

НЕЛИНЕЙНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПРИ РЕЛЯТИВИСТСКОМ ПЛАЗМЕННОМ РЕЗОНАНСЕ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

И. И. Метельский^{a,b}, В. Ф. Ковалев^{b,c}, В. Ю. Быченков^{a,b}*

^a *Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия*

^b *Центр фундаментальных и прикладных исследований,
ВНИИА им. Н. Л. Духова
127030, Москва, Россия*

^c *Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук
125047, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 23 февраля 2021 г.,
после переработки 23 февраля 2021 г.
Принята к публикации 6 апреля 2021 г.

Развита аналитическая теория нелинейного резонансного поглощения электромагнитного излучения в неоднородной плазме с учетом релятивистской нелинейности возбуждаемого плазменного поля в окрестности критической плотности плазмы, что существенно продвигает границу теоретического описания резонансного поглощения лазерной плазмой в область высоких интенсивностей лазера. Получен коэффициент нелинейного резонансного поглощения в зависимости от четырех лазерно-плазменных управляющих параметров — лазерной интенсивности, масштаба неоднородности плазмы, ее температуры и угла падения лазерного излучения на плазму. Продемонстрирован нелинейный эффект подавления амплитуды поля плазменного резонанса и «отключения» резонансного поглощения с ростом лазерной интенсивности, что является следствием релятивистской нелинейности электронной плазмы в области критической плотности.

DOI: 10.31857/S0044451021080125

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших механизмов передачи энергии лазерного излучения в плазму является механизм резонансного поглощения в неоднородной плазме, при котором вблизи критической плотности падающая электромагнитная волна трансформируется в продольную плазменную волну, обеспечивая значительный, а иногда определяющий вклад в коэффициент поглощения.

Интерес к исследованию резонансного поглощения исторически во многом связан с экспериментами по лазерному термоядерному синтезу (ЛТС) [1], с вопросами генерации гармоник [2–5] и образования быстрых частиц в лазерной плазме [6–8]. Резонансное поглощение наблюдается при наклонном паде-

нии на неоднородную плазму p -поляризованного лазерного излучения с частотой ω_0 , когда в области, где она сравнивается с локальной частотой собственных колебаний плазмы ω_L , возникает явление плазменного резонанса, представляющее собой резонанс колебаний электронов в лазерном поле и электронных ленгмюровских колебаний плазмы [9]. Усиление таких электростатических плазменных колебаний приводит к высоким напряженностям электрического поля в окрестности критической плотности плазмы и обогащению спектра отраженного излучения высшими гармониками, что является неотъемлемым свойством падающего p -поляризованного излучения. Роль поляризации лазерного импульса в генерации гармоник для разных механизмов обсуждалась различными группами исследователей (см., например, обзор [10]).

Структура электромагнитного поля плазменного резонанса впервые детально исследовалась в рамках

* E-mail: metelski@lebedev.ru

линейной (по амплитуде падающей волны) теории и гидродинамического приближения [11–14]. Было показано, что в отсутствие эффектов диссипации, компонента электрического поля, параллельная градиенту неоднородности плазмы, вблизи критической плотности, где диэлектрическая проницаемость $\varepsilon \rightarrow 0$, имеет особенность порядка $1/\varepsilon$, а поперечная компонента характеризуется логарифмической особенностью. Конечное значение амплитуды электрического поля плазменного резонанса [13, 14] обеспечивается либо столкновительной диссипацией плазменных колебаний в случае холодной плазмы, либо выносом плазменных волн при учете тепловых эффектов в случае горячей плазмы. В работах [13, 14] был также вычислен коэффициент усиления поля и было дано качественное описание роли плазменного резонанса в процессе поглощения электромагнитного излучения неоднородной плазмой.

На основе модели [13, 14] авторы статей [15–17] разработали аналитическую теорию линейного резонансного поглощения соответственно для холодной [15, 16] и горячей плазмы [17]. Из теоретических подходов [15–17] следовало, что коэффициент резонансного поглощения G не зависит от температуры плазмы, частоты столкновений электронов и интенсивности поля накачки, а характеризуется зависимостью от единственного параметра $\rho \equiv (\omega_0 L/c)^{2/3} \sin^2 \theta$ с максимумом $G_m \approx 0.4$ при $\rho \approx 0.2$. Здесь θ — угол падения на неоднородную плазму с масштабом неоднородности в окрестности критической плотности L , c — скорость света в вакууме. Вследствие приближенности аналитических решений уравнений поля для оптимальных значений ρ количественные оценки эффективности поглощения в [15–17] оказались не совсем точны, что было продемонстрировано аналитически для холодной плазмы в пределе малых [18] и больших [19] углов падения лазера на плазму, и позже — методами численного решения волнового уравнения [20–22] для произвольных углов. Последовательное описание формы резонансной кривой $G(\rho)$ в [20, 22] позволило уточнить значения: $G_m \approx 0.5$ при $\rho \approx 0.5$. Кроме того, в [22] была продемонстрирована пренебрежимо слабая температурная зависимость коэффициента поглощения от температуры, что подтвердило общий вывод об определяющей роли параметра ρ для описания поглощения в линейном режиме. Отметим, что на существенное поглощение p -поляризованной электромагнитной волны в окрестности плазменного резонанса указывалось также в монографии [23].

Развитие аналитического подхода для холодной плазмы в [24] позволило значительно скорректиро-

вать решения [18, 19] в предельных случаях малых и больших углов падения, а в случае горячей плазмы [25] — получить решение в виде степенных рядов, обобщающих предыдущие результаты [17] на весь диапазон углов. В последующих аналитических исследованиях линейной конверсии излучения в неоднородной плазме уточнялась зависимость кривой коэффициента поглощения $G(\rho)$ в случае линейного профиля плотности плазмы [26], в пределе малых углов падения рассматривался профиль плотности с локальным ступенчатым скачком плотности в окрестности критики [27], исследовалась форма кривой $G(\rho)$ для параболического профиля [28–30].

Естественная логика развития лазерных технологий привела к тому, что в экспериментах по лазер-плазменному взаимодействию стало рутинным применение лазеров с интенсивностью, ставящей под сомнение применимость использования линейной теории резонансного поглощения. Рост интенсивности лазерного излучения привел к необходимости учитывать как нерелятивистские [4], так и релятивистские [5, 31–36] нелинейные эффекты, проявляющиеся в окрестности критической плотности плазмы. В работе [4] впервые аналитически был осуществлен выход за рамки теории возмущений [2, 3] путем точного учета в исходных уравнениях нелинейного (по амплитуде электрического поля) движения электронов, но в пренебрежении релятивистскими эффектами. При этом плазменный резонанс рассматривался применительно к задаче о генерации гармоник и квазистатических полей в неоднородной плазме, тогда как вопрос о поглощении на основной частоте оставался открытым. Поскольку сильная нелинейность существенно затрудняет аналитическое исследование, нелинейное резонансное поглощение изучается, в основном, методами численного моделирования [31, 32, 34, 37] или с использованием полуаналитических моделей [35], в которых полученные на первом этапе аналитическими методами упрощенные относительно исходных нелинейные уравнения далее исследуются численно. В численных подходах к решению таких задач широко применяется кинетическое описание на основе метода «частица в ячейке» (PIC) [31, 32, 34, 37]. Естественно, что численные методы затрудняют получение практически необходимых скейлингов от лазерно-плазменных параметров.

В работах [5, 34–36] было показано, что проявление релятивистских эффектов движения электронов за счет усиления плазменного поля в области плазменного резонанса имеет место даже в том случае, если напряженность падающего лазерного

поля остается существенно ниже релятивистской. Нелинейный плазменный резонанс качественно меняет процесс генерации целых гармоник [5], причем высшие гармоники, которые, согласно стандартной (слабонелинейной) теории возмущений [2,3], были экспоненциально малы, становятся существенно выше. Формирование достаточно медленно убывающих степенных спектров гармоник является следствием пространственно-временной модуляции релятивистских плазменных колебаний, что эквивалентно релятивистскому изменению эффективной массы электрона [36]. С таким эффектом авторы работ [34, 35] связывали возможность подавления резонансного поглощения с ростом лазерной плотности потока энергии, хотя последовательная теория нелинейного резонансного поглощения не была построена. Целью настоящей работы является построение аналитической теории резонансного поглощения в условиях сильной нелинейности, которая связана как с релятивистскими, так и с нерелятивистскими эффектами динамики электронов в окрестности критической плотности плазмы, что должно восполнить пробел, все еще существующий в теории.

Наш теоретический подход строится на основе линейного решения [24] для углов падения θ , при которых $\rho > 1$, с использованием формализма ренормгрупповых преобразований. В развиваемой здесь теории с учетом подходов работ [4, 36] рассмотрение ведется в рамках гидродинамического приближения, плазма считается холодной и бесстолкновительной, т. е. в исходных уравнениях столкновения и конечная температура электронов не учитываются, хотя конечное значение резонансно усиленного плазменного электрического поля обеспечивается введением ширины плазменного резонанса, определяемой либо малой частотой соударений электронов, либо выносом ленгмюровских волн благодаря малым тепловым эффектам. Кроме того, рассматриваются достаточно плавные градиенты плотности плазмы, что позволяет, как и в классической теории линейной трансформации [9], аппроксимировать плотность в окрестности плазменного резонанса линейной зависимостью от координаты и пренебречь отличием ленгмюровской частоты колебаний плазмы в окрестности критической плотности от частоты лазера.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 для описания процесса поглощения лазерного излучения неоднородной плазмой сформулированы исходные уравнения, которые состоят из системы уравнений бесстолкновительной гидродинамики холодной электронной плазмы и уравнений Максвел-

ла. Для амплитуды отраженного от плазмы магнитного поля в вакууме на основной частоте получено уравнение с правой частью, содержащей в качестве источника излучения нелинейный ток, локализованный вблизи критической плотности плазмы. Применяя ренормгрупповой метод, развитый в [5], в разд. 3 нами построено решение этого уравнения с источником, определяющее амплитуду основной (первой) гармоники магнитного поля в вакууме, подробности вывода которой вынесены в Приложение А. В разд. 4 найдена нелинейная амплитуда магнитной составляющей электромагнитного поля в точке плазменного резонанса и проведена перенормировка функции источника, что в совокупности с результатами разд. 2 позволило получить самосогласованные выражения для амплитуды отраженного магнитного поля и коэффициента поглощения на основной частоте. Формулы, связанные с нахождением нелинейной амплитуды магнитной составляющей в точке резонанса, помещены в Приложение В. В разд. 3 также получено (подробности вычислений см. в Приложении С) приближенное аналитическое выражение для искомой нелинейной резонансной амплитуды магнитного поля и обоснована необходимость учета релятивистских эффектов движения электронов плазмы в области критической плотности при построении нелинейной теории резонансного поглощения лазерного излучения неоднородной плазмой, несмотря на нерелятивизм поля накачки. Показано, что пространственно-временная модуляция фазы релятивистских колебаний электронов [36] приводит к насыщению нелинейной амплитуды поля плазменного резонанса и подавлению резонансного поглощения, т. е. к уменьшению коэффициента поглощения с ростом плотности потока лазерной энергии. С учетом этого эффекта проведена корректировка обсуждавшейся ранее [5, 36] области применимости релятивистской гидродинамической модели плазменного резонанса. В заключительном разд. 5 кратко сформулированы результаты нелинейной теории резонансного поглощения и в качестве еще одного примера, для которого важен эффект нелинейности плазменного резонанса, обсуждается генерация квазистатического электрического поля при учете релятивизма плазменных волн в окрестности критической плотности неоднородной плазмы.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для описания процесса нелинейного отражения, поглощения и генерации гармоник p -поляризо-

ванной электромагнитной волны, которая падает на слабонеоднородную вдоль координаты x плазму под углом θ и характеризуется электрическим \mathbf{E} и магнитным \mathbf{B} полями с частотой ω_0 ,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}\{0, 0, B_0(x)\} \exp(ik_y y - i\omega_0 t) + \text{c.c.},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\{E_{0x}(x), E_{0y}(x), 0\} \exp(ik_y y - i\omega_0 t) + \text{c.c.}, \quad (1)$$

$$k_y = k_0 \sin \theta, \quad k_0 = \omega_0/c,$$

в качестве исходных уравнений, запишем следующие уравнения бесстолкновительной гидродинамики холодной релятивистской электронной плазмы и уравнения Максвелла:

$$\partial_t \mathbf{p} + (\mathbf{v} \partial_{\mathbf{r}}) \mathbf{p} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right),$$

$$\partial_t n_e + \text{div}(n_e \mathbf{v}) = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} e n_e \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi (e n_e + e_i n_i),$$

$$\mathbf{p} \equiv m \mathbf{v} \gamma = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2/c^2}}.$$

Здесь m и e — масса и заряд электрона, n_e , \mathbf{v} , \mathbf{p} — плотность, скорость и импульс электронов плазмы; \mathbf{E} и \mathbf{B} — напряженности электрической и магнитной составляющих p -поляризованного электромагнитного излучения, характеризуемого наличием компоненты электрического поля в (1) в направлении градиента неоднородности плазмы. Кроме того, ионы рассматриваются в качестве неподвижного нейтрализующего фона, а эффекты теплового движения и столкновений электронов, не включенные в уравнения (2), считаются малыми, хотя их роль в регуляризации особенности плазменного резонанса будет учтена в соответствии с ренормгрупповой процедурой построения нелинейного решения [5, 36].

Полагая отличными от нуля x - и y -компоненты скорости электронов и электрического поля и z -компоненту магнитного поля, получим из (2) после исключения плотности электронов следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \gamma (\partial_t v + av \partial_x v + au \partial_y v) + \\ & + \frac{a^2 \gamma^3}{c^2} [vu (\partial_t u + av \partial_x u + au \partial_y u) + \\ & + v^2 (\partial_t v + av \partial_x v + au \partial_y v)] = P + (au/c)R, \\ & \gamma (\partial_t u + av \partial_x u + au \partial_y u) + \\ & + \frac{a^2 \gamma^3}{c^2} [vu (\partial_t v + av \partial_x v + au \partial_y v) + \\ & + u^2 (\partial_t u + av \partial_x u + au \partial_y u)] = Q - (av/c)R, \\ & \partial_t P + av \partial_x P + av \partial_y Q - c \partial_y R + \omega_L^2 v = 0, \\ & \partial_t Q + au \partial_x P + au \partial_y Q + c \partial_x R + \omega_L^2 u = 0, \\ & \partial_t R + c \partial_x Q - c \partial_y P = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В этой системе $a = -2e|B_1(0)| \sin \theta / m \omega_0^2 L$ — безразмерная постоянная, пропорциональная амплитуде магнитного поля $|B_1(0)|$ в точке плазменного резонанса $x = 0$; $B_1(0)$ — комплексная амплитуда фурье-компоненты магнитного поля в точке $x = 0$ на частоте лазера ω_0 :

$$\begin{aligned} B_1(0) &= |B_1(0)| \exp[i \arg B_1(0)] = \\ &= \frac{m \omega_0^2 L a}{2|e| \sin \theta} \exp[i \arg B_1(0)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Функции $v = v_x/a$, $u = v_y/a$ описывают нормированные значения компонент скорости электронов;

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - (a^2/c^2)(v^2 + u^2)};$$

$P = eE_x/ma$, $Q = eE_y/ma$, $R = eB_z/ma$ — нормированные значения компонент электрического (E_x, E_y) и магнитного (B_z) полей, $\omega_L \equiv \omega_L(x) = (4\pi e^2 n_0/m)^{1/2}$ — электронная ленгмюровская частота плазмы с плотностью $n_0(x)$, которая в окрестности плазменного резонанса $x = 0$ аппроксимируется линейной зависимостью от координаты x ,

$$n_0(x) = (1 + x/L)n_c,$$

где критическая плотность $n_c = m \omega_0^2 / 4\pi e^2$ и L — характерный масштаб неоднородности плотности. Отметим, что в рассматриваемом нами случае плавной неоднородности плазмы, $L \gg \Delta, 1/k_0$, где Δ — ширина плазменного резонанса, линейная зависимость от координаты x справедлива в окрестности резонанса для любого монотонного профиля плотности. Условие слабой неоднородности плазмы $k_0 L \gg 1$ является также критически важным для эффективного резонансного поглощения. Заметим, что масштаб неоднородности плазмы может изменяться в результате неучитываемых разлета плазмы и действия лазерной ponderomotorной силы [22, 31, 38–40]. В данной работе мы исходим из того, что такое изменение профиля плотности можно

учитывать через параметр L , предполагая, однако, что условия слабой неоднородности плазмы не нарушаются.

Представляя входящие в (3) величины скоростей и полей v, u, P, Q, R в виде разложения в ряд по гармоникам падающей волны (1), поставим в соответствие каждой из этих величин ее фурье-компоненту v_n, u_n, P_n, Q_n, R_n :

$$\{v, u, P, Q, R\} = \sum_{-\infty}^{\infty} \{v, u, P, Q, R\}_n \times \exp[-in(\omega_0 t - k_y y)]. \quad (5)$$

Используя разложение (5), из системы уравнений (3) получим следующее уравнение для n -й гармоники магнитного поля:

$$\begin{aligned} \partial_{xx} R_n - \frac{\partial_x \varepsilon_n}{\varepsilon_n} \partial_x R_n + \left(\frac{n\omega_0}{c}\right)^2 (\varepsilon_n - \sin^2 \theta) R_n = \\ = \frac{ian\omega_0}{c^2} \{v(\partial_x P + \partial_y Q)\}_n \sin \theta + \\ + \frac{\omega_L^2}{c^2} \left\{ av\partial_x(\gamma v) + au\partial_y(\gamma v) + \partial_t(v(\gamma - 1)) - \frac{au}{c} R \right\}_n - \\ - \frac{a}{c} \left\{ \partial_x(u(\partial_x P + \partial_y Q)) \right\}_n + \frac{a\partial_x \varepsilon_n}{c\varepsilon_n} \left\{ u(\partial_x P + \partial_y Q) \right\}_n + \\ + \frac{i\omega_L^2}{cn\omega_0} \partial_x \left\{ av\partial_x(\gamma u) + au\partial_y(\gamma u) + \partial_t(u(\gamma - 1)) + \frac{au}{c} R \right\}_n - \\ - \frac{in\omega_0 \varepsilon_n}{c} \partial_x \left(\frac{\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n} \right) \left\{ av\partial_x(\gamma u) + au\partial_y(\gamma u) + \right. \\ \left. + \partial_t(u(\gamma - 1)) + \frac{av}{c} R \right\}_n. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_n = 1 - (\omega_L^2)/(n^2\omega_0^2)$ — комплексная диэлектрическая проницаемость плазмы на частоте $n\omega_0$. Правая часть уравнения (6) отвечает нелинейному источнику генерации гармоник в плазме. В отсутствие нелинейных эффектов (при $a \rightarrow 0$) этот источник исчезает и уравнение (6) описывает свободное распространение в неоднородной плазме p -поляризованной электромагнитной волны с частотой $n\omega_0$.

В интересующем нас случае магнитной составляющей поля на частоте лазера ω_0 примем во внимание, что при $n = 1$ в (6) наибольший вклад в источник дают резонансные слагаемые порядка $1/\varepsilon_1$, где $\varepsilon_1 = (i\Delta - x)/L$. Далее, из результатов работ [2, 4, 13] следует, что наибольший вклад в нелинейные эффекты плазменного резонанса определяется x -компонентой электрического поля и скорости электронов. Кроме того, зависимость электромагнитных полей и скоростей электронов от координаты x вдоль градиента плотности вблизи плазменного резонанса обратно пропорциональна величине

ширины плазменного резонанса $\Delta \ll L$ и оказывается существенно сильнее зависимости от поперечной координаты y , которая пропорциональна k_y . Наконец, в рассматриваемом случае слабонеоднородной плазмы с характерным масштабом неоднородности $L \gg 1/k_0$ можно пренебречь вкладами, пропорциональными градиенту неоднородности в правой части уравнений (6). Собирая перечисленные условия, приходим к совокупности неравенств, задающих область применимости модели:

$$k_0 L \gg 1, \quad k_y \Delta \ll 1, \quad \Delta \ll L. \quad (7)$$

С учетом сделанных предположений уравнение (6) для случая $n = 1$ преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \partial_{xx} R_1 - \frac{\partial_x \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \partial_x R_1 + \left(\frac{\omega_0}{c}\right)^2 (\varepsilon_1 - \sin^2 \theta) R_1 = \\ = -\frac{4\pi}{c} \left\{ \frac{a}{4\pi} \text{rot } \mathbf{J}_1 \right\}_z + \frac{a/c}{x - i\Delta} \times \\ \times \left[u\partial_x P - i\omega_0 v\partial_x(\gamma u) - \frac{\omega^2}{a}(\gamma - 1)u \right]_1, \quad (8) \end{aligned}$$

где компоненты вектора \mathbf{J}_1 определяются выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 = \left\{ v\partial_x P - i\omega_0 v\partial_x(\gamma v) - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma - 1)v, \right. \\ \left. u\partial_x P - i\omega_0 v\partial_x(\gamma u) - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma - 1)u, \quad 0 \right\}_1. \quad (9) \end{aligned}$$

В (8) положено $\omega_L = \omega_0$, т.е. пренебрегается зависимостью частоты ω_L от координаты x . Такое приближение оправдано для слабонеоднородной плазмы, когда область локализации поля плазменного резонанса мала по сравнению с характерным масштабом неоднородности плазмы L . Из уравнения (8) и соотношения (9) следует, что первая гармоника магнитного поля в вакууме определяется электрическим полем и скоростью электронов в области плазменного резонанса, которые были найдены нами ранее [36].

3. АМПЛИТУДА МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ВАКУУМЕ

Решение неоднородного уравнения (8) записывается через систему фундаментальных решений однородного уравнения Ψ^+ и Ψ^- в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 R_1(x) &= \alpha_1^+ \Psi_1^+(x) + \alpha_1^- \Psi_1^-(x) + \\
 &\quad + \int_{-\infty}^x d\xi G(x, \xi) f_1(\xi), \\
 G(x, \xi) &= -\frac{\Psi_1^+(x)\Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi)\Psi_1^-(x)}{\Psi_1^+(\xi)\Psi_1^{\prime-}(\xi) - \Psi_1^{\prime+}(\xi)\Psi_1^-(\xi)}, \\
 f_1(x) &= \frac{a}{c} \times \\
 &\times \left\{ ik_y \left(vP_x - i\omega_0 v(\gamma v)_x - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma - 1)v \right) + \right. \\
 &+ \frac{1}{x - i\Delta} \left[uP_x - i\omega_0 v(\gamma u)_x - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma - 1)u \right] - \\
 &\left. - \left[uP_x - i\omega_0 v(\gamma u)_x - \frac{\omega_0^2}{a}(\gamma - 1)u \right]_x \right\}, \tag{10}
 \end{aligned}$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина, а функции Ψ_1^+ и Ψ_1^- удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned}
 \partial_{xx} \Psi_1^\pm - \frac{\partial_x \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \partial_x \Psi_1^\pm + \\
 + \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^2 (\varepsilon_1 - \sin^2 \theta) \Psi_1^\pm = 0. \tag{11}
 \end{aligned}$$

В формулах (10) α_1^\pm — константы, определяемые граничными условиями для уравнения (8) применительно к решению (10). Граничные условия, в свою очередь, следуют из вида магнитного поля $R_1(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \tilde{C}_1^+ \exp\left(i\frac{\omega_0}{c}(x + \infty)\cos\theta\right) + \\
 &+ \tilde{C}_1^- \exp\left(-i\frac{\omega_0}{c}(x + \infty)\cos\theta\right), \quad x \rightarrow -\infty, \tag{12} \\
 R_1 &= 0, \quad x \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

где комплексные амплитуды \tilde{C}_1^+ и \tilde{C}_1^- отвечают соответственно падающей и отраженной волнам.

Учитывая, что источник излучения $f_1(x)$ локализован в окрестности плазменного резонанса $x \simeq 0$, для углов θ , удовлетворяющих условию

$$(\omega L/c)^{2/3} \sin^2 \theta \gg 1,$$

найдем амплитуду \tilde{C}_1^- (см. Приложение А):

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_1^- &= -i \exp\left(2i\frac{\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(-\infty)\right) \times \\
 &\quad \times \frac{1 - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right)}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right)} \tilde{C}_1^+ - \\
 &\quad - \frac{i \exp\left(\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z}\right)}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right)} \left(\frac{cL}{2\pi\omega_0|\cos\theta|k_y^2}\right)^2 \times \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f_1(\xi)}{\xi - i\Delta}. \tag{13}
 \end{aligned}$$

До сих пор мы рассматривали нормированную на безразмерную амплитуду a величину поля R (и соответствующую ей амплитуду \tilde{C}_1^-), однако конечная цель заключается в получении формул для магнитного поля B_z (и амплитуды C_1^-). Уравнение для фурье-компоненты B_1 получается из уравнения для R_1 после умножения на (am_e/e) . При этом связь между амплитудами \tilde{C}_1^- и C_1^- такая же, как между R_1 и B_1 , поэтому при переходе к формуле для фурье-компоненты магнитного поля B_z на основной частоте \tilde{C}_1^- следует домножить на (am_e/e) .

Окончательно получаем выражение для амплитуды первой гармоники магнитного поля в вакууме:

$$\begin{aligned}
 C_1^- &= \Omega_1 C_1^+ + \frac{m_e}{e} \frac{\omega_0^3 \Delta}{(2\pi)^{3/2}} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{L}{c\omega_0|\cos\theta|}\right)^{1/2} \Omega_2 \mathcal{I}. \tag{14}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= R_L^{1/2} \exp\left[2i\frac{\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(-\infty) - i\frac{\pi}{2}\right], \\
 \Omega_2 &= (G_L/2)^{1/2} \exp[i\mathcal{Z} + i \arg B_1(0) - i\pi], \tag{15}
 \end{aligned}$$

где $R_L = |C_{1L}^-/C_1^+|^2$, $G_L = 1 - R_L$ — коэффициенты соответственно отражения и поглощения в линейной теории, а C_{1L}^- — амплитуда магнитного поля отраженной волны в линейной теории:

$$\begin{aligned}
 R_L &= \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{4\omega_0 L}{3c} \sin^3 \theta\right)}{1 + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{4\omega_0 L}{3c} \sin^3 \theta\right)}\right)^2, \\
 G_L &= \frac{2 \exp\left(-\frac{4\omega_0 L}{3c} \sin^3 \theta\right)}{\left(1 + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{4\omega_0 L}{3c} \sin^3 \theta\right)\right)^2}. \tag{16}
 \end{aligned}$$

Интеграл \mathcal{I} и входящие в него безразмерные функции и переменные

$$P_0 = \frac{a}{\Delta\omega_0^2}P, \quad v_1 = \frac{a}{\Delta\omega_0}v, \quad x_0 = \frac{x}{\Delta},$$

найденные нами при построении структуры электрического поля релятивистского плазменного резонанса [36], имеют вид (см. Приложение А)

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_1 e^{i\tau(\chi, l)}}{x_0 - i} [\partial_\chi \tau \partial_l (P_0 - i\gamma v_1) - \\ & - \partial_l \tau \partial_\chi (P_0 - i\gamma v_1) - \\ & - (\partial_\chi \tau \partial_l x_0 - \partial_l \tau \partial_\chi x_0) (\gamma - 1)], \\ P_0 = & -\frac{A}{1+l^2} (l \cos \chi + \sin \chi), \\ v_0 = & -\frac{A}{1+l^2} (l \sin \chi - \cos \chi), \quad \gamma = 1 + \frac{B^2 v_0^2}{2}, \\ x_0 = & l - P_0, \quad v_1 = v_0 \frac{(1 + \frac{1}{4} B^2 v_0^2)^{1/2}}{1 + \frac{1}{2} B^2 v_0^2}, \\ \tau(\chi, l) = & \chi - \left(\zeta E(\varphi; k) - \frac{2}{\zeta} F(\varphi; k) - \varphi \right), \\ \zeta = & \sqrt{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}, \quad \varphi = \arcsin \frac{P_0}{\sqrt{v_0^2 + P_0^2}}, \\ k = & \sqrt{\frac{B^2(v_0^2 + P_0^2)}{4 + B^2(v_0^2 + P_0^2)}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$A = \frac{aL^2}{\Delta^2}, \quad B = \frac{\Delta\omega_0}{c};$$

$F(\varphi; k), E(\varphi; k)$ — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода [41, 42], а ширина плазменного резонанса Δ определяется либо тепловым движением электронов с тепловой скоростью V_T , либо малой частотой соударений ν частиц в плазме:

$$\Delta = \max \{ \nu L / \omega_0; \quad (3V_T^2 L / \omega_0^2)^{1/3} \}. \quad (18)$$

Из вида (14) следует, что амплитуда отраженного магнитного поля представляется суммой линейного, C_{1L}^- , т. е. не зависящего от a , и нелинейного, C_{1N}^- , слагаемых:

$$C^- = C_{1L}^- + C_{1N}^-,$$

где зависимость C_{1N}^- от лазерной интенсивности задается интегралом \mathcal{I} . В линейной теории безразмерная амплитуда $a = a_L$ определяется соотношением, связывающим амплитуду магнитного поля в точке

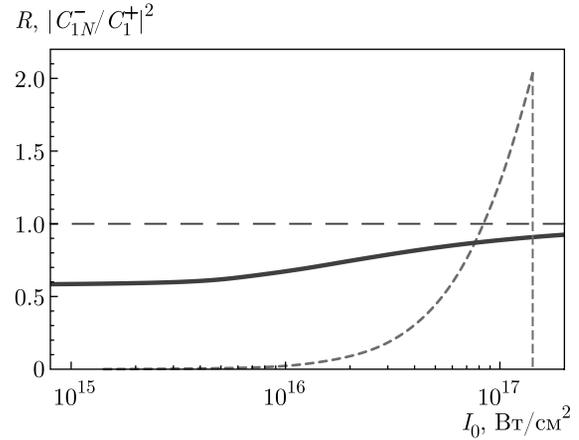


Рис. 1. Нелинейный коэффициент отражения на основной частоте после процедуры перенормировки (синяя кривая) и величина $|C_{1N}^- / C_1^+|^2$ без учета перенормировки (штриховая кривая) в зависимости от интенсивности лазерного поля I_0 для температуры $T = 2$ кэВ и масштаба неоднородности плазмы $L = 30\lambda$ при угле падения лазерного излучения $\theta_{min} = 10^\circ$. Штриховая вертикальная прямая соответствует границе опрокидывания плазменной волны в точке резонанса в случае использования линейной амплитуды a_L

плазменного резонанса с амплитудой падающей волны через коэффициент отражения R_L [17],

$$a_L = \left| \frac{cB_0^2 e^2}{\pi m^2} \frac{|\cos \theta|}{\omega_0^5 L^3} (1 - R_L) \right|^{1/2}, \quad B_0 = 2C_1^+. \quad (19)$$

Ниже, в случаях подстановки конкретных параметров лазера и плазмы, для определенности будем вести обсуждение на языке лазерной интенсивности I_0 [Вт/см²] Nd-лазера с длиной волны $\lambda = 1.06$ мкм, масштаба неоднородности L [λ], выраженного в длинах волны лазерного излучения, температуры плазмы T [кэВ], угла падения лазерного излучения θ и параметра $\rho \equiv (\omega_0 L / c)^{2/3} \sin^2 \theta$. Исходя из условия построения нелинейного решения уравнения (8) с помощью линейных решений однородного уравнения, которые существуют при не слишком малых углах, значение параметра

$$\rho_{min} \equiv (\omega L / c)^{2/3} \sin^2 \theta_{min} = 1$$

может считаться предельным для аналитической теории, а θ_{min} — минимально допустимым углом падения лазерного излучения на плазму при заданных ω_0 и L .

Легко проверить, что использование в \mathcal{I} величины $a_L \propto B_0$ вместо a приводит к завышенным значениям C_{1N}^- при больших интенсивностях лазера (как это показано на рис. 1), естественно, при таких зна-

чениях интенсивности, которые ограничены условием отсутствия опрокидывания плазменной волны в резонансе. Неограниченный рост $C_{1N}^-(a_L)$ приводит к тому, что, начиная с некоторого значения лазерной интенсивности, величина $C_{1N}^-(a_L)$ превышает амплитуду поля накачки, что физически невозможно. Такое поведение нелинейного вклада связано с неправомерным использованием в источнике $f_1(x)$ амплитуды a , задаваемой в линейном приближении (19), которая не учитывает нелинейной связи между амплитудой плазменного поля в точке $x = 0$ и амплитудой поля накачки. Этот факт свидетельствует о необходимости построения самосогласованной нелинейной теории отражения лазерного излучения неоднородной плазмой с отличной от (19) амплитудой магнитного поля в точке резонанса $a \neq a_L$, учитывающей нелинейную зависимость $|B_1(0)|$ от C_1^+ , и последующей перенормировкой функции источника $f_1(x)$. Как будет показано ниже, неограниченный рост нелинейной части коэффициента отражения $C_{1N}^-(a)$ в результате такой перенормировки сменяется насыщением. Зависимость полного нелинейного коэффициента отражения на основной частоте $R = |C_1^-/C_1^+|^2$ от лазерной интенсивности после перенормировки на нелинейную амплитуду a показана на рис. 1 синей кривой, а выявлению аналитической связи между $B_1(0)$ и C_1^+ и записи формулы, которая и отвечает насыщению нелинейного роста $C_{1N}^-(a)$ на рис. 1, посвящен следующий раздел.

4. ПЕРЕНОРМИРОВКА АМПЛИТУДЫ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В РЕЗОНАНСЕ И НЕЛИНЕЙНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ

Следуя схеме, аналогичной схеме вычисления амплитуды \tilde{C}_1^- , получим выражение для магнитного поля в точке плазменного резонанса (см. Приложение В):

$$R_1(0) = \left(\frac{2c|\cos\theta|}{\pi\omega_0 L \sin^2\theta} \right)^{1/2} \times \times \frac{\exp[\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z}]}{1 + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right]} \tilde{C}_1^+ \times \times \frac{i/\pi k_y^2}{1 + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right]} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f_1(\xi)}{\xi - i\Delta}. \quad (20)$$

Переходя от амплитуды \tilde{C}_1^- к амплитуде C_1^- путем домножения \tilde{C}_1^- на (am_e/e) и прибегая к нормиров-

ке (4), но уже вне рамок линейного приближения для амплитуды в резонансе (19), перепишем (20) в виде

$$\frac{\omega_0^2}{2} \left(aL - \frac{\Delta\mathcal{I}}{\pi^2 \left(1 + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right] \right)} \right) \times \times \exp[i \arg B_1(0)] = \frac{|e|}{m} |C_1^+| \left(\frac{2c|\cos\theta|}{\pi\omega_0 L} \right)^{1/2} \times \times \frac{\exp[\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z} + i \arg C_1^+]}{1 + \frac{1}{2} \exp\left[\frac{2\omega_0}{c}\mathcal{L}_+(0)\right]}. \quad (21)$$

Или, что то же самое, на языке безразмерных переменных (амплитуд) $A = aL^2/\Delta^2$ и $A_L = a_L L^2/\Delta^2$:

$$\left(A - \frac{L/\Delta}{2\pi^2} \left(1 + R_L^{1/2} \right) \mathcal{I} \right) \exp[i \arg B_1(0)] = = A_L \exp[i\mathcal{Z} + i \arg C_1^+]. \quad (22)$$

Поскольку интеграл \mathcal{I} (17) является комплексной функцией амплитуды a , т.е. безразмерной амплитуды A , выражение (22) представляет собой нелинейное трансцендентное комплексное уравнение для безразмерной амплитуды магнитного поля в точке плазменного резонанса как функции линейной амплитуды $A = A(A_L)$, а значит и как функции амплитуды падающей волны $A = A(C_1^+)$. Вычисление A из (22) решает поставленную задачу отыскания нелинейной связи амплитуды магнитного поля в точке $x = 0$ с амплитудой поля накачки и задачу перенормировки функций в (17) с учетом найденной связи.

Комплексное уравнение (22) эквивалентно следующим двум уравнениям для модулей и аргументов комплексных функций в правой и левой частях (22):

$$|F(A)| = A_L, \quad \phi + \phi_1 = \mathcal{Z} + \phi_0, \quad (23)$$

где

$$F(A) = A - \frac{L/\Delta}{2\pi^2} \left(1 + R_L^{1/2} \right) \mathcal{I}, \quad (24)$$

$$\phi = \arg F(A), \quad \phi_0 = \arg C_1^+, \quad \phi_1 = \arg B_1(0).$$

Для вычисления интеграла (17) и решения уравнения (23) для величины A использовался пакет компьютерной алгебры "Wolfram Mathematica" [43].

На рис. 2 представлены зависимости нелинейной амплитуды A от амплитуды по линейной теории A_L

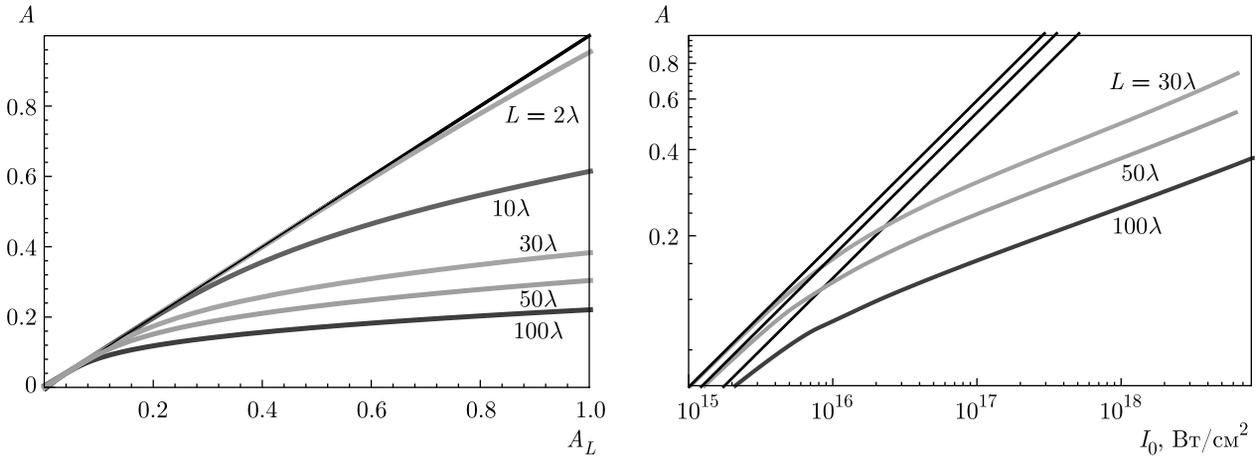


Рис. 2. Зависимости нелинейной амплитуды A от амплитуды, задаваемой линейным приближением A_L (слева) и от плотности потока энергии лазерного излучения I_0 (справа), вычисленные для электронной температуры плазмы $T = 2$ кэВ, разных масштабов неоднородности L и соответствующих им углов падения лазера на плазму $\theta = \theta_{min}$. Черная биссектриса (слева) и черные прямые (справа) отвечают пределу линейной теории

для пяти значений масштаба неоднородности L (слева) и подобные зависимости A от плотности потока энергии лазерного излучения I_0 для трех значений масштаба неоднородности L (справа). Температура плазмы T здесь фиксирована, а углы падения равны минимальным $\theta = \theta_{min}$ при соответствующих L . Нелинейность в области резонанса приводит к падению амплитуды поля в точке $x = 0$ в сравнении с результатом линейной теории, и наблюдается эффект насыщения — замедление роста амплитуды резонансного поля с ростом амплитуды поля накачки. В случае слабонеоднородной плазмы, когда $L \simeq (10 - 100)\lambda$, отличие A от A_L с увеличением лазерной интенсивности растет весьма существенно, тогда как при сравнительно более резких градиентах неоднородности $L \simeq \lambda$ отличие A от амплитуды A_L в линейной теории слабо заметно.

Перенормировка амплитуды влечет за собой изменение границ применимости рассматриваемой здесь гидродинамической модели в сравнении с предыдущими результатами [5], которые были получены в рамках теории плазменного резонанса с учетом релятивистских эффектов движения электронов плазмы, но с использованием линейной связи (19) амплитуды магнитной компоненты электромагнитного поля в точке $x = 0$ с амплитудой поля накачки. Область применимости нашей теории в гидродинамическом смысле определяется опрокидыванием плазменной волны в точке резонанса [36], которое происходит при достижении лазерной плотностью потока энергии определен-

ного предельного значения. Падение резонансной амплитуды в результате перенормировки сдвигает это пороговое значение в область более высоких лазерных интенсивностей. Рисунок 3, на котором приведены границы опрокидывания на плоскости (T, I_0) для разных значений масштаба неоднородности плазмы, подтверждает вывод о расширении границ применимости построенной здесь теории в сторону максимально возможной интенсивности лазерного поля, при которой формулы используемой модели бесстолкновительной гидродинамики холодной плазмы, описывающие физические величины, остаются однозначными. Поскольку, как было показано выше, существенное отличие нелинейной амплитуды от линейной наблюдается при плавных градиентах плотности плазмы $L \simeq (10 - 100)\lambda$, то и расширение области применимости гидродинамической модели оказывается в этом случае наиболее заметным и сдвигает границу опрокидывания в область релятивистских лазерных интенсивностей далеко за пределы границы, предсказываемой нелинейной нерелятивистской теорией [4] (зеленая пунктирная кривая). В случае же более резкого градиента неоднородности (случай $L = 2\lambda$ на рис. 3) положения границ опрокидывания различаются несущественно. Заметим также, что условие опрокидывания, полученное в [4], которому соответствует зеленая пунктирная кривая, совпадает с хорошо известным условием $k_p e E_p / m \omega_p^2 = 1$, где $k_p = (\lambda_D^2 L)^{-1/3}$, $\omega_p \equiv \omega_L$ и E_p — электрическое поле плазмы (см., например, [44]).

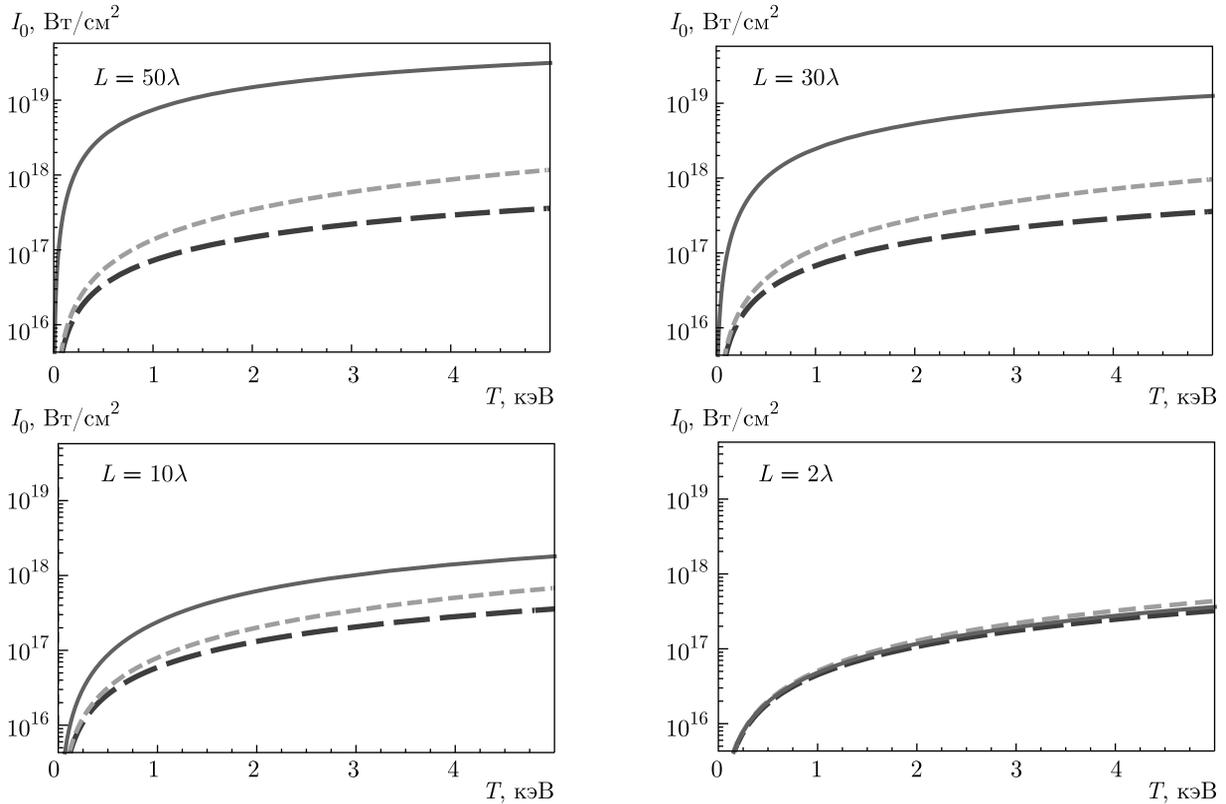


Рис. 3. Области применимости теории на плоскости параметров (T, I_0) для разных значений L . Сплошная красная кривая обозначает границу опрокидывания в релятивистской гидродинамике с учетом нелинейной перенормировки амплитуды в резонансе. Синяя штриховая линия отвечает релятивистской границе опрокидывания, но без учета нелинейной перенормировки. Зеленая пунктирная кривая соответствует порогу опрокидывания в нерелятивистской теории. Углы падения всюду равны минимальным $\theta = \theta_{min}$ при соответствующих L

Подставляя интеграл \mathcal{I} , найденный из первого уравнения (23), в C_1^- (14), с учетом равенства фаз из второго уравнения (23) получим формулу для амплитуды отраженного от плазмы магнитного поля на основной частоте:

$$C_1^- = -iC_1^+ \exp\left(2i\frac{\omega_0}{c}\mathcal{L}(-\infty)\right) \times \left\{ R_L^{1/2} + \left(1 - R_L^{1/2}\right) \left[1 - \frac{A}{A_L} e^{-i\phi}\right] \right\}. \quad (25)$$

Выражение (25) учитывает нелинейную перенормировку амплитуды поля в плазменном резонансе, которая заключается в переходе от амплитуды A_L в линейной теории отражения к амплитуде A , вычисляемой из (23). Тогда коэффициент отражения запишется в виде

$$R = \left| \frac{C_1^-}{C_1^+} \right|^2 = \left| R_L^{1/2} + \left(1 - R_L^{1/2}\right) \left[1 - \frac{A}{A_L} e^{-i\phi}\right] \right|^2. \quad (26)$$

Вычисление интеграла \mathcal{I} (17) как численным, так и аналитическим методами (см. Приложение С) показывает, что он представляет собой чисто мнимую величину. Поэтому из (23) и (24) вытекают равенства

$$\phi = \arg F(A) = \arccos \frac{A}{|F(A)|} = \arccos \frac{A}{A_L}, \quad (27)$$

$$\cos \phi = A/A_L,$$

которые позволяют записать коэффициент отражения в более компактной форме. Цепочка тождественных преобразований дает

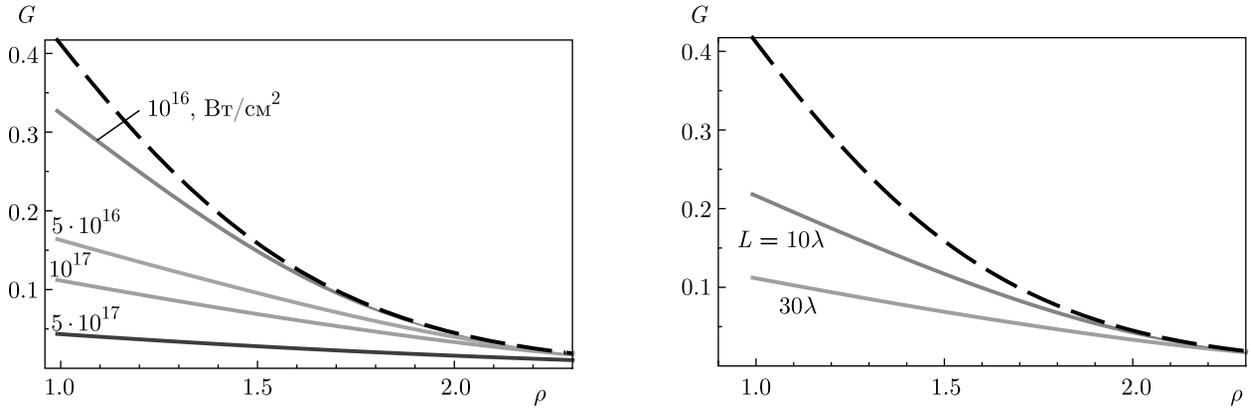


Рис. 4. Зависимости нелинейного коэффициента поглощения от углового параметра. Слева: графики построены при заданных значениях температуры плазмы $T = 2$ кэВ и масштаба неоднородности плазмы $L = 30\lambda$ для различных интенсивностей лазера (сплошные цветные линии). Справа: лазерная интенсивность $I_0 = 5 \cdot 10^{17}$ Вт/см², а разные цвета сплошных кривых отвечают различным масштабам неоднородности плазмы. Штриховая черная кривая соответствует коэффициенту поглощения в линейной теории

$$\left| R_L^{1/2} + (1 - R_L^{1/2}) \left[1 - \frac{A}{A_L} (\cos \phi - i \sin \phi) \right] \right|^2 = 1 - \left(\frac{A}{A_L} \right)^2 (1 - R_L). \quad (28)$$

Окончательно получаем нелинейные коэффициенты отражения R и поглощения G :

$$R = 1 - \left(\frac{A}{A_L} \right)^2 (1 - R_L), \quad G = \left(\frac{A}{A_L} \right)^2 G_L. \quad (29)$$

Формулы (29) очевидным образом демонстрируют предельный переход в линейную теорию при $A \rightarrow A_L$, т. е. верхнее ограничение коэффициентов отражения R и поглощения G их предельными значениями R_L и G_L . Уменьшение коэффициента резонансного поглощения с ростом лазерной плотности потока энергии показано на рис. 4 (слева), где представлены зависимости G от углового параметра ρ при фиксированных температуре плазмы и масштабе неоднородности. Рисунок 4 (справа) демонстрирует, как G уменьшается при переходе к слабонеоднородной плазме, если зафиксировать лазерную интенсивность.

Исследуем интеграл (17) аналитически и покажем, что он отличен от нуля только в случае учета релятивистской нелинейности. В работе [36], посвященной построению теории релятивистского плазменного резонанса, было показано, что параметры A и B отвечают вкладам соответственно нерелятивистской и релятивистской электронной нелинейности. В условиях только нерелятивистской нелинейности при конечных значениях параметра A наряду

с $c = \infty$ и $B = 0$ интеграл (17) строго обращается в нуль (см. Приложение С):

$$\mathcal{I}_{|c=\infty} = \mathcal{I}_0 = 0. \quad (30)$$

При этом из (23) и (29) получаем $A = A_L$ и $R = R_L$. Следовательно, в нерелятивистском пределе нелинейный вклад в коэффициент отражения отсутствует и справедлива линейная нормировка (19). Поскольку в нерелятивистском пределе равенство (30) выполняется строго, то и отличие R от R_L возникает только при учете релятивистской нелинейности плазменных волн.

Приближенное аналитическое вычисление \mathcal{I} при малых A и конечных значениях B дает (см. Приложение С)

$$\mathcal{I} \approx \mathcal{I}_1 = -\frac{3i\pi^2}{32} A^3 B^2. \quad (31)$$

Подставляя (31) в (23), приходим к уравнению для амплитуды A :

$$A^2 + \left(\frac{3B^2(L/\Delta)}{64} \right)^2 (1 + R_L^{1/2})^2 A^6 = A_L^2, \quad (32)$$

сводимому к кубическому уравнению в канонической форме

$$y^3 + py + q = 0, \quad p = \left(\frac{64(\Delta/L)}{3B^2(1 + R_L^{1/2})} \right)^2, \quad (33)$$

$$q = -pA_L^2,$$

вещественное решение которого определяет квадрат искомой амплитуды:

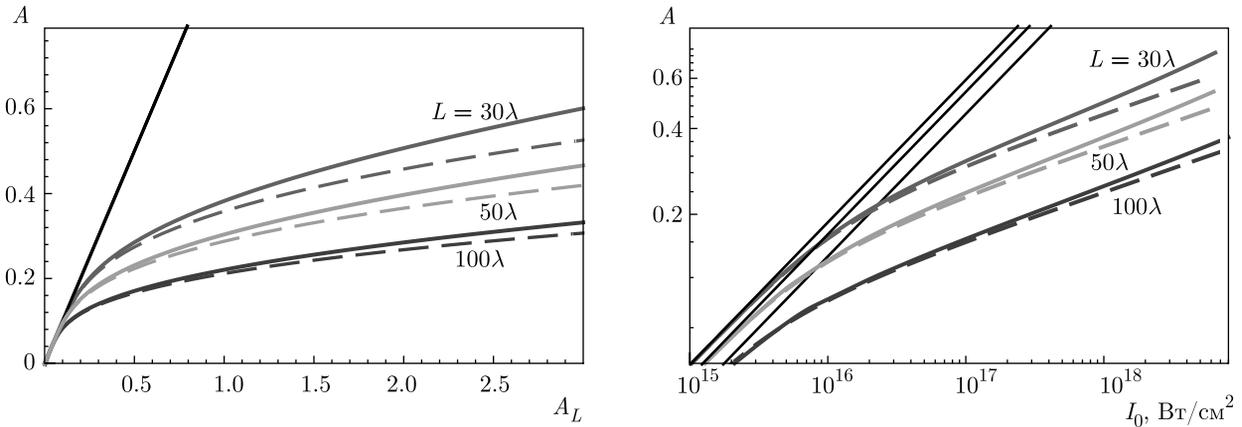


Рис. 5. Сравнение зависимостей нелинейной амплитуды от амплитуды в линейном приближении (слева) и от плотности потока энергии лазерного излучения (справа), полученных с использованием компьютерной алгебры (сплошные линии) и с помощью формулы (34) (пунктирные кривые). Графики построены для электронной температуры плазмы $T = 2$ кэВ, масштабов неоднородности плазмы $L = 30\lambda$ (красные кривые), $L = 50\lambda$ (зеленые кривые), $L = 100\lambda$ (синие кривые) и соответствующих этим параметрам углов падения лазера на плазму $\theta = \theta_{min}$. Черные прямые линии соответствуют линейному пределу

$$A^2 = \frac{2^{1/3} p^{2/3} \left(\sqrt{12p + 81A_L^4} + 9A_L^2 \right)^{2/3} - 24^{1/3} p}{6^{2/3} p^{1/3} \left(\sqrt{12p + 81A_L^4} + 9A_L^2 \right)^{1/3}}. \quad (34)$$

На рис. 5 приведены зависимости $A(A_L)$ и $A(I_0)$, определяемые формулой (34), и численным решением уравнения (23). Из сравнения графиков следует, что аналитическое выражение (34) дает хорошее приближение для амплитуды A при малых значениях $A_L \lesssim 1$. Однако с ростом лазерной интенсивности и при приближении к границе опрокидывания отличие от численных результатов становится все более заметным. Таким образом, формула (34) может быть полезна для быстрой и грубой оценки перенормированной амплитуды и коэффициента поглощения.

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Развитая выше теория, количественно определяющая амплитуду поля плазменного резонанса, позволяет оценить не только коэффициент нелинейного поглощения/отражения на основной частоте, но и эффективность генерации высших гармоник лазерного излучения, а также квазистационарного электрического поля в окрестности плазменного резонанса. Отметим, что хотя эффект формирования медленно убывающих (степенных) спектров гармоник, благодаря пространственно-временной модуля-

ции релятивистских плазменных колебаний, уже отмечался [5], их строгую количественную характеристику мы оставляем на будущее. Здесь же достигнутый прогресс проиллюстрируем таким примером, как генерация квазистационарного электрического поля в области критической плотности, представляющего собой среднее по времени значение, E_{st} , полного продольного электрического поля плазменного резонанса [36]:

$$E_{st} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{px}(\tau, x) d\tau, \quad (35)$$

где E_{px} определяется неявным образом посредством функций

$$P_0(\chi, l), \quad v_0(\chi, l), \quad x_0(\chi, l), \quad \tau(\chi, l)$$

из (17) через параметрические переменные χ, l (см. [36]).

На рис. 6 показано пространственное распределение квазистатического электрического поля в окрестности точки $x = 0$ при заданных значениях температуры плазмы и масштаба неоднородности для различных значений лазерной плотности потока энергии.

Рисунок 6 показывает, что электрическое поле (35), так же как в теории возмущений [45] и в сильнонелинейной нерелятивистской теории [4], имеет универсальную биполярную форму. При этом нелинейная нерелятивистская теория [4] дает завышен-

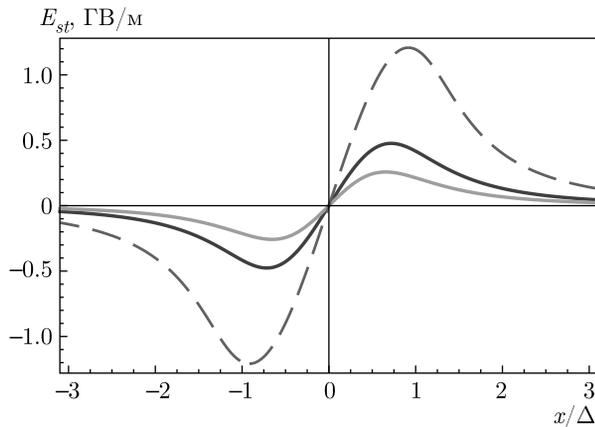


Рис. 6. Пространственное распределение квазистатического электрического поля плазменного резонанса, вычисленное при разных значениях лазерного потока I_0 , для температуры плазмы $T = 2$ кэВ, масштаба неоднородности $L = 30\lambda$ и угла падения $\theta_{min} = 10^\circ$. Синяя и зеленая кривые отвечают интенсивностям лазера соответственно $I_0 = 10^{18}$ Вт/см² и $I_0 \approx 3 \cdot 10^{18}$ Вт/см². Штриховая кривая дает пространственный профиль поля в пренебрежении эффектами релятивистской нелинейности для лазерного потока опрокидывания $I_0 \approx 3 \cdot 10^{17}$ Вт/см² в нерелятивистской теории [4]

ные значения амплитуды поля (см. штриховую линию на рис.6). Так, для заданных значений T, L максимум амплитуды статического поля $E_{st} \approx 1$ ГВ/м в нерелятивистской теории достигается уже при $I_0 \approx 3 \cdot 10^{17}$ Вт/см², а в релятивистской теории при той же лазерной интенсивности имеем $E_{st} \approx 0.3$ ГВ/м.

Графики зависимости максимального значения квазистатического электрического поля от плотности потока энергии лазерного излучения вплоть до порога опрокидывания для разных значений масштаба неоднородности (слева) и температуры плазмы (справа) представлены на рис. 7. На нем видно, что теория предсказывает генерацию квазистатического электрического поля мультимегавольного уровня начиная с лазерной интенсивности $I_0 \approx 10^{16}$ Вт/см² вплоть примерно до 1 ГВ/м в допустимых пределах применимости теории. Увеличение масштаба неоднородности сопровождается увеличением максимально возможной амплитуды статического поля. Однако более резкая зависимость амплитуды E_{st} от интенсивности лазера оказывается в случае плазмы с более резкими градиентами неоднородности плотности плазмы. Увеличение электронной температуры (при заданном масштабе неоднородности) ведет

к понижению амплитуды E_{st} , но (в рамках применимости нашей теории) допускает достижение того же максимально возможного поля, благодаря сдвигу границы опрокидывания плазменной волны в сторону более высокой интенсивности I_0 .

Оценим характерную энергию $W \sim eE_{st}\Delta$, приобретаемую электроном за счет ускорения квазистатическим электрическим полем на расстоянии порядка ширины плазменного резонанса. Так, для параметров $L = 30\lambda$, $T = 2$ кэВ, $I_0 \approx 10^{18}$ Вт/см², $\theta_{min} = 10^\circ$ энергия ускоренных электронов составляет $W \sim 30$ кэВ. При этом отметим, что еще предстоит понять возможные следствия такого механизма генерации быстрых электронов, хотя уже можно сделать вывод о том, что благодаря биполярности электрического поля, быстрые электроны, испытывающие на себе действие разнонаправленной статической электрической силы в плазменном резонансе, не покидают его узкой пространственной области. Последнее позволяет заключить, что такие электроны не окажут дополнительного паразитного эффекта на предподогрев ЛТС-мишени, ограничение которого составляет одну из важнейших задач выявления оптимальных условий реализации ЛТС в схеме прямого нагрева.

В заключение сформулируем основные полученные результаты. Построена аналитическая теория резонансного поглощения лазерного излучения в неоднородной плазме с учетом релятивистской электронной нелинейности в окрестности критической плотности плазмы. Получено уравнение, определяющее нелинейную амплитуду магнитной составляющей электромагнитного поля в точке плазменного резонанса, из решения которого следует значительное понижение величины этой амплитуды в области сильной нелинейности в сравнении с результатами линейной теории поглощения. Продемонстрирован эффект насыщения резонанса — замедления роста амплитуды резонансного поля при увеличении интенсивности накачки и показано, что он проявляется наиболее существенно в случае большой плазменной короны, при масштабах неоднородности плазмы $L \gtrsim 100\lambda$, тогда как при достаточно крутой неоднородности плазмы, $L < 10\lambda$, эффект не столь выражен. Это проиллюстрировано на языке перенормировки амплитуды поля в области критической плотности плазмы, возникающей в представленной теории релятивистского плазменного резонанса. В свою очередь, перенормировка приводит к переопределению границы области применимости (по лазерной интенсивности накачки) релятивистской гидродинамической модели благодаря тому, что опрокидыва-

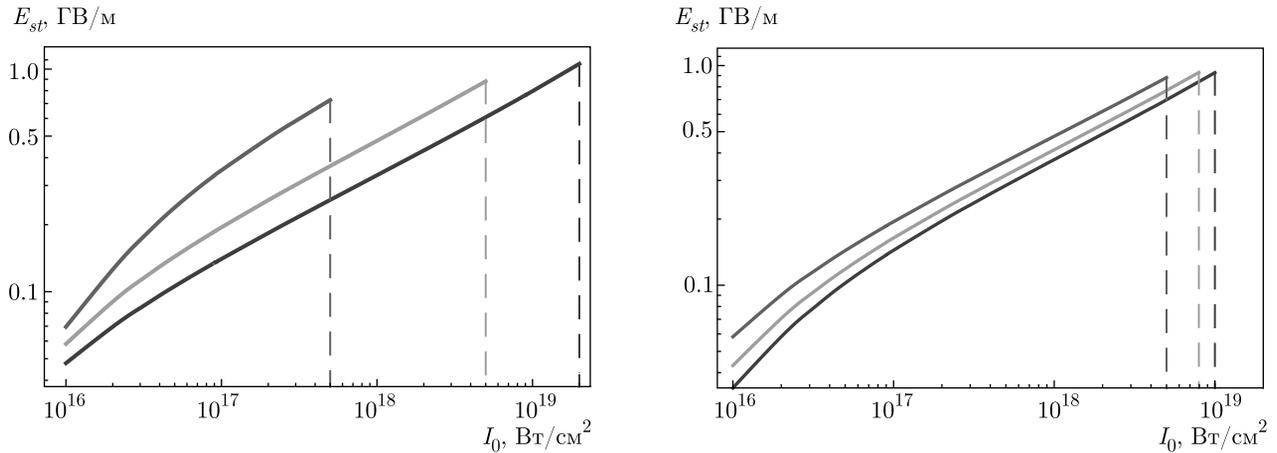


Рис. 7. Зависимости амплитуды квазистатического электрического поля в области плазменного резонанса от плотности потока энергии лазерного излучения. Слева: кривые построены для $T = 2$ кэВ и масштабов неоднородности $L = 50\lambda$ (синяя линия), $L = 30\lambda$ (зеленая линия), $L = 10\lambda$ (красная линия). Справа: кривые построены для $L = 30\lambda$ и электронных температур плазмы $T = 2$ кэВ (красная линия), $T = 3$ кэВ (зеленая линия), $T = 4$ кэВ (синяя линия). Вертикальные штриховые прямые отмечают границы опрокидывания. Углы падения всюду выбраны $\theta = \theta_{min}$ при соответствующих параметрах плазмы

ние плазменной волны возникает при бóльших лазерных интенсивностях.

Найден нелинейный коэффициент резонансного поглощения лазерного излучения, который зависит от четырех лазерно-плазменных управляющих параметров – лазерной интенсивности, масштаба неоднородности плазмы, ее температуры и угла падения лазерного излучения на плазму. Выявлено уменьшение нелинейного коэффициента поглощения с увеличением лазерной плотности потока энергии. Так, например, при угловом параметре $\rho = 1$, масштабе неоднородности $L = 30\lambda$, электронной температуре плазмы $T = 2$ кэВ и интенсивности Nd-лазера $I_0 \approx 5 \cdot 10^{17}$ Вт/см² нелинейный коэффициент поглощения составляет $G \approx 5 \cdot 10^{-2}$, тогда как классическая линейная теория приводила бы к $G_L \approx 0.4$. Выявленное «отключение» резонансного поглощения является следствием релятивистской динамики электронов плазмы в окрестности критической плотности. Релятивистская нелинейность, как эффект увеличения релятивистской эффективной массы электронов, проявляется в виде пространственно-временной модуляции фазы электронных колебаний [36]. Такое проявление релятивистской нелинейности аналогично качественной картине, обсуждавшейся в работах [34, 35], как причине уменьшения поглощения с ростом лазерной интенсивности.

Проведенное аналитическое исследование доказало, что нелинейный характер коэффициента

поглощения и амплитуды поля в резонансе обусловлен именно релятивистской нелинейностью движения электронов плазмы в окрестности критической плотности и не проявляется при учете лишь нерелятивистской нелинейности [4]. Найденное приближенное аналитическое выражение для оценки амплитуды резонансного поля и нелинейного коэффициента поглощения, которое дает хорошее совпадение с результатом их численного расчета при умеренных лазерных плотностях потока энергии $I_0 \approx 10^{16} - 10^{17}$ Вт/см². Исследованы свойства генерируемого квазистатического электрического поля в окрестности критической плотности в условиях нелинейного резонансного поглощения в зависимости от лазерно-плазменных параметров. Развита теория плазменного резонанса открывает возможности дальнейшего продвижения теории генерации высших гармоник [5] по пути строгой количественной характеристики их интенсивности.

Финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 17-12-01283).

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычисление амплитуды \tilde{C}_1^-

В условиях слабой неоднородности плазмы $k_0 L \gg 1$ приближенное решение уравнения (11) можно записать через функции Эйри:

$$\alpha_1^- = \frac{i}{2} \alpha_1^+ \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] - \frac{i}{2} \left(\frac{2cL}{\omega_0} \right)^{1/2} \times \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f_1(\xi) K_1 [(\xi - i\Delta)k_y]. \quad (41)$$

В области, где плотность плазмы обращается в нуль, т. е. при $x \rightarrow -\infty$, магнитное поле представляется в виде линейной комбинации падающей и отраженной плоских волн с коэффициентами \tilde{C}_1^+ и \tilde{C}_1^- (12). Эти коэффициенты могут быть выражены через α_1^+ и α_1^- , если использовать в (40) формулы (38) и перейти к пределу $x \rightarrow -\infty$ с учетом асимптотических выражений для функций Эйри. В результате имеем

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^+ &= (i\alpha_1^+ + \alpha_1^-) \frac{\exp[-i\mathcal{Z}]}{2\sqrt{\pi}|\cos\theta|}, \\ \tilde{C}_1^- &= (\alpha_1^- - i\alpha_1^+) \frac{\exp[i\mathcal{Z}]}{2\sqrt{\pi}|\cos\theta|}, \\ \mathcal{Z} &= \frac{\pi}{4} + \frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(-\infty). \end{aligned} \quad (42)$$

Исключая из (42) коэффициенты α_1^+ и α_1^- с учетом (41) и принимая во внимание, что $K_1(x) \approx 1/x$ в интересующей нас области локализации источника $(\xi - i\Delta)k_y \ll 1$, получим связь коэффициентов \tilde{C}_1^- и \tilde{C}_1^+ :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1^- &= -i \exp \left[2i \frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(-\infty) \right] \times \\ &\times \frac{1 - \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right]}{1 + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right]} \tilde{C}_1^+ - \\ &- \frac{i \exp [\mathcal{L}_+(0) + i\mathcal{Z}]}{1 + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right]} \left(\frac{cL}{2\pi\omega_0 |\cos\theta| k_y^2} \right)^2 \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f_1(\xi)}{\xi - i\Delta}. \end{aligned} \quad (43)$$

Кроме того, в случае линейного профиля плотности плазмы, когда координатная зависимость диэлектрической проницаемости на основной частоте имеет вид

$$\varepsilon_1 = (i\Delta - x)/L,$$

справедлива формула

$$\mathcal{L}_+(0) = -(2L/3) \sin^3 \theta.$$

Принимая во внимание, что функции полей $P(x, t)$, $Q(x, t)$ и скоростей $v(x, t)$, $u(x, t)$ обращаются в нуль при $x \rightarrow \infty$, упростим интеграл от источника $f_1(x)$ в (43) интегрированием по частям, и, как следствие, исключением из подынтегрального выражения функций поперечных компонент электрического поля u и скорости электронов Q :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{f_1(x)}{x - i\Delta} &= \frac{a}{c} i k_y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - i\Delta} \times \\ &\times \left[v P_x - i\omega_0 v(\gamma v)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma - 1)v \right]_1 = \\ &= \frac{a i k_y}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - i\Delta} \int_0^{2\pi} d(\omega_0 t - y k_y) \times \\ &\times \left[v P_x - i\omega_0 v(\gamma v)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma - 1)v \right] e^{\omega_0 t - y k_y} = \frac{a i k_y}{2\pi c} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x - i\Delta} \int_0^{2\pi} d\tau \left[v P_x - i\omega_0 v(\gamma v)_x - \frac{\omega_0^2}{a} (\gamma - 1)v \right] e^\tau = \\ &= \frac{i \Delta \omega_0^3 k_y}{2\pi c a} \exp[-i\pi + i \arg B_1(0)] \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_1 e^{i\tau(\chi, l)}}{x_0 - i} \times \\ &\times [\partial_\chi \tau \partial_l (P_0 - i\gamma v_1) - \partial_l \tau \partial_\chi (P_0 - i\gamma v_1) - \\ &- (\partial_\chi \tau \partial_l x_0 - \partial_l \tau \partial_\chi x_0) (\gamma - 1)], \\ P_0 &= -\frac{A}{1 + l^2} (l \cos \chi + \sin \chi), \\ v_0 &= -\frac{A}{1 + l^2} (l \sin \chi - \cos \chi), \quad \gamma = 1 + \frac{B^2 v_0^2}{2}, \\ x_0 &= l - P_0, \quad v_1 = v_0 \frac{\left(1 + \frac{1}{4} B^2 v_0^2\right)^{1/2}}{1 + \frac{1}{2} B^2 v_0^2}, \\ \tau(\chi, l) &= \chi - \left(\zeta E(\varphi; k) - \frac{2}{\zeta} F(\varphi; k) - \varphi \right), \\ \zeta &= \sqrt{4 + B^2 (v_0^2 + P_0^2)}, \quad \varphi = \arcsin \frac{P_0}{\sqrt{v_0^2 + P_0^2}}, \\ k &= \sqrt{\frac{B^2 (v_0^2 + P_0^2)}{4 + B^2 (v_0^2 + P_0^2)}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Здесь из соображений удобства мы ввели безразмерные функции и переменные P_0, v_1, x_0 , которые связаны с P, v, x следующим образом:

$$P_0 = \frac{a}{\Delta \omega_0^2} P, \quad v_1 = \frac{a}{\Delta \omega_0} v$$

и $x_0 = x/\Delta$ (см. [36]). Кроме того, в (44) совершен переход от переменных интегрирования (τ, x) к переменным (χ, l) с якобианом перехода

$$D \equiv \partial_\chi \tau \partial_l x_0 - \partial_l \tau \partial_\chi x_0.$$

Совокупность формул

$$P_0(\chi, l), \quad v_0(\chi, l), \quad x_0(\chi, l), \quad \tau(\chi, l)$$

через параметрические переменные χ, l неявным образом определяет нелинейную зависимость электрического поля плазменного резонанса. Нелинейная зависимость электрического поля и скорости от координаты и времени в формулах (11) определяется неявным образом через параметрическую переменную, а в выражениях (13) для конечных преобразований скорости и времени в роли параметрических переменных выступают уже электрическое поле и скорость.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вычисление $R_1(0)$

Исходя из (40), запишем формулу для первой гармоники магнитного поля в точке $x = 0$:

$$R_1(0) = \alpha_1^+ \Psi_1^+(0) + \alpha_1^- \Psi_1^-(0) + \frac{\pi c L}{\omega_0} \times \int_{-\infty}^0 d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(0) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(0)]. \quad (46)$$

Подставляя в (46) выражение (41), связывающее α_1^- с α_1^+ , получим

$$R_1(0) = \alpha_1^+ \left(\Psi_1^+(0) + \frac{i}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \Psi_1^-(0) \right) - \frac{i}{2} \left(\frac{2cL}{\omega_0} \right)^{1/2} \Psi_1^-(0) \exp \left[\frac{\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right] \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi f_1(\xi) K_1 [(\xi - i\Delta)k_y] + \frac{\pi c L}{\omega_0} \times \int_{-\infty}^0 d\xi \frac{f_1(\xi)}{i\Delta - \xi} [\Psi_1^+(0) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(0)] = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3. \quad (47)$$

Сравним два интегральных вклада Λ_2 и Λ_3 в (47). Чтобы оценить интегралы, воспользуемся (38) и приближенными формулами для модифицированных функций Бесселя первого порядка при малых

значениях аргумента $K_1(x)|_{x \simeq 0} \simeq 1/x$, $I_1(x)|_{x \simeq 0} \simeq x/2$:

$$\Psi_1^+(0) \Psi_1^-(\xi) - \Psi_1^+(\xi) \Psi_1^-(0) \simeq \frac{\omega_0 \xi (2i\Delta - \xi)}{2\pi L c}, \quad (48)$$

$$\Lambda_2 \simeq \frac{i}{2\pi(\xi - i\Delta)k_y^2}, \quad \Lambda_3 \simeq \frac{\xi(2i\Delta - \xi)}{2(i\Delta - \xi)}.$$

Из второго условия применимости нашей модели (7) следует, что $\Lambda_2 \gg \Lambda_3$, а значит, вкладом Λ_3 можно пренебречь по параметру малости $k_y^2 \Delta^2 \ll 1$. Таким образом, мы получили упрощенное уравнение для амплитуды магнитного поля в точке плазменного резонанса:

$$R_1(0) = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \alpha_1^+ \Psi_1^+(0) + \alpha_1^- \Psi_1^-(0). \quad (49)$$

Отсюда, используя связь α_1^+ с α_1^- из (41), а также формулы (42), найдем

$$R_1(0) = \left(\frac{2c|\cos\theta|}{\pi\omega_0 L \sin^2\theta} \right)^{1/2} \times \frac{\exp[\mathcal{L}_+(0) + iZ]}{1 + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right]} \tilde{C}_1^+ \times \frac{(i/\pi k_y^2)}{1 + \frac{1}{2} \exp \left[\frac{2\omega_0}{c} \mathcal{L}_+(0) \right]} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{f_1(\xi)}{\xi - i\Delta}. \quad (50)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ С

Аналитическая оценка интеграла \mathcal{I}

Найдем приближенно интеграл (17) для значений амплитуды A , при которых можно считать, что $A^2 \ll 1$. В работе [36] было показано, что в релятивистском режиме параметр B , отвечающий за релятивистскую нелинейность, при температурах $T \simeq \simeq 1$ кэВ принимает значения $B \simeq 1$, а безразмерная амплитуда при этом $A \simeq 0.5$, что указывает на законность разложения подынтегральных функций в (17) в ряд по параметру $(AB)^2$. Отличим τ от χ при этом можно пренебречь. Итак,

$$\mathcal{I} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_1 e^{i\chi}}{x_0 - i} \times [\partial_l (P_0 - i\gamma v_0) - \partial_l x_0 (\gamma - 1)]. \quad (51)$$

Выражая скорость v_1 через v_0 , а x_0 через P_0 и разлагая функцию v_1 в ряд по параметру $(AB)^2$ с точностью до первого порядка малости, получим

$$\mathcal{I} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_0 e^{i\chi}}{x_0 - i} \times \left[\partial_l (P_0 - iv_0) - \frac{B^2 v_0^2}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \partial_l P_0 \right) \right] = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2. \quad (52)$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$\mathcal{I}_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_0 e^{i\chi}}{x_0 - i} \partial_l (P_0 - iv_0), \quad (53)$$

которое не зависит от B и соответствует учету нерелятивистской нелинейности, т. е. $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_{|c=\infty}$. Замечая, что подынтегральная функция имеет особенность $(x_0 - i)^{-1}$, вычислим \mathcal{I}_0 по теории вычетов, заменив интегрирование по χ интегрированием по окружности единичного радиуса. Переход к переменной $z = e^{i\chi}$ дает

$$v_0 = \frac{A(1 - \alpha z^2)}{2z(1 + il)}, \quad P_0 = -\frac{A(1 + \alpha z^2)}{2z(l - i)}, \quad (54)$$

$$x_0 - i = \frac{A(z - z_1)(z - z_2)}{2z(l + i)},$$

где

$$z_{1,2} = -\frac{1 + l^2}{A} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{A^2}{\alpha(1 + l^2)^2}} \right), \quad (55)$$

$$\alpha = \frac{1}{z_1 z_2} = \frac{l - i}{l + i}, \quad |z_1| > 1, \quad |z_2| < 1.$$

Тогда интеграл по времени χ сводится к интегралу по кругу $|z| = 1$, который определяется вычетами в точках $z = z_2, z = 0$ и равен нулю:

$$\int_{|z|=1} dz \frac{1 - \alpha z^2}{z(z - z_1)(z - z_2)} = 2\pi i \sum_{z=z_2,0} \text{res} \frac{1 - \alpha z^2}{z(z - z_1)(z - z_2)} = 0. \quad (56)$$

Таким образом, нерелятивистское слагаемое \mathcal{I}_0 не дает вклада в \mathcal{I} . Слагаемое \mathcal{I}_1 после замены $z = e^{i\chi}$ преобразуется следующим образом:

$$\mathcal{I}_1 = -\frac{B^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{v_0^3 e^{i\chi}}{x_0 - i} = -\frac{B^2 A^2}{8i} \times \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{l+i}{(1+il)^3} \int_{|z|=1} dz \frac{1-3\alpha z^2+3\alpha^2 z^4-\alpha^3 z^6}{z^2(z-z_1)(z-z_2)}. \quad (57)$$

Интеграл по кругу определяется суммой вычетов подынтегральной функции $f(z)$ в точках $z = z_2, z = 0$:

$$\int_{|z|=1} dz f(z) = 2\pi i \sum_{z=z_2,0} \text{res} \frac{1-3\alpha z^2+3\alpha^2 z^4-\alpha^3 z^6}{z^2(z-z_1)(z-z_2)} = 2\pi i \frac{3z_1 - z_2}{z_1^3 z_2} \approx \frac{6i\pi}{z_1^2 z_2}. \quad (58)$$

Последнее приближенное равенство справедливо, поскольку $|z_1| \gg |z_2|$. Переходя в (55) для $z_{1,2}$ к пределу при $A^2 \ll 1$ и вычисляя интеграл по пространству вновь по теории вычетов, получим

$$z_2 \approx -\frac{A}{2\alpha(1 + l^2)},$$

$$\mathcal{I}_1 \approx \frac{3i\pi A^3 B^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{l^2 + 2il - 1}{(1 + l^2)^3} = -\frac{3i\pi^2}{32} A^3 B^2. \quad (59)$$

Вклад \mathcal{I}_2 находится аналогичным образом и равен

$$\mathcal{I}_2 = \frac{B^2}{8} \int_{-\infty}^{\infty} dl \int_0^{2\pi} d\chi \frac{e^{i\chi} v_0^3 \partial_l P_0}{x_0 - i} \approx -\frac{15i\pi^2 B^2 A^5}{4096}. \quad (60)$$

Принимая во внимание, что $\mathcal{I}_2 \ll \mathcal{I}_1$, запишем окончательное приближенное значение интеграла \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} \approx -\frac{3i\pi^2}{32} A^3 B^2. \quad (61)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. M. J. Rosenberg, A. A. Solodov, J. F. Myatt, W. Seika, P. Michel, M. Hohenberger, R. W. Short, R. Epstein, S. P. Regan, E. M. Campbell, T. Chapman, C. Goyon, J. E. Ralph, M. A. Barrios, J. D. Moody, and J. W. Bates, Phys. Rev. Lett. **120**, 055001 (2018).
2. N. S. Erokhin, S. S. Moiseev, and V. V. Mukhin, Nuclear Fusion **14**, 3 (1974).
3. A. B. Vladimirkii and V. P. Silin, Sov. J. Plasma Phys. **6**, 196 (1980).
4. V. F. Kovalev and V. V. Pustovalov, Teor. Mat. Fiz. **81**, 69 (1989).

5. I. I. Metelskii, V. F. Kovalev, and V. Y. Bychenkov, *Phys. Plasm.* **26**, 113113 (2019).
6. J. Albritton and P. Koch, *Phys. Fluids* **18**, 1136 (1975).
7. С. В. Буланов, Л. М. Коврижных, А. С. Сахаров, *ЖЭТФ* **72**, 1869 (1977).
8. A. Y. Lee, Y. Nishida, N. C. Lundmann et al., *Phys. Rev. Lett.* **48**, 319 (1982).
9. В. Л. Гинзбург, *Распространение электромагнитных волн в плазме*, Наука, Москва (1967).
10. U. Teubner and P. Gibbon, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 445 (2009).
11. K. Forsterling, *Arch. elect. Ubertr.* **3**, 115; **5**, 209 (1949).
12. K. Forsterling and H. O. Wuster, *J. Atmos. Terr. Phys.* **2**, 22 (1951).
13. N. G. Denisov, *Sov. Phys. Sov. Phys. JETP* **4**, 544 (1956).
14. B. N. Gershman, V. L. Ginzburg, and N. G. Denisov, *Usp. Fiz. Nauk* **61**, 561 (1957).
15. P. Hirsch and J. Shmoys, *Radio Sci. Res. NAtH. Bur. Stand.* **64D**, 521 (1956).
16. P. Hirsch, *Radio Sci.* **2**, 407 (1967).
17. A. D. Piliya, *Sov. Phys. Tech. Phys.* **11**, 609 (1966).
18. А. Я. Омельченко, К. Н. Степанов, *УФЖ* **12**, 1445 (1967).
19. T. Tang, *Radio Sci.* **5**, 111 (1970).
20. А. Я. Омельченко, В. И. Панченко, К. Н. Степанов, *Известия ВУЗов, Радиофизика* **14**, 10 (1971).
21. D. L. Kelly and Jr. A. Banos, *UCLA Plasma Physics Group Report NO. PPG-170* (1974).
22. D. W. Forslund, J. M. Kindel, K. Lee, E. L. Lindman, and R. L. Morse, *Phys. Rev. A* **11**, 679 (1975).
23. K. G. Budden, *Radio Waves in the Ionosphere*, Cambridge University, Cambridge, England (1961).
24. Th. Speziale and P. J. Catto, *Phys. Fluids* **20**, №6 (1977).
25. G. J. Pert, *Plasma Phys.* **20**, 175 (1978).
26. D. E. Hinkel-Lipsker, B. D. Fried, and G. J. Morales, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2680 (1989).
27. E. Ahedo and J. R. Sanmartin, *Plasma Phys. Controll. Fusion* **29**, 419 (1987).
28. D. E. Hinkel-Lipsker, B. D. Fried, and G. J. Morales, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1862 (1991).
29. D. E. Hinkel-Lipsker, B. D. Fried, and G. J. Morales, *Phys. Fluids B* **4**, 1772 (1992).
30. D. E. Hinkel-Lipsker, B. D. Fried, and G. J. Morales, *Phys. Fluids B* **5**, 1746 (1993).
31. K. G. Estabrook, E. J. Valeo, and W. L. Kruer, *Phys. Fluids* **18**, 1151 (1975).
32. S. C. Wilks, *Phys. Fluids B* **5**, 2603 (1993).
33. S. V. Bulanov, N. M. Naumova, and F. Pegoraro, *Phys. Plasmas* **1**, 745 (1994).
34. Wen-Jun Ding, Z.-M. Sheng, J. Zhang, and M. Y. Yu, *Phys. Plasmas* **16**, 042315 (2009).
35. S. K. Rajouria, K. K. Magesh Kumar, and V. K. Tripathi, *Phys. Plasmas* **20**, 083112 (2013).
36. I. I. Metelskii, V. F. Kovalev, and V. Y. Bychenkov, *Plasma Phys. Rep.* **43**, 175 (2017).
37. Hui Xu, Zheng-Ming Sheng, Jie Zhang, and M. Y. Yu, *Phys. Plasmas* **13**, 123301 (2006).
38. В. Б. Гильденбург, *ЖЭТФ* **46**, 2156 (1964).
39. В. Б. Гильденбург, И. Г. Кондратьев, Г. А. Марков, *Изв. вузов. Радиофизика* **12**, 655 (1969).
40. В. Б. Гильденбург, Г. М. Фрайман, *ЖЭТФ* **69**, 1601 (1975).
41. А. М. Журавский, *Справочник по эллиптическим функциям*, Изд-во АН СССР, Москва (1941).
42. А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, Москва (1981).
43. <https://www.wolfram.com/mathematica/>.
44. J. M. Dawson, *Phys. Rev.* **113**, 383 (1959).
45. А. Г. Абдуллаев, Ю. М. Алиев, В. Ю. Быченков, А. А. Фролов, *Препринт ФИАН № 8* (1986).