

ЗАКОН МАСШТАБИРОВАНИЯ ДЛЯ ЭНТРОПИИ ЗАПУТЫВАНИЯ ДЛЯ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ В РЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ФЕРМИОНОВ

Ф. Эгбалифам ^{a*}, М. А. Джафаризаде ^{b**}, С. Нами ^{b***}

^a *Urmia University of Technology*
5716617165, Urmia, Iran

^b *University of Tabriz*
5166616471, Tabriz, Iran

Поступила в редакцию 14 июня 2021 г.,
после переработки 14 июня 2021 г.
Принята к публикации 15 августа 2021 г.

(Перевод с английского)

ENTANGLEMENT ENTROPY SCALING LAW IN THE GROUND STATE OF SUPERSYMMETRIC FERMION LATTICE MODEL

F. Eghbalifam, M. A. Jafarizadeh, S. Nami

Исследуется энтропия запутывания в основном состоянии решеточной модели суперсимметричных фермионов. Поскольку гамильтониан модели имеет блочно-диагональный вид в базисе фиксированного числа частиц, энтропия запутывания вычисляется для блоков гамильтониана по отдельности. Представлены способы вычисления корреляционных матриц и энтропии запутывания для основного состояния суперсимметричного гамильтониана для различных графов. Показано, что для энтропии запутывания имеет место закон масштабирования при различном выборе числа фермионов на регулярных графах. Получена аналитическая формула для энтропии запутывания для одного масштабируемого набора сильно регулярных графов в терминах их параметров и показано, что энтропия запутывания удовлетворяет закону объемного масштабирования.

DOI: 10.31857/S0044451022010035

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория суперсимметрии (SUSY) в физике частиц устанавливает соотношение между бозонами и фермионами. Эту теорию можно построить для решеточных моделей [1–5]. Многочисленные исследования посвящены теории суперсимметрии и ее интересным приложениям, таким как суперфрустрация

[6], суперконформная теория поля [7,8], модель, описывающая фазы квантовой спиновой жидкости, типа модели Рохсара–Кивельсона [9], XYZ-спиновая цепочка [10, 11] и, наконец, когомология независимых комплексов решеток и графов (с математической точки зрения) [12–16]. Недавно было показано, что для этой модели имеет место сильная квантовая зарядовая фрустрация. Это свойство называется суперфрустрацией и характеризуется экстенсивной формой энтропии основного состояния [17–20]. В работе [21] для изучения суперсимметрии в размерности $(0 + 1)$ использовались симметричные обратные подгруппы. В этой работе была построена кванто-

* E-mail: f.eghbali@uut.ac.ir

** E-mail: jafarizadeh@tabrizu.ac.ir

*** E-mail: s.nami@tabrizu.ac.ir

вая система многих тел на цепочке, причем соответствующий гамильтониан описывал как произведение, так и запутывание состояний. В работе также обсуждалась теорема, связанная с ростом второй энтропии Реньи с разупорядоченными корреляторами в тепловом состоянии в терминах частичных симметрий. Энтропия запутывания (ЭЗ) представляет собой одну из двух мер запутывания, соответствующую запутыванию между двумя комплементарными частями D и \bar{D} для чистого состояния [22]. Пусть полная система находится в чистом состоянии, тогда энтропия запутывания между D и \bar{D} представляет собой энтропию фон Неймана S , которая связана с редуцированной матрицей плотности ρ_D или $\rho_{\bar{D}}$. Известны различные способы вычисления ЭЗ: для систем бозонов [23, 24] и фермионов [25, 26], включая одномерные топологические модели [27, 28], модель Лифшица [29], модель Хаббарда [30, 31], теорию поля [32–34] и спиновые цепочки [35–38].

В случае фермионной модели ЭЗ вычисляется из собственных значений корреляционной матрицы [39–42], поэтому сначала необходимо вычислить элементы корреляционной матрицы. В работе [43] рассмотрен гамильтониан основного состояния бесспиновых свободных фермионов, в котором матрица перескоков определяется матрицей смежности графа, и вычислена ЭЗ для различных графов. Кроме того, в этой работе исследовался закон объемного масштабирования для ЭЗ для некоторых специальных наборов регулярных графов, называемых сильно регулярными графами (СРГ). Кроме того, ЭЗ вычисляется в основном состоянии для общего квадратичного бесспинового фермионного гамильтониана. В этом гамильтониане матричное взаимодействие выражается в терминах симметричной и антисимметричной частей матрицы смежности диграфа, так что закон объемного масштабирования изучается на некоторых примерах несимметричной ассоциативной схемы диграфов [44]. В последнее время появилось много работ, посвященных обсуждению законов поверхностного и объемного масштабирования ЭЗ [45–51]. Во многих работах, посвященных исследованию свойств ЭЗ в рассматриваемых физических системах, показано, что в таких системах имеет место закон объемного масштабирования ЭЗ, что означает возрастание ЭЗ при увеличении размера подсистемы. Закон объемного масштабирования рассматривался для различных моделей, таких как квантовая модель Изинга [52, 53], цепочки спина 1/2 [54–57], фермионные модели [58, 59], открытые квантовые системы [60], модель Дикке [61], квантовая теория поля [62].

В настоящей работе рассматривается основное состояние гамильтониана суперсимметричных фермионов на решетке и обсуждается ЭЗ для некоторых графов. Сначала обсуждается метод вычисления корреляционной матрицы и ЭЗ для фиксированного числа фермионов N_p . Затем исследуется закон объемного масштабирования для ЭЗ для некоторых графов. Для регулярных графов с числом вершин N и валентностью κ показано, что закон объемного масштабирования имеет место, если выбрать $N_p > N - \kappa$ и $N_p = N - \kappa$. Для набора СРГ [63, 64] с параметрами $(mn, m(n-1), m(n-2), m(n-1))$ вычислена ЭЗ для трех случаев, $N_p = 1$, $N_p > m$ и $N_p \leq m$, и показано, что закон объемного масштабирования имеет место в случаях $N_p > m$ и $N_p \leq m$.

Работа построена следующим образом. В разд. 2 вводится суперсимметричная модель для бесспиновых фермионов на графе. В разд. 3 приведен метод вычисления корреляционной матрицы и энтропии запутывания. В разд. 4.1 вычисляется ЭЗ для специального случая регулярных графов, причем для них выполняется закон объемного масштабирования. В разд. 4.2 вычислена ЭЗ для набора сильно регулярных графов и показано, что при $N_p > 1$ имеет место закон объемного масштабирования. Раздел 5 представляет собой Заключение. В Приложении А описаны граф и его матрица смежности. В Приложении В представлено краткое изложение математических свойств сильно регулярных графов.

2. СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЙ ГАМИЛЬТониАН, КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ И ЭНТРОПИЯ ЗАПУТЫВАНИЯ

В бесспиновой фермионной модели гамильтониан записывается в терминах операторов рождения и уничтожения фермионов [1–6]:

$$H = \sum_i \sum_{j \in N(i)} P_i c_i^\dagger c_j P_j + \sum_i P_i, \quad (2.1)$$

где i — номер узла на графе. Проекционные операторы P имеют вид

$$P_i = \prod_{j \in N(i)} (1 - c_j^\dagger c_j). \quad (2.2)$$

Из вида проекционных операторов следует, что не все узлы, соседние с i -м узлом, могут быть заняты одновременно. Суперсимметрию можно рассматривать как обобщение суперсимметричной квантовой механики на случай многих узлов. Два генератора Q^\dagger и Q имеют явный вид [1]

$$Q^\dagger = \sum_{i=1}^N c_i^\dagger P_i, \quad Q = \sum_{i=1}^N c_i P_i. \quad (2.3)$$

В терминах двух генераторов гамильтониан можно записать как [?, 1, 4]

$$H = Q^\dagger Q + Q Q^\dagger. \quad (2.4)$$

Пусть F — оператор числа фермионов, тогда имеют место соотношения [1, 4]

$$\begin{aligned} [F, Q^\dagger] &= Q^\dagger, & [F, Q] &= -Q, \\ [F, H] &= 0, & [Q, H] &= 0, \\ [Q^\dagger, H] &= 0, & \{Q^\dagger, Q\} &= H. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Гамильтониан коммутирует с оператором числа фермионов F , поэтому в базисе фиксированного числа фермионов он является блочно-диагональным.

Коммутатор

$$[H, F] = 0$$

показывает, что гильбертово пространство \mathcal{H} разлагается на инвариантные подпространства, каждое из которых представляет собой отдельное собственное пространство оператора F . Таким образом, в данной модели гильбертово пространство можно записать как

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{H}_N.$$

Для вычисления ЭЗ в суперсимметричной модели нужно рассмотреть фиксированное число фермионов. Поэтому основное состояние с N_p фермионами имеет собственные векторы

$$|\psi_k\rangle = \frac{1}{N_p! \|\eta_k\|} \times \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_p}} \eta_k^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p}} c_{\alpha_1}^\dagger c_{\alpha_2}^\dagger \dots c_{\alpha_{N_p}}^\dagger |0\rangle, \quad (2.6)$$

где η_k — коэффициенты собственных состояний, записанных в виде столбцов. Корреляционная матрица имеет вид [39, 42]

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} \langle c_i c_j^\dagger \rangle & \langle c_i c_j \rangle \\ \langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle & \langle c_i^\dagger c_j \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

с блоками

$$\langle c_i c_j \rangle = 0,$$

$$\langle c_i^\dagger c_j^\dagger \rangle = 0,$$

$$\langle c_i c_j^\dagger \rangle = I - \langle c_i^\dagger c_j \rangle.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{Tr}(c_i^\dagger c_j \rho) &= \frac{1}{\text{Tr}(\rho)} \sum_k \langle \psi_k | c_i^\dagger c_j | \psi_k \rangle \langle \psi_k | c_i^\dagger c_j | \psi_k \rangle = \\ &= \frac{1}{(N_p!)^2 \|\eta_k\|^2} \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N_p}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{N_p}} \eta_k^{*\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{N_p}} \eta_k^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p}} \langle 0 | c_{\beta_{N_p}} \dots c_{\beta_2} c_{\beta_1} c_i^\dagger c_j c_{\alpha_1}^\dagger c_{\alpha_2}^\dagger \dots c_{\alpha_{N_p}}^\dagger | 0 \rangle = \\ &= \frac{1}{(N_p!)^2 \|\eta_k\|^2} \left(N_p (N_p!) \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p-1}} \eta_k^{*\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p-1} i} \eta_k^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p-1} j} \right) = \\ &= \frac{N_p}{N_p! \|\eta_k\|^2} \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p-1}} \eta_k^{*\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p-1} i} \eta_k^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p-1} j}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \text{Tr}(c_i^\dagger c_j \rho) = \frac{1}{\text{Tr}(\rho)} \sum_k \frac{N_p}{N_p! \|\eta_k\|^2} \times \\ &\times \sum_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p-1}} \eta_k^{*\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p-1} i} \eta_k^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{N_p-1} j}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Таким образом, матрица C пропорциональна редуцированной матрице плотности $N_p - 1$ частиц:

$$C = \text{Tr}_{1,2,\dots,N_p-1}(\rho).$$

Это выполняется для любых перестановок индексов $1, 2, \dots, N_p - 1$. Поэтому, разделяя граф на два ком-

плементарных подмножества D и \bar{D} , получим выражение для корреляционной матрицы [40]

$$\Gamma = P_D C P_D, \quad (2.10)$$

где P_D — оператор проекции на подпространство D графа. Тогда ЭЗ можно выразить в терминах собственных значений корреляционной матрицы [39–42]:

$$S_D = - \sum_i (\lambda_i \log \lambda_i + (1 - \lambda_i) \log (1 - \lambda_i)), \quad (2.11)$$

где λ_i — ее собственные значения.

3. ЗАКОН ОБЪЕМНОГО МАСШТАБИРОВАНИЯ ДЛЯ ЭНТРОПИИ ЗАПУТЫВАНИЯ

3.1. Регулярные графы

Для всех регулярных графов с валентностью κ одночастичную часть суперсимметричного гамильтониана можно выразить через матрицу смежности графа и единичную матрицу:

$$H_{single} = A + (N - \kappa)I. \quad (3.1)$$

Теперь можно вычислить ЭЗ для двух выбранных N_p и показать, что для нее имеет место закон объемного масштабирования.

3.1.1. $N_p > N - \kappa$

В суперсимметричной модели гамильтониан является блочно-диагональным. Для регулярных графов только $N - \kappa$ блоков являются ненулевыми. Поэтому гамильтониан N_p частиц, где

$$N_p \in \{N - \kappa + 1, \dots, N - 1, N\},$$

равен нулю. В этом случае энергия основного состояния равна нулю и собственные состояния гамильтониана $N_p > N - \kappa$ частиц равны

$$|\psi_{i_1, \dots, i_{N_p}}\rangle = c_{i_1}^\dagger c_{i_2}^\dagger \dots c_{i_{N_p}}^\dagger |0\rangle.$$

Число этих состояний есть

$$\alpha = \binom{N}{N_p}.$$

Тогда матрица плотности имеет вид

$$\rho = \frac{1}{\alpha} I_\alpha. \quad (3.2)$$

Корреляционная матрица из (2.9) равна

$$C = \frac{N_p}{N} I_N \equiv f I_N,$$

где f — доля занятых состояний. Тогда, выбирая m узлов как подмножество D , такое что

$$D = \{1, 2, \dots, m\}, \quad \bar{D} = \{m + 1, m + 2, \dots, N\},$$

ЭЗ между двумя частями D и \bar{D} можно получить из собственных значений матрицы

$$\Gamma = \frac{N_p}{N} I_m = f I_m. \quad (3.3)$$

Отсюда для энтропии запутывания получаем

$$S_D = -m(f \log f + (1 - f) \log (1 - f)). \quad (3.4)$$

Из приведенного выше уравнения видно, что ЭЗ пропорциональна размеру подмножества $|D| = m$, поэтому для нее имеет место закон объемного масштабирования.

3.1.2. $N_p = N - \kappa$

В этом случае гамильтониан $N_p = N - \kappa$ частиц является диагональным, а его собственные значения равны

$$\left\{ \underbrace{0}_{\alpha-x}, \underbrace{\lambda}_x \right\}.$$

Поэтому энергия основного состояния равна нулю, а собственные состояния записываются в виде

$$|\psi_{i_1, \dots, i_{N_p}}\rangle = c_{i_1}^\dagger c_{i_2}^\dagger \dots c_{i_{N_p}}^\dagger |0\rangle,$$

аналогично предыдущему случаю, однако в данном случае основное состояние является собственным состоянием, соответствующим нулевому собственному значению. Тогда матрица плотности имеет вид

$$\rho = \frac{1}{\alpha - x} \sum_{k=1}^{\alpha-x} |\psi_k\rangle \langle \psi_k|,$$

где

$$\alpha = \frac{N!}{N_p!(N - N_p)!}.$$

Отсюда следует, что матрица плотности является диагональной, состоящей из нулей и единиц, причем число единиц равно $\alpha - x$. Аналогично предыдущему случаю, имеем

$$C = \frac{N_p}{N} I_N = f I_N.$$

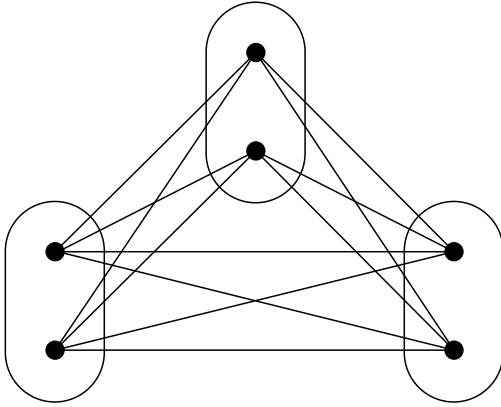
Поэтому снова, выбирая m вершин как подмножество D , получаем, что энтропия между D и \bar{D} равна

$$S_D = -m(f \log f + (1 - f) \log (1 - f)). \quad (3.5)$$

3.2. Сильно регулярные графы $(m, n, t(n-1), t(n-2), t(n-1))$

3.2.1. Одночастичный гамильтониан для сильно регулярных графов

Собственные значения одночастичного гамильтониана для сильно регулярного графа из (B.5) и (B.6) равны



Сильно регулярный граф с параметрами $(6, 4, 2, 4)$, где $m = 2$ и $n = 3$

$$x_1 = N \text{ с вырождением } 1;$$

$$x_2 = N - \kappa + \frac{1}{2} \left(\lambda - \mu + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4\kappa - \mu} \right)$$

с вырождением m_{x_2} ;

$$x_3 = N - \kappa + \frac{1}{2} \left(\lambda - \mu - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4\kappa - \mu} \right)$$

с вырождением m_{x_3} .

Если $x_3 = 0$, то $N = 2\kappa - \lambda$. Подставляя это в уравнение (В.3), получаем $\kappa = \mu$. Таким образом, параметрами графа являются $(2\kappa - \lambda, \kappa, \lambda, \kappa)$. Можно показать, что все СРГ с такими параметрами имеют матрицы смежности вида

$$A = (J_n - I_n) \otimes J_m$$

с параметрами

$$(mn, m(n - 1), m(n - 2), m(n - 1)).$$

Для этих типов СРГ имеется n блоков и m вершин в каждом блоке. Тогда, как отмечалось выше, число вершин равно nm . На рисунке приведен сильно регулярный граф с параметрами $(6, 4, 2, 4)$, где $n = 3$ и $m = 2$. Вершины каждого блока не связаны друг с другом, однако каждая вершина одного блока связана со всеми вершинами других блоков. Одночастичный гамильтониан для этих СРГ имеет равен

$$H = A + (N - \kappa)I = A + mI,$$

а нулевые собственные значения вырождены, их число $m_{x_3} = n - 1$. Одночастичная часть гамильтониана,

$$H = QQ^\dagger + Q^\dagger Q,$$

имеет $n - 1$ нулевых собственных значений, а соответствующие им собственные состояния имеют вид

$$|\psi_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{mn}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \omega^{2k} \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)k} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица плотности имеет вид

$$\rho = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} |\psi_k\rangle\langle\psi_k| = \frac{1}{m(n-1)} \left(I - \frac{J_n}{n} \right) \otimes J_m,$$

а корреляционную матрицу можно записать как

$$C_{ij} = \text{Tr}(c_i^\dagger c_j \rho) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \langle\psi_k|c_i^\dagger c_j|\psi_k\rangle.$$

Тогда, учитывая

$$|\psi_k\rangle = \sum_m \eta_k^m |m\rangle,$$

можно записать

$$\begin{aligned} \langle\psi_k|c_i^\dagger c_j|\psi_k\rangle &= \sum_{lm} \eta_k^{l*} \eta_k^m \langle l|c_i^\dagger c_j|m\rangle = \\ &= \sum_{lm} \eta_k^{l*} \eta_k^m \delta_{li} \delta_{mj} = \eta_k^{i*} \eta_k^j. \end{aligned}$$

Тогда

$$C = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (|\psi_k\rangle\langle\psi_k|)^*,$$

откуда

$$\text{Tr}(c_i^\dagger c_j \rho) = \rho_{ij}^*.$$

Выберем подмножество D с мощностью

$$|D| = n_D = n_1 m_1.$$

Оператор проекции на подмножество D имеет вид

$$P_D = E_{n_1} \otimes E_{m_1}.$$

Отсюда получаем корреляционную матрицу

$$\Gamma = \frac{1}{n-1} \left(I_{n_1} - \frac{J_{n_1}}{n} \right) \otimes \frac{J_{m_1}}{m}.$$

Тогда собственные значения корреляционной матрицы имеют вид

$$\lambda_1 = \frac{m_1(n - n_1)}{nm(n - 1)} \text{ с вырождением } 1;$$

$$\lambda_2 = \frac{m_1}{m(n - 1)} \text{ с вырождением } n_1 - 1;$$

$$\lambda_3 = 0 \text{ с вырождением } n_1(m_1 - 1).$$

Отсюда энтропия равна

$$S_D = - \left(\frac{m_1(n-n_1)}{nm(n-1)} \log \frac{m_1(n-n_1)}{nm(n-1)} + \left(1 - \frac{m_1(n-n_1)}{nm(n-1)} \right) \log \left(1 - \frac{m_1(n-n_1)}{nm(n-1)} \right) \right) - (n_1-1) \left(\frac{m_1}{m(n-1)} \log \frac{m_1}{m(n-1)} + \left(1 - \frac{m_1}{m(n-1)} \right) \times \log \left(1 - \frac{m_1}{m(n-1)} \right) \right).$$

3.2.2. $N_p > m$

Для СРГ с параметрами $(mn, m(n-1), m(n-2), m(n-1))$ вершины каждого блока не связаны друг с другом, однако каждая вершина блока связана о всеми вершинами других блоков. Поэтому при $N_p > m$ получаем

$$P_i |\psi_{i_1, \dots, i_{N_p}}\rangle = 0$$

для всех $i = 1, 2, \dots, N$ и всех перестановок i_1, i_2, \dots, i_{N_p} . Тогда

$$Q |\psi_{i_1, \dots, i_{N_p}}\rangle = 0,$$

откуда следует, что гамильтониан $N_p > m$ частиц должен быть равен нулю.

Аналогично регулярным графам в разд. 3.1.1, энергия основного состояния равна нулю, а все $|\psi_{i_1, \dots, i_{N_p}}\rangle$ являются собственными векторами основного состояния. Тогда оператор плотности равен

$$\rho = \frac{1}{\alpha} I_\alpha,$$

а корреляционная матрица равна

$$C = \frac{N_p}{N} I_N.$$

Теперь, разделяя граф на два комплементарных подмножества, $D = \{1, 2, \dots, q\}$ и $\bar{D} = \{q+1, q+2, \dots, N\}$, для энтропии получаем

$$S_D = -q(f \log f + (1-f) \log(1-f)), \quad (3.6)$$

где

$$f = \frac{N_p}{N}.$$

Поэтому, исходя из размера подмножества D ($|D| = q$), можно сделать вывод, что в этом случае для ЭЗ имеет место закон объемного масштабирования.

3.2.3. $N_p \leq m$ и $N_p \neq 1$

В этих случаях для состояний $|\psi_{i_1, i_2, \dots, i_{N_p}}\rangle$, когда все частицы находятся в одном блоке, эффект от оператора P_i , $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, оказывается ненулевым. Однако когда частицы находятся хотя бы в двух блоках, эффект от этого оператора равен нулю. Поэтому и эффекты от операторов Q и Q^\dagger на эти состояния нулевые. Тогда

$$H |\psi_{i_1, i_2, \dots, i_{N_p}}\rangle = 0,$$

где i_1, i_2, \dots, i_{N_p} , принадлежат одному из блоков. Число всех состояний $|\psi_{i_1, i_2, \dots, i_{N_p}}\rangle$ равно

$$\alpha = \frac{N!}{N_p!(N-N_p)!},$$

а число состояний, в которых все частицы находятся в одном блоке, есть

$$n\beta = n \frac{m!}{N_p!(m-N_p)!}.$$

Поэтому число состояний, в которых

$$H |\psi_{i_1, i_2, \dots, i_{N_p}}\rangle = 0,$$

равно

$$\alpha - n\beta.$$

Поэтому гамильтониан $N_p \geq 2$ частиц имеет $\alpha - n\beta$ нулевых собственных значений. Отсюда получаем оператор плотности основного состояния

$$\rho = \frac{1}{\alpha - n\beta} \sum_{k=1}^{\alpha - n\beta} |\psi_k\rangle \langle \psi_k|.$$

Тогда корреляционная матрица снова равна

$$C = \frac{N_p}{N} I_N.$$

Поэтому, если разделить граф на подмножества

$$D = \{1, 2, \dots, q\}, \quad \bar{D} = \{q+1, q+2, \dots, N\},$$

для энтропии получим

$$S_D = -q(f \log f + (1-f) \log(1-f)). \quad (3.7)$$

Таким образом, оказывается, что ЭЗ удовлетворяет закону объемного масштабирования, поскольку она зависит от размера подмножества (q) .

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в рамках модели суперсимметричных бесспиновых фермионов на графе исследована энтропия запутывания для основного состояния гамильтониана. Гамильтониан коммутирует с числом фермионов, поэтому он является блочно-диагональным в одночастичном, двухчастичном и т.д. базисах. Для канонического ансамбля число частиц N_p является фиксированным, поэтому ЭЗ вычисляется для отдельных блоков гамильтониана. Получены аналитические выражения для ЭЗ для некоторых N_p для регулярных графов с валентностью κ . Показано, что в случае регулярных графов при $N_p > N - \kappa$ и $N_p = N - \kappa$ ЭЗ связана с размером выбранного подмножества, поэтому в этом случае имеет место закон объемного масштабирования. Энтропию запутанности тогда можно вычислить аналитически для специального набора сильно регулярных графов как для одночастичного, так и для многочастичного случаев. Кроме того, для сильно регулярных графов с nm вершинами было показано, что для ЭЗ имеет место закон объемного масштабирования для двух случаев, $N_p > t$ и $N_p \leq t$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Граф и его матрица смежности

Граф представляет собой набор вершин и ребер, которые связывают вершины между собой. Ненаправленным называется граф, ребра которого направлены в разные стороны. Если между вершинами i и j имеется ребро, эти вершины являются смежными ($i \sim j$).

Рассмотрим ненаправленный граф с N вершинами. Тогда матрица смежности A (матрица $N \times N$) определяется следующим образом:

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1, & i \sim j, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Если имеется путь из вершины i в вершину j вдоль ребер графа, тогда имеется и такой путь из i в j , длина которого равна числу ребер между i и j .

Если возможен путь от любой вершины i к любой вершине j , то граф называется связным. Граф называется сильно связным, если имеется путь между любой вершиной i и любой другой вершиной j . Подробности можно найти в работах [43, 65].

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Сильно регулярные графы

Сильно регулярным графом с параметрами N, κ, λ, μ называется граф с N вершинами и ненулевым числом ребер, который не является полным и имеет следующие свойства:

- (i) степень каждой вершины равна κ ;
- (ii) если i и j — смежные вершины, то число их общих соседей равно λ ;
- (iii) если i и j не являются смежными вершинами, то число их общих соседей равно μ .

При этом

$$N - 1 > \kappa \geq \mu > 0, \quad \kappa - 1 > \lambda \geq 0. \quad (\text{B.1})$$

Параметры сильно регулярного графа удовлетворяют соотношению

$$\kappa(\kappa - \lambda - 1) = (N - \kappa - 1)\mu. \quad (\text{B.2})$$

Поэтому соотношение между этими параметрами имеет вид

$$\kappa^2 = (\kappa - \mu) + \mu N + (\lambda - \mu)\kappa. \quad (\text{B.3})$$

Матрица смежности любого СРГ удовлетворяет двум уравнениям.

Первое уравнение имеет вид

$$AJ = JA = kJ,$$

где J — матрица, состоящая из единиц. Это уравнение показывает, что κ является собственным значением матрицы смежности с собственным вектором, все компоненты которого равны единице.

Второе уравнение имеет вид

$$A^2 + (\mu - \lambda)A + (\mu - \kappa)I = \mu J, \quad (\text{B.4})$$

где I — единичная матрица.

Матрица смежности графа имеет ровно три собственных значения [63, 64]:

$$\begin{aligned} x_1 &= \kappa, \\ x_2 &= \frac{\lambda - \mu + \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(\kappa - \mu)}}{2}, \\ x_3 &= \frac{\lambda - \mu - \sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(\kappa - \mu)}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Кратность $x_1 = \kappa$ равна единице, а кратности двух других собственных значений равны [63, 64]

$$\begin{aligned} m_{x_2} &= \frac{1}{2} \left((N-1) - \frac{2\kappa + (N-1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(\kappa - \mu)}} \right), \\ m_{x_3} &= \frac{1}{2} \left((N-1) + \frac{2\kappa + (N-1)(\lambda - \mu)}{\sqrt{(\lambda - \mu)^2 + 4(\kappa - \mu)}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Подробности приведены в работах [63, 64].

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Fendley, K. Schoutens, and J. de Boer, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 120402 (2003).
2. A. Engstrom, *Eur. J. Comb.* **30**, 429 (2009).
3. H. Moriya, *Phys. Rev. D* **98**, 015018 (2018).
4. R. La, K. Schoutens, and S. Shadrin, *J. Phys. A: Math. Theor.* **52**, 02LT01 (2019).
5. H. Katsura, H. Moriya, and Y. Nakayama, *J. Phys. A: Math. Theor.* **53**, 385003 (2020).
6. L. Huijse and K. Schoutens, *Euro. Phys. J. B* **64**, 543 (2008).
7. P. Fendley, B. Nienhuis, and K. Schoutens, *J. Phys. A: Math. Gen.* **90**, 12399 (2003).
8. M. Beccaria and G. F. De Angelis, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 100401 (2005).
9. L. Huijse, N. Moran, J. Vala, and K. Schoutens, *Phys. Rev. B* **84**, 115124 (2011).
10. P. Fendley and C. Hagendorf, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 402004 (2010).
11. P. Fendley and C. Hagendorf, *J. Stat. Mech.* **11102**, P02014 (2011).
12. R. J. Baxter, *Ann. Comb.* **15**, 185 (2011).
13. M. Bousquet-Melou, S. Linusson, and E. Nevo, *J. Algebr. Comb.* **27**, 423 (2008).
14. P. Csorba, *Electron. J. Comb.* **16**, R11 (2009).
15. L. Huijse and K. Schoutens, *Adv. Theor. Math. Phys.* **90**, 643 (2010).
16. J. Jonsson, *Discrete Comput. Geom.* **43**, 927 (2010).
17. P. Fendley and K. Schoutens, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 046403 (2005).
18. L. Huijse, D. Mehta, N. Moran, K. Schoutens, and J. Vala, *New J. of Phys.* **14**, 073002 (2012).
19. L. Huijse, J. Halverson, P. Fendley, and K. Schoutens, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 146406 (2008).
20. H. van Eerten, *J. Math. Phys.* **46**, 123302 (2005).
21. P. Padmanabhan, S. J. Rey, D. Teixeira, and D. Trancanelli, *JHEP* **1705**, 136 (2017).
22. R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki, and K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 865 (2009).
23. M. Cramer, J. Eisert, M. B. Plenio, and J. Dreissig, *Phys. Rev. A* **73**, 012309 (2006).
24. I. Peschel, *Braz. J. Phys.* **42**, 267 (2012).
25. J. A. Carrasco, F. Finkel, A. Gonzalez-Lopez, and M. A. Rodriguez, *Phys. Rev. E* **95**, 012129 (2017).
26. H. Barghathi, C. M. Herdman, and A. D. Maestro, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 150501 (2018).
27. A. Kitaev and J. Preskill, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 110404 (2006).
28. D. J. Williamson, A. Dua, and M. Cheng, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 140506 (2019).
29. J. Angel-Ramelli, V. Giangreco, M. Puletti, and L. Thorlacius, *JHEP* **08**, 072 (2019).
30. O. Hudak, *Phys. Lett. A* **373**, 359 (2009).
31. C. Walsh, P. Semon, D. Poulin, G. Sordi, and A. M. S. Tremblay, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 067203 (2019).
32. A. Jafarizadeh and M. A. Rajabpour, *Phys. Rev. B* **100**, 165135 (2019).
33. S. Mahesh Chandran and S. Shankaranarayanan, *Phys. Rev. D* **99**, 045010 (2019).
34. X. Dong, X.-L. Qi, Z. Shangnan, and Z. Yang, *JHEP* **10**, 052 (2020).
35. A. R. Its and V. E. Korepin, *Theor. Math. Phys.* **164**, 1136 (2010).
36. L. Hackl, L. Vidmar, M. Rigol, and E. Bianchi, *Phys. Rev. B* **99**, 075123 (2019).
37. E. Bianchi and P. Dona, *Phys. Rev. D* **100**, 105010 (2019).
38. F. Shafeinejad, J. Hasanzadeh, and S. Mahdaviifar, *Physica A* 556 124794 (2020).
39. J. Borchmann, A. Farrell, S. Matsuura, and T. Pereg-Barnea, *Phys. Rev. B* **90**, 235150 (2014).
40. G. Gori, S. Paganelli, A. Sharma, P. Sodano, and A. Trombettoni, *Phys. Rev. B* **91**, 245138 (2015).
41. J. M. Magan, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 030401 (2016).
42. H. Shapourian, K. Shiozaki, and S. Ryu, *Phys. Rev. B* **95**, 165101 (2017).
43. M. A. Jafarizadeh, F. Eghbalifam, and S. Nami, *J. Phys. A: Math. Theor.* **51**, 075304 (2018).
44. M. A. Jafarizadeh, F. Eghbalifam, and S. Nami, *Eur. Phys. J. Plus* **132**, 539 (2017).
45. J. Eisert, M. Cramer, and M. B. Plenio, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 277 (2010).
46. F. G. S. L. Brandão and M. Horodecki, *Nat. Phys.* **9**, 721 (2013).

47. G. Vitagliano, A. Riera, and J. I. Latorre, *New J. Phys.* **12**, 113049 (2010).
48. M. Szyniszewski, A. Romito, and H. Schomerus, *Phys. Rev. B* **100**, 064204 (2019).
49. B. Basa, G. L. Nave, and P. W. Phillips, *Phys. Rev. D* **101**, 106006 (2020).
50. S. Goto and I. Danshita, *Phys. Rev. A* **102**, 033316 (2020).
51. I. H. Kim, *Phys. Rev. X* **11**, 021039 (2021).
52. A. Russomanno, G. E. Santoro, and R. Fazio, *J. Stat. Mech.* P073101 (2016).
53. L. Vidmar, L. Hackl, E. Bianchi, and M. Rigol, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 220602 (2018).
54. G. Ramgurez, J. Rodriguez-Laguna, and G. Sierra, *J. Stat. Mech.* P10004 (2014).
55. Y. O. Nakagawa, M. Watanabe, H. Fujita, and S. Sugiura, *Nat. Comm.* **9**, 1635 (2018).
56. T. Leblond, K. Mallayya, L. Vidmar, and M. Rigol, *Phys. Rev. E* **100**, 062134 (2019).
57. N. Samos S. de Buruaga, S. N. Santalla, J. Rodriguez-Laguna, and G. Sierra, *Phys. Rev. B* **101**, 205121 (2020).
58. H. Lai and K. Yang, *Phys. Rev. B* **91**, 081110(R) (2015).
59. G. C. Levine, *Phys. Rev. D* **100**, 025017 (2019).
60. S. Maity, S. Bandyopadhyay, S. Bhattacharjee, and A. Dutta, *Phys. Rev. B* **101**, 180301(R) (2020).
61. R. J. Lewis-Swan, A. Safavi-Naini, J. J. Bollinger, and A. M. Rey, *Nat. Comm.* **10**, 1581 (2019).
62. N. Shiba and T. Takayanagi, *JHEP* **1402**, 033 (2014).
63. J. Seidel, *Strongly Regular Graphs*, in *Surveys in Combinatorics*, ed. by B. Bollobas, London Mathematical Society Lecture Note Series, 157–180, Cambridge University Press, Cambridge (1979).
64. C. Godsil and G. Royle, *Strongly Regular Graphs*, in *Algebraic Graph Theory. Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 207, Springer, New York (2001).
65. M. A. Jafarizadeh and S. Salimi, *Ann. Phys.* **322**, 1005 (2007).