуация, как мы увидим далее, является типичной и для трехмерного цилиндрически-симметричного случая.

## 2.2. Разлет трехмерного газа

Для разлета ферми-газа в унитарном пределе, когда  $\nu = 2/3$ , уравнения для скейлинговых параметров интегрируются тем же самым способом, что

и в двумерном случае. При  $D = 3$  энергию (26) следует записать, вводя сферическую систему координат  $(a, \theta, \phi)$ :

$$E = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{da}{dt} \right)^2 + a^2 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + a^2 \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] + \frac{3\lambda}{2^{1/3}a^2} \frac{1}{(\sin^2 \theta \cos \theta \sin 2\phi)^{2/3}}.$$

Соответственно вводим снова энергию

$$\tilde{E} = E a^2 - \frac{1}{2} a^2 \dot{a}^2 = EC_2 - \frac{1}{8} C_1^2$$

— ермаковский интеграл, сохранение которого является следствием симметрии относительно растяжений, и новое время  $\tau$  с помощью той же формулы (31). В результате имеем

$$\tilde{E} = \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 + U_{eff}, \quad (34)$$

где эффективный потенциал выражается через сферические углы:

$$U_{eff} = \frac{3\lambda}{2^{1/3} (\sin^2 \theta \cos \theta \sin 2\phi)^{2/3}}. \quad (35)$$

Таким образом, мы приходим к системе с двумя степенями свободы,  $\theta$  и  $\phi$ .

Для цилиндрически-симметричных решений, когда  $\cos \phi = \sin \phi = \sqrt{2}/2$ , т. е. при  $\phi = \pi/4$ , энергия  $\tilde{E}$  записывается в виде

$$\tilde{E} = \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{3\lambda}{2^{1/3} (\sin^2 \theta \cos \theta)^{2/3}}, \quad (36)$$

аналогичном (30) для двумерного случая. Разница состоит только в виде эффективного потенциала  $U_{eff}$ . Интегрирование этого уравнения приводит к результату Анисимова – Лысикова [3].

В общем случае (при учете зависимости от обеих углов) одного интеграла  $\tilde{E}$  недостаточно. Как было показано Гафе [38], данная система имеет еще один дополнительный интеграл движения (помимо  $\tilde{E}$ ), который следует из теста Пенлеве. Существование уже двух интегралов движения гарантирует полную интегрируемость этой системы. Важно отметить, как и в предыдущем случае, что движение в потенциале (35) сохраняет свой нелинейный квазиосцилляционный характер.

### 2.3. Учет квантового давления

Обсудим теперь, какова роль квантового давления при расширении квантовых газов в вакуум. Отметим, что в точке  $\xi = \xi_{max}$  для полученных выше решений критерий квазиклассичности (17) нарушается — в этой точке вторая производная амплитуды  $A$  по  $\xi$  обращается в бесконечность, соответственно член квантового давления становится бесконечно большим. Это типичная ситуация для квазиклассических решений в квантовой механике, когда требуется решить задачу о спшивке решений в точке остановки [39]. В данном случае роль точки остановки играет  $\xi = \xi_{max}$ . В окрестности точки  $\xi = \xi_{max}$  необходимо спивать построенное решение при  $\xi < \xi_{max}$  (внутренняя область) с внешней областью  $\xi > \xi_{max}$ . Вдали от  $\xi_{max}$  во внутренней области решение должно переходить в найденное квазиклассическое, а во внешней области  $\psi$  должна подчиняться линейному уравнению Шредингера. Следует сказать, что эта задача обсуждалась детально в работе [40] для режима сильного трехмерного колапса в кубическом НУШ ( $\nu = 1$ ). Задача спшивки в данном случае может быть рассмотрена аналогичным образом.

Далее будем предполагать  $\Delta\xi \ll \xi_{max}$ , т. е. представляя переходную область  $\Delta\xi$  достаточно узкой. Легко понять, что задача может быть рассмотрена как одномерная в направлении, нормальном к поверхности  $\xi = \xi_{max}$ .

Начнем с изотропного разлета двумерного бозе-газа, когда химический потенциал  $\mu(n) = n$ . Обратимся к уравнению (13) для фазы  $\varphi$ . Для автомодельного квазиклассического решения фаза, напомним, находится из интегрирования уравнения непрерывности, т. е.  $\varphi$  не чувствительна к изменению амплитуды в области спшивки. Это означает, что всюду в переходной области можно считать, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla\varphi)^2}{2} \approx -2A_0^2,$$

где  $A_0^2 = a^{-2}(1 - \lambda\xi^2/4)$  есть решение квазиклассических уравнений. В результате уравнение для амплитуды  $A$  в области спшивки записывается в виде

$$\frac{1}{2}\nabla^2 A - 2(A^2 - A_0^2)A = 0.$$

Поскольку  $A_0(\xi_{max}) = 0$  ( $\xi_{max} = 2/\sqrt{\lambda}$ ), в этом уравнении в слагаемом  $A_0^2$  нужно удержать линейные отклонения по  $\chi = \xi - \xi_{max}$ :  $A_0^2 = -\chi a^{-2}\sqrt{\lambda}$ , а в операторе Лапласа  $\nabla^2$  в силу узости переходного слоя оставить вторую производную по  $\chi$ . В резуль-

тате приходим к следующему дифференциальному уравнению для функции  $g = A/a$ :

$$\frac{1}{2}\frac{d^2g}{d\chi^2} - 2(g^2 + \sqrt{\lambda}\chi)g = 0,$$

с граничными условиями  $g \rightarrow 0$  при  $\chi \rightarrow \infty$  и  $g \rightarrow \sqrt{-\lambda^{1/2}}\chi$  при  $\chi \rightarrow -\infty$ . Это уравнение представляет собой уравнение Пенлеве второго типа [40]. При больших положительных  $\chi$  это уравнение превращается в уравнение Эйри с экспоненциально затухающим решением. При меньших  $|\chi|$  решение будет близко к функции Эйри, оно осциллирующего характера. При дальнейшем отходе от границы  $\xi = \xi_{max}$  во внутреннюю область в решении будут сохраняться осцилляции, но их амплитуда будет убывать. Само решение при  $\chi \rightarrow -\infty$  будет выходить на нужную асимптотику.

Появление этих осцилляций является главным проявлением квантовой природы бозе-конденсата при его расширении в вакуум. Эти осцилляции имеют дифракционное происхождение, они подобны кольцам Ньютона.

Хотелось бы отметить, что в одномерной задаче о разете бозе-газа в вакуум, как показано в работе [41] (см. в ней рис. 3e), вообще нет никаких осцилляций на краю. Причина состоит в том, что плотность в этом случае в окрестности крайней точки ведет себя квадратично, и поэтому никакого нарушения квазиклассики в этой точке не наблюдается. Однако при других условиях [42] осцилляции на краю наблюдаются. Подчеркнем, что задача о спшивке в пределе малых  $\Delta\xi \ll \xi_{max}$  сводится к одномерной задаче, но она по построению существенным образом отличается от задачи разлета в рамках одномерного НУШ, интегрируемого с помощью метода обратной задачи рассеяния [43].

В анизотропном случае, очевидно, осцилляции сохранятся. Во-первых, в операторе Лапласа наибольшая производная будет по нормали к поверхности  $\xi = \xi_{max}$ . Во-вторых, угловая скорость  $v_\Omega = r\dot{\Omega}$  при достаточно больших временах  $t \rightarrow \infty$ , когда размер  $R$  газового облака значительно превосходит начальный размер  $R_0$ , оказывается значительно меньше  $\dot{R}$ . Согласно теореме вириала (6),  $\dot{R} \approx v_\infty$ , а

$$v_\Omega = r|\dot{\Omega}| = \frac{|d\Omega/dt|}{r} \leq \frac{2\sqrt{\tilde{E}}}{v_\infty t}.$$

Это означает, что главные изменения будут происходить по нормали к границе  $\xi = \xi_{max}$ , а временными изменениями по углу можно пренебречь. Если в начальный момент выполнено условие квазиклассич-

ности, то оно будет выполнено всюду за исключением узкой области  $\delta\xi \ll |\xi|_{max}$ . При этом отношение  $\delta\xi$  и  $|\xi|_{max}$  в силу автомодельности можно считать неизменным, что справедливо по крайней мере при больших  $t$ . Таким образом, асимптотически задачу о спивке следует считать одномерной по  $|\xi|$  с локально-замороженным направлением нормали. Отсюда становится ясным, что вокруг поверхности  $\xi = \xi_{max}$  формируется пояс осцилляций плотности дифракционного характера.

Аналогичным образом анализируется поведение квантового ферми-газа в унитарном пределе в окрестности поверхности  $\xi = \xi_{max}$ .

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, мы показали, как симметрии для уравнения ГП, когда химический потенциал зависит от плотности  $n$  степенным образом с показателем  $\nu = 2/D$  и  $D$  — размерность пространства, влияют на расширение квантовых газов в вакуум. Вследствие теоремы вириала, независимо от соотношения между квантовым давлением и химическим потенциалом, средний размер расширяющегося облака растет асимптотически при больших временах линейно с  $t$ , так что скорость расширения стремится к постоянному значению  $v_\infty = (2H/N)^{1/2}$ . Наиболее общая симметрия уравнения ГП — симметрия относительно преобразований Таланова, совокупность которых образует абелеву группу. Эта же симметрия имеет место для потенциальных течений газов с показателем адиабаты  $\gamma = 1 + 2/D$ , описываемых с помощью уравнений газовой динамики: уравнения непрерывности и уравнения Эйлера. Важно, что эта гидродинамическая система совпадает с уравнением ГП в квазиклассическом пределе и наследует тем самым симметрии уравнения ГП.

Мы показали также, что в квазиклассическом приближении уравнение ГП имеет автомодельные анизотропные решения, описывающие на фоне разлета нелинейные угловые квазиосцилляции формы облака квантового газа. В трехмерном случае эти решения совпадают с решениями Анисимова–Лысикова для расширения в вакуум классического одноатомного газа с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$  за исключением области, где в квазиклассике плотность обращается в нуль. Это целая поверхность, которая играет ту же самую роль, что и точка остановки в квазиклассическом приближении в обычной квантовой механике. Задача спивки решения во внутренней и во внешней областях показывает,

что в окрестности этой поверхности возникают пространственные осцилляции плотности дифракционного характера. Именно этим различаются квантовый и классические газы при их разлете.

В заключение обсудим, в какой мере экспериментальные данные соответствуют полученным аналитическим результатам. В экспериментах [24] наблюдалось автомодельное расширение сильновзаимодействующего ферми-газа из ловушки сигарообразной формы. На рис. 2, взятом из работы [24], представлены изображения расширяющегося ферми-газа. В начальный момент времени газовое облако имело форму сильно вытянутого эллипсоида в виде сигары (время  $t = 100$  мкс), затем при  $t = 600$  мкс — почти сферическую и на конечной стадии облако имело форму диска. Общее время наблюдения было 2000 мкс, которое можно взять в качестве полупериода (или меньше) угловых осцилляций формы газового облака,  $t \leq t_{osc}/2$ , в соответствии с результатами предыдущего раздела. Таким образом, все эти стадии качественно отвечают автомодельному решению.

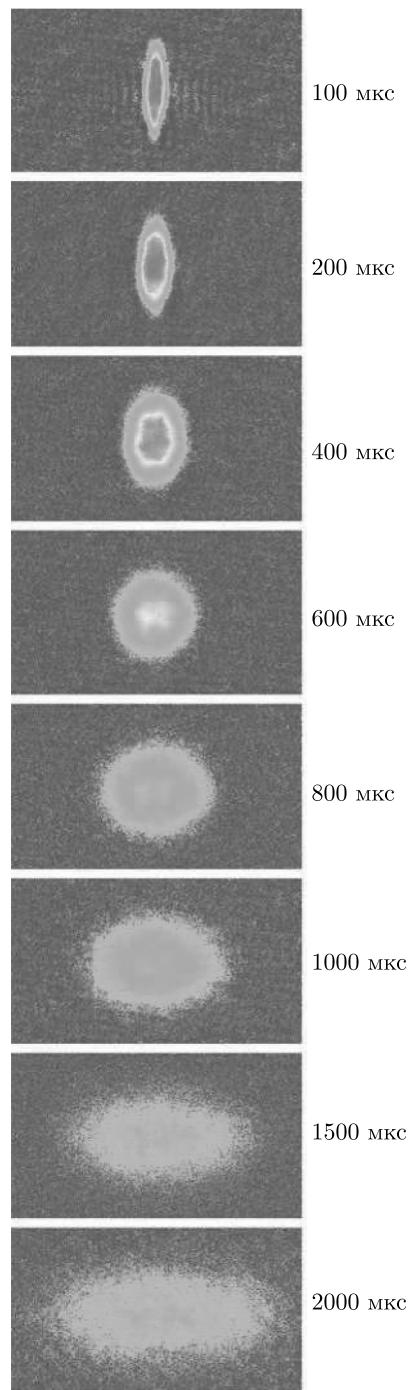
На рис. 3 представлены результаты измерений среднего размера облака как функции времени для трех значений  $(k_F a_s)^{-1}$  [25]. Все три зависимости  $\tau^2(t)$  с хорошей точностью представляют собой параболические зависимости в полном соответствии с соотношением (7), следующим из теоремы вириала (6).

Строго в резонансе,  $(k_F a_s)^{-1} = 0$ , средний размер облака  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$  может быть выражен через начальный потенциал ловушки  $U(\mathbf{r})$  в виде [25]

$$\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{t=0} + \frac{t^2}{m} \langle \mathbf{r} \cdot \nabla U(\mathbf{r}) \rangle_{t=0}. \quad (37)$$

Вычисления, представленные в работе [44], показывают, что закон расширения (37) совпадает с квазиклассической зависимостью  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$  (27) в унитарном пределе. Следует отметить, что, согласно выражению (27), величина  $\langle \mathbf{r}^2 \rangle$  действительно зависит линейно от энергии, что было проверено в экспериментах [25].

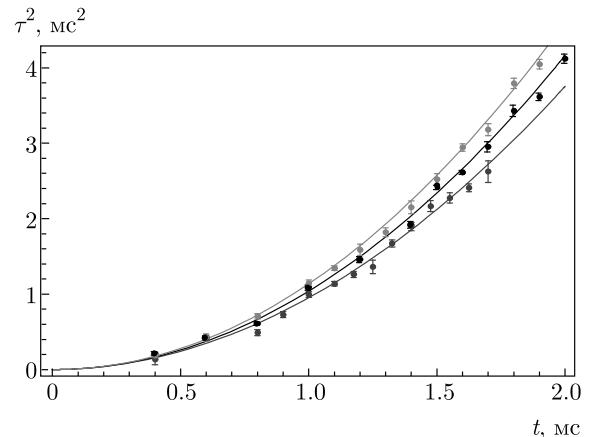
Подчеркнем, что эти зависимости опираются на квазиклассическую теорию, которая ничем не отличается от гидродинамики идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma = 5/3$ . Как мы показали, отличие квантового газа от классического в задаче о расширении в вакуум состоит в учете квантового давления, что приводит к появлению осцилляций плотности на границе расширяющегося облака. Судя по всему, в экспериментах [24, 25] наблюдается расши-



**Рис. 2.** (В цвете онлайн) Изображения расширяющегося сильновзаимодействующего ферми-газа во времени. Начальная форма в виде сигары

рение скорее нормального ферми-газа, чем сверхтекучего.

Что касается разлета бозе-атомов, то в эксперименте [23] наблюдалась примерно та же самая последовательность изменения формы облака, что



**Рис. 3.** Зависимость  $\tau^2(t)$ : по вертикальной оси отложены экспериментальные значения  $\tau^2(t) \equiv m[\langle r^2 \rangle - \langle r^2 \rangle_{t=0}] / \langle r \cdot \nabla U \rangle_{t=0}$ , измеренные при расширении сильновзаимодействующего ферми-газа в зависимости от времени  $t$  ( $U(r)$  — начальное значение потенциала ловушки). Чёрные символы соответствуют газу в резонансе,  $(k_F a_s)^{-1} = 0$ , красные и синие — соответственно  $(k_F a_s)^{-1} = 0.59$  и  $(k_F a_s)^{-1} = -0.61$ , сплошные кривые — результаты расчета [25]

и в трехмерной задаче Анисимова–Лысикова. Это свидетельствует о том, что нормальная компонента играет в этом эксперименте более существенную роль, чем сверхтекучая компонента. Напомним, что одним из ключевых экспериментов по открытию бозе-эйнштейновских конденсатов газов щелочных элементов  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$  [45–47] было определение функции распределения бозе-атомов при расширении газа в вакуум после выключения оптической ловушки. Функция распределения имела бимодальную форму, которая соответствовала нормальной и сверхтекучей компонентам. Для нормальной компоненты распределение по скоростям было широким — тепловым — максвелловского вида, а сверхтекучая компонента обладала более узким распределением с шириной, определяемой параметром взаимодействия (в смысле ГП). При малых, но конечных температурах из-за уменьшения плотности при разлете температура бозе-конденсации падает, что неминуемо должно приводить к росту числа атомов нормальной компоненты. По этой причине форма облака должна определяться нормальной компонентой, которую можно считать одноатомным газом. Холодная сверхтекучая компонента будет сосредоточена внутри расширяющегося облака. Для ферми-газов эта ситуация, по-видимому, также имеет место. В отличие от бозе-газов, переход к нормальной компоненте при разлете ферми-газа будет

сопровождаться также и разрушением куперовских пар. Таким образом, разлет квантового газа должен приводить к появлению колец Ньютона, что в экспериментах как [23], так и [24, 25] не наблюдалось. Наблюдение таких осцилляций, по крайней мере на начальной стадии разлета, было бы свидетельством того, что газ находится в квантовом состоянии.

**Благодарности.** Авторы благодарны А. В. Турлапову и А. М. Камчатнову за ряд полезных обсуждений.

**Финансирование.** Работа одного из авторов (Е. А. К.) выполнялась при поддержке Российского научного фонда (грант № 19-72-30028). Другой автор (М. Ю. К.) благодарит за поддержку Программу фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» и выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 20-02-00015). Авторы внесли равные вклады в выполнение этой работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Питаевский, УФН **178**, 633 (2008) [L. P. Pitaevskii, Physics-Uspekhi **51**, 603 (2008)].
2. В. И. Таланов, Письма в ЖЭТФ **11**, 303 (1970) [V. I. Talanov, Sov. Phys. JETP Lett. **11**, 199 (1970)].
3. С. И. Анисимов, Ю. И. Лысиков, ПММ **34**, 926 (1970) [S. I. Anisimov and Yu. I. Lysikov, J. Appl. Math. Mech. **34**, 882 (1970)].
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика* в 10 тт., Физматлит, Москва (2002).
5. В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, УФН **182**, 569 (2012) [V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, Physics-Uspekhi **55**, 535 (2012)].
6. S. L. Cornish, S. T. Thompson, and C. E. Wieman, Phys. Rev. Lett. **96**, 170401 (2006).
7. C. Eigen, A. L. Gaunt, A. Suleymanzade, N. Navon, Z. Hadzibabic, and R. P. Smith, Phys. Rev. X **6**, 041058 (2016).
8. H. Feshbach, Ann. Phys. **5**, 357 (1958).
9. C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Rev. Mod. Phys. **82**, 1225 (2010).
10. J. Joseph, B. Clancy, L. Luo, J. Kinast, A. Turlapov, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **98**, 170401 (2007).
11. M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, Phys. Rev. Lett. **92**, 120401 (2004).
12. M. J. H. Ku, A. T. Sommer, L. W. Cheuk, and M. W. Zwierlein, Science **335**, 563 (2012).
13. G. Zürn, T. Lompe, A. N. Wenz, S. Jochim, P. S. Julienne, and J. M. Hutson, Phys. Rev. Lett. **110**, 135301 (2013).
14. E. P. Gross, Nuovo Cim. **20**, 454 (1961); L. P. Pitaevskii, Sov. Phys. JETP **13**, 451 (1961).
15. E. A. Kuznetsov, M. Yu. Kagan, and A. V. Turlapov, Phys. Rev. A **101**, 043612 (2020).
16. Е. А. Кузнецов, М. Ю. Каган, ТМФ **202**, 458 (2020).
17. И. Е. Дзялошинский, частное сообщение (1970).
18. E. A. Kuznetsov and S. K. Turitsyn, Phys. Lett. A **112**, 273 (1985).
19. С. Н. Власов, В. А. Петрищев, В. И. Таланов, Изв. вузов, Радиофизика **14**, 1353 (1971) [S. N. Vlasov, V. A. Petrishchev, and V. I. Talanov, Radiophys. Quant. Electr. **14**, 1062 (1971)].
20. K. Rypdal and J. J. Rasmussen, Phys. Scripta **33**, 498 (1986).
21. Л. В. Овсянников, ДАН СССР **111**, 47 (1956).
22. S. I. Anisimov and V. A. Khokhlov, *Instabilities in Laser-Matter Interaction*, CRC Press Inc., Boca Raton (1995).
23. Ю. В. Лиханова, С. Б. Медведев, М. П. Федорук, П. Л. Чаповский, Письма в ЖЭТФ **103**, 452 (2016) [Yu. V. Likhanova, S. B. Medvedev, M. P. Fedoruk, and P. L. Chapovsky, JETP Lett. **103**, 403 (2016)].
24. K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, Science **298**, 2179 (2002).
25. E. Elliott, J. A. Joseph, and J. E. Thomas, Phys. Rev. Lett. **112**, 040405 (2014).
26. Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **55**, R18 (1997).
27. F. J. Dyson, J. Math. Mech. **91**, 18 (1968).
28. Я. Б. Зельдович, Астроном. ж. **41**, 873 (1964) [Ya. B. Zel'dovich, Sov. Astron. J. **8**, 700 (1964)].
29. В. П. Ермаков, *Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде: из лекций по интегрированию дифференциальных уравнений* [V. P. Ermakov,

- Differential Equations of the Second Order. Integrability Conditions in the Closed Form*, University Izv., Kiev (1880)].
30. F. Calogero, J. Math. Phys. **10**, 2191 (1969).
  31. L. P. Pitaevskii and A. Rosch, Phys. Rev. A **55**, R853 (1997).
  32. J. R. Ray and J. L. Reid, Phys. Lett. A **71**, 317 (1979).
  33. C. Rogers and W. K. Schief, J. Math. Anal. and Appl. **198**, 194 (1996).
  34. A. V. Turlapov and M. Yu. Kagan, J. Phys.: Condens. Matter **29**, 383004 (2017).
  35. М. Ю. Каган, А. В. Турлапов, УФН **189**, 225 (2019) [M. Yu. Kagan and A. V. Turlapov, Physics-Uspekhi **188**, 225 (2019)].
  36. O. I. Bogoyavlensky, in *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Berlin (1979), p. 151.
  37. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. А. Килин, Нелинейная динамика **4**, 363 (2008).
  38. B. Gaffet, J. Fluid Mech. **325**, 113 (1996).
  39. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, Москва (1989) [L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, Pergamon Press (1965)].
  40. B. E. Захаров, Е. А. Кузнецов, ЖЭТФ **91**, 1310 (1986) [V. E. Zakharov and E. A. Kuznetsov, Sov. Phys. JETP **64**, 773 (1986)].
  41. G. A. El, V. V. Geogjaev, A. V. Gurevich, and A. L. Krylov, Physica D **87**, 186 (1995).
  42. S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. A **99**, 013609 (2019).
  43. B. E. Захаров, А. Б. Шабат, ЖЭТФ **61**, 118 (1971) [V. E. Zakharov and A. B. Shabat, Sov. Phys. JETP **34**, 62 (1972)].
  44. E. A. Kuznetsov, M. Yu. Kagan, and A. V. Turlapov, arXiv:1903.04245 [cond-mat.quant-gas].
  45. M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Science **269**, 198 (1995).
  46. Cl. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
  47. K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrew, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).