

ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ ПРИ ИНЖЕКЦИИ С КАТОДА И НАГРЕВЕ СВЕРХУ

*Б. Л. Смородин**

*Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Пермь, Россия*

Поступила в редакцию 2 августа 2021 г.,
после переработки 31 августа 2021 г.
Принята к публикации 31 августа 2021 г.

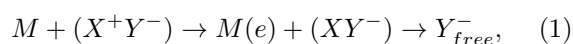
Проведено численное моделирование двумерных волновых электроконвективных течений и переходных процессов в слабопроводящей неизотермической жидкости, заполняющей плоский горизонтальный конденсатор, возникающих за счет действия постоянного электрического поля на инжектированный с катода заряд. Получены зависимости характеристик волновых течений (амплитуды функции тока, частоты колебаний в фиксированной точке конвективной ячейки, фазовой скорости волны) от интенсивности нагрева и величины электрического поля. Построены бифуркационные диаграммы и карта устойчивых волновых решений. Для переходного процесса от режима стоячих волн к режиму бегущих волн проанализированы поведение траекторий на характеристической плоскости и эволюция пространственных гармоник.

DOI: 10.31857/S0044451022010126

1. ВВЕДЕНИЕ

Изотропные слабопроводящие жидкости [1] и жидкие кристаллы [2, 3] демонстрируют разнообразие нелинейных электроконвективных структур, возникающих в электрическом поле, что представляет значительный интерес как с фундаментальной, так и с практической точек зрения. В изотропной слабопроводящей жидкости под действием электрического поля может существовать электроконвекция вследствие действия различных механизмов зарядообразования в ней: инжекционного, электротермического, диэлектрофоретического и других [1, 4, 5]. Инжекционный механизм характеризуется образованием свободного заряда на границе электрод–жидкость в результате окислительно-восстановительных электрохимических реакций [6, 7], благодаря которым в приграничных зонах генерируются заряды одного знака с зарядом электродов: отрицательные на катоде или положительные на аноде. Нейтральная примесь у металлического электрода, содержащего либо недостаток электронов (анод), либо их избыток (катод), отдает электрон (на аноде) или захватывает его (на катоде), становясь ионом

того же знака, что и электрод. Генерируемые ионы отталкиваются от заряженной тем же зарядом поверхности — заряд инжектируется в жидкость. Проводимость жидкости, приобретаемая благодаря подобному механизму, называется инжекционной. Например, возникновение заряда в области катода в рассматриваемом в данной статье случае характеризуется окислительно-восстановительной реакцией [8]:



где M — металлический электрод, отдающий ионной паре (X^+Y^-) электрон e , Y_{free}^- — инжектируемая ионная компонента. Схема (1), в которой на катоде образуется отрицательный заряд, представляет классический пример униполярной инжекции.

Возникновение конвективного течения слабопроводящей жидкости во внешнем электрическом поле плоского конденсатора при инжекции заряда можно пояснить следующим образом. В прикатодном слое образуется отрицательный заряд, который благодаря подвижности в электрическом поле проникает в жидкость. Сила Кулона, действуя на распределенный в объеме заряд, генерирует электроконвективное течение.

Исследования поведения изотермической жидкости в постоянном электрическом поле показали, что в результате обратной бифуркации возникает

* E-mail: bsmorodin@yandex.ru

стационарная электроконвекция [9–11]. В некотором интервале изменения электрического числа Рэлея, зависящего от напряжения на электродах, имеется гистерезисный переход между двумя устойчивыми режимами: ионной проводимости (conductive state), когда жидкость находится в покое, и электроконвективного течения.

Электроконвекция неизотермической жидкости демонстрирует большее разнообразие и открывает дополнительные возможности благодаря взаимодействию кулоновских сил и сил плавучести. Естественным образом здесь возникает усиление [12, 13] или ослабление теплопередачи [14] при нагреве конвективных ячеек снизу за счет направления кулоновской силы при сильной инжекции заряда. Увеличение теплообмена в замкнутой области связывается с увеличением числа конвективных ячеек с ростом электрического числа Рэлея. В [15] рассмотрен нагрев замкнутой полости сбоку (сила плавучести и кулоновские силы направлены ортогонально друг к другу) и обнаружено, что среди различных течений жидкости возможны хаотические.

Исследование нелинейной стадии электроконвекции при нагреве сверху, когда сила плавучести и сила Кулона противоположны друг другу [8], показывает, что нагрев слоя сверху препятствует возникновению стационарной конвекции (порог конвекции повышается), а течение жидкости может возникать и колебательным образом: в результате прямой бифуркации Хопфа. В результате численного моделирования в зависимости от параметров задачи обнаружены различные периодические колебательные режимы: стоячей волны (SW), бегущей волны (TW), модулированной бегущей волны (MTW), модулированной стоячей волны (MSW), которые могут быть реализованы в горизонтальном слое или кольцевых каналах.

Влияние интенсивности нагрева сверху (изменение числа Рэлея) на эволюцию электроконвективных режимов исследовано в [16] при фиксированном значении электроконвективного параметра $T = 6820$. Однако представленная в [16] бифуркационная диаграмма содержит неполную информацию и требует уточнения и ответов на важные вопросы. Что происходит с режимом бегущих волн при уменьшении модуля числа Рэлея? Согласно результатам линейной теории [8] при малых нагревах сверху колебательная неустойчивость уступает место монотонной, и режим бегущих волн не должен существовать. Когда и как разрушается этот режим и происходит переход к стационарной конвекции?

В данной работе проанализированы двумерные режимы электроконвекции в горизонтальном конденсаторе, заполненном слабопроводящей жидкостью, при инжекции заряда с катода и нагреве сверху. Исследовано влияние внешнего электрического поля и интенсивности нагрева на эволюцию электроконвективных колебательных течений (стоячих и бегущих волн) в межэлектродном промежутке и переходные процессы и даны ответы на поставленные выше вопросы. Получены бифуркационные диаграммы и построена карта существования устойчивых решений. Проанализирована эволюция полей функции тока, температуры и плотности заряда для режима модулированных бегущих волн.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим находящийся в поле тяжести горизонтальный конденсатор толщиной d и введем декартову систему координат, ось x которой направлена вдоль катода, а ось z — перпендикулярно ему вниз (рис. 1). К обкладкам конденсатора приложены разность потенциалов V_0 и разность температур Θ . Конденсатор заполнен слабопроводящей жидкостью с плотностью $\rho = \rho_0(1 - \beta\theta)$, линейно зависящей от температуры (θ — отклонение температуры от некоторого среднего значения), коэффициентом теплового расширения β , вязкостью ν , температуропроводностью χ , диэлектрической проницаемостью ε . Предполагается, что все характеристики жидкости и коэффициент подвижности ионов K не зависят от величины электрического поля и температуры.

Выбирая масштабы длины $[x] = d$, времени $[t] = d^2/\chi$, давления $[p] = \rho_0\nu^2/d^2$, скорости $[v] = \nu/d$, температуры $[\theta] = \Theta$, потенциала $[\Phi] = V_0$, плотности заряда $[q] = \varepsilon_0\varepsilon V_0/d^2$ (ε_0 — электрическая постоянная), запишем систему уравнений электроконвекции в случае неизотермической несжимаемой жидкости — уравнения переноса импульса, заряда, тепла, уравнения неразрывности и Пуассона [8, 10, 17]:

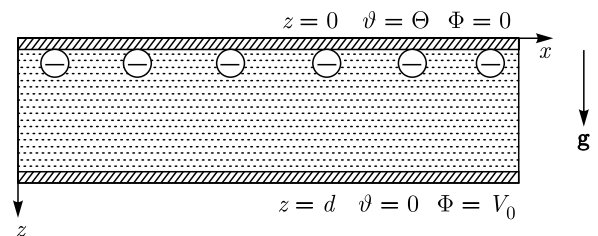


Рис. 1. Геометрия задачи

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \theta \mathbf{e} - \frac{T^2}{M^2} q \nabla \Phi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta = \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) q = \frac{T}{M^2} (q^2 - \nabla \Phi \cdot \nabla q), \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$\Delta \Phi = -q, \quad (6)$$

где \mathbf{v} — скорость, p — давление, q — плотность заряда слабопроводящей жидкости, \mathbf{e} — направленный вверх единичный вектор. На единичный объем жидкости действуют сила Кулона и сила плавучести (2). Поток заряда в уравнении для его эволюции содержит дрейф заряда в электрическом поле и конвективный перенос при движении жидкости (4). В случае отсутствия проскальзывания на идеально теплопроводящих электродах граничные условия записываются в виде

$$\begin{aligned} z = 0: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 1, \quad \Phi = 0, \quad q = -A \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ z = 1: \quad \mathbf{v} = 0, \quad \theta = 0, \quad \Phi = 1. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассматривается случай автономной инъекции с катода, когда величина инжектируемого заряда пропорциональна величине электрического поля [10,11], при этом инъекция предполагается слабой ($A \ll 1$).

Система уравнений (2)–(6) и граничных условий (7) содержит число Рэлея $\text{Ra} = g\beta\Theta d^3/\nu\chi$ и число Прандтля $\text{Pr} = \nu/\chi$, безразмерный электроконвективный параметр $T = \varepsilon_0 \varepsilon V_0 \rho_0 / K\nu$, параметр подвижности инжектируемых ионов $M = \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon / K^2 \rho_0}$, а также параметр $A = ad/\varepsilon_0 \varepsilon$, характеризующий степень инъекции заряда (здесь a — размерный коэффициент, определяющий инъекцию). Подвижность заряда M может изменяться в широких пределах $4 < M < 120$ [9] в зависимости от типа носителей и вида среды.

В дальнейшем все расчеты проведены при типичных для слабопроводящих жидкостей значениях параметров $\text{Pr} = 10$, $M = 14.14$ [7,9,11], $A = 0.25$ [8,10].

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНОВЫХ РЕЖИМОВ

Механическое равновесие жидкости ($\mathbf{v} = 0$) характеризуется линейным распределением температуры, $\theta_0 = 1 - z$, и следующими распределениями электрического поля и заряда [10]:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{3A(1+2Az)^{1/2}}{(1+2A)^{3/2}-1}, \\ \Phi_0 &= \frac{(1+2Az)^{3/2}}{(1+2A)^{3/2}-1}, \\ q &= -\frac{3A^2(1+2Az)^{-1/2}}{(1+2A)^{3/2}-1}. \end{aligned} \quad (8)$$

При определенном наборе параметров задачи (T , Ra , Pr , M , A , k), где k — волновое число, малые возмущения начинают возрастать монотонным или колебательным образом, и в результате эволюции возникают конечно-амплитудные электроконвективные течения. Например, при нагреве сверху электроконвекция может возникать колебательным образом [8,18], если электроконвективный параметр превышает некоторое критическое значение $T > T_{osc}^{lin}$. В нашем случае оно будет зависеть от оставшихся управляющих параметров $T_{osc}^{lin}(\text{Ra}, M, \text{Pr}, A, k)$. При этом в горизонтальном слое или в кольцевых каналах могут установиться режимы стоячих или бегущих волн.

Численное моделирование двумерных волновых режимов электроконвекции проводилось с помощью двухполюсового метода (при решении уравнения Навье–Стокса вместо переменных скорости \mathbf{v} и давления p используются вихрь скорости φ и функция тока ψ):

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \varphi = (\text{rot } \mathbf{v})_y. \quad (9)$$

Благодаря малой инъекции ($A \ll 1$) задача может быть решена в безындукционном приближении [8,10,11]: считается, что электрическое поле в слое не зависит от конвективного переноса зарядов. Результаты решения задачи в безындукционном приближении и в полной постановке отличаются не более чем на 1%. В безындукционном приближении система уравнений электроконвекции неизотермической слабопроводящей жидкости записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \\ &= \Delta \varphi - \frac{T^2}{M^2} E_z \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\text{Ra}}{\text{Pr}} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{1}{\text{Pr}} \Delta \theta, \\ \frac{\partial q}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{T}{M^2} \left(q^2 + E_z \frac{\partial q}{\partial z} \right), \\ \Delta \psi &= -\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Граничные условия на горизонтальных границах (7) примут вид

$$\begin{aligned}
 z = 0: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 1, \quad q = -A \frac{\partial \Phi_0}{\partial z}, \\
 z = 1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad \theta = 0.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Для численного моделирования режимов бегущих волн необходимо использовать также условие периодичности всех функций, описывающих состояние системы, вдоль горизонтальной оси x с периодом $l = 2\pi/k$:

$$F(x, z, t) = F(x + l, z, t), \tag{12}$$

где $F = (\psi, \varphi, \theta, q)$.

Сформулированная выше задача об электроконвекции неоднородно нагретой жидкости (10)–(12) решалась с помощью метода конечных разностей [19], реализация которого для изотермической задачи была предложена ранее в [10, 11]. Явная схема использовалась для аппроксимации уравнения эволюции вихря. Переключение расчетов со схемы дифференцирования центральными разностями на схему с разностями «против потока» и обратно происходило в зависимости от выполнения критерия устойчивости [10]. Уравнение Пуассона для функции тока решалось методом последовательной верхней релаксации [19]. Для уравнений переноса тепла и заряда применялась явная схема с разностями «против потока».

Численное моделирование проведено для случая периодических условий в ячейке длиной $l = 2$ (волновое число $k = \pi$), на сетке из 41×21 узлов. Дальнейшее увеличение числа узлов сетки не приводило к заметному изменению результатов.

Отметим, что выбранное волновое число $k = \pi$ соответствует точке, лежащей левее минимума нейтральной кривой устойчивости. Например, при $Ra = -1800$ значения электроконвективного параметра на нейтральной кривой, полученные из решения линейной задачи: $T_{osc}^{lin}(k = \pi) = 7007.3$ и $T_{osc}^{lin}(k = 2\pi) = 6790.9$, поэтому в нашем численном моделировании могут реализовываться решения в пространственным периодом $l/2$ даже вблизи границы устойчивости.

Известно, что в плоском слое жидкости наряду с решениями с периодом l могут также возникать волны, имеющие другие периоды вдоль направления распространения волны (неустойчивость Экхуса). Кроме того, в слое благодаря нелинейной эволюции могут возрастать и различные трехмерные возмущения [20]. Эти явления способны существенно изменить наблюдаемую картину.

Для возможной экспериментальной проверки нашего рассмотрения двумерных структур и с целью

избежать указанных выше осложнений можно предложить реализацию волнового движения в кольцевом канале длиной $L = ml \gg 1$, где m — целое (размерная длина $L = ml \gg d$). Используя небольшие надкритичности, например по параметру T , и подбирая L , легко добиться выполнения условия, когда волновые возмущения с пространственными периодами l_1 , также удовлетворяющими условию $L = m_1 l_1$, находятся в области устойчивости (лежат ниже нейтральной кривой $T(k)$) [8].

Геометрия кольцевых каналов часто используется для экспериментального исследования конвективных бегущих волн, наблюдаемых в бинарных смесях спирт–вода [21, 22], для которых можно провести аналогию с электроконвекцией. Эти разные на первый взгляд системы имеют общие черты: 1) кроме конвективного переноса примеси (заряда) существуют дополнительные механизмы транспорта: термодиффузия нейтральной примеси под действием градиента температуры (дрейф заряда в электрическом поле); 2) при определенных условиях конвекция возникает колебательным образом и в результате эволюции формируется бегущая волна.

Несмотря на то, что геометрия кольцевых каналов является существенно трехмерной, в случае экспериментального исследования конвекции бинарных смесей в кольцевых каналах большого радиуса $R \gg d$ (длины $L = 2\pi R$) и ширины $b \approx (1.3d - 3d)$ [22] реализуются квазидвумерные режимы в виде валов, ось которых перпендикулярна боковым границам. Полученные в ходе численного моделирования бегущих волн в горизонтальном слое распределения концентрации и связанные с ними теневые изображения, а также бифуркационные диаграммы конвективных решений [22, 23] находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными в кольцевых [22] и прямоугольных каналах [24]. В более широких каналах ($b > 3d$) квазидвумерные валы разрушаются в результате трехмерных неустойчивостей [20, 25], в более узких ($b < 1.3d$) влияние боковых границ оказывается велико [26] и сильно отличается от предсказаний численного моделирования.

Таким образом, в случае электроконвекции слабопроводящей жидкости в геометрии кольцевых каналов с большим отношением длины к высоте и шириной ($1.3d - 3d$) следует ожидать, что в эксперименте в области небольших надкритичностей по электроконвективному параметру T будут наблюдаться моделируемые волновые движения.

Эволюция осциллирующих электроконвективных течений анализировалась на основе поведения локальных и интегральных величин, подобно тому

как было использовано в работе [27]: максимального значения функции тока в конвективной ячейке

$$\psi_{max}(t) = \max_{x,z} \psi(x, z, t); \quad (13)$$

минимального значения функции тока в конвективной ячейке

$$\psi_{min}(t) = \min_{x,z} \psi(x, z, t); \quad (14)$$

функции тока в фиксированной точке слоя, например в нашем случае при $x = l/4$, $z = 1/2$,

$$\psi_{loc}(t) = \psi(x_0 = l/4, z_0 = 1/2, t), \quad (15)$$

а также вида спектров Фурье $A(\omega)$ осцилляции функции тока в фиксированной точке.

Для характеристики установившихся и переходных решений, у которых конвективные структуры смещаются вдоль горизонтальной координаты, будем также использовать фазовую скорость волны, определяемую как производная от горизонтальной координаты максимума функции тока в конвективной ячейке:

$$v_{ph}(t) = \frac{dx(\psi = \psi_{max})}{dt}. \quad (16)$$

Расчеты показали, что вертикальная координата этого максимума в режиме стоячих и бегущих волн располагается на середине высоты конвективной ячейки $z(\psi = \psi_{max}) = 1/2$.

Кроме мгновенной фазовой скорости используем также ее среднее значение:

$$\langle v_{ph} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} v_{ph} dt = \frac{x(\tau) - x(0)}{\tau}, \quad (17)$$

где τ — достаточно большой интервал времени, по которому проводится усреднение (в нашем случае 30 и более периодов осцилляций бегущей волны TW).

Пространственно-временное распределение полей функции тока ψ , заряда q и температуры θ и разложение этих полей в ряды Фурье по пространственным гармоникам $\hat{F}_n(t)$ позволяет детально охарактеризовать особенности различных течений жидкости. Ограничимся разложением искомых функций в ряды в горизонтальном направлении, в сечении, соответствующем середине высоты слоя ($z = 1/2$):

$$F(x, z = 1/2, t) = \hat{F}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n(t) e^{iknx}. \quad (18)$$

Для описания возникающих в жидкости структур в нашем случае достаточно информации о первой $\hat{\psi}_1(t)$ и второй $\hat{\psi}_2(t)$ модах разложения функции тока, вклад третьей гармоники $\hat{\psi}_3(t)$ в общее решение мал (не превышает 1%). Наш анализ показал, что поведение гармоник температуры $\hat{\theta}_n(t)$ и заряда $\hat{q}_n(t)$ качественно воспроизводит эволюцию пространственных гармоник функции тока.

Схема расчетов для численного моделирования протестирована на результатах изотермической электроконвекции ($Ra = 0$) [10], которая возникает в результате обратной бифуркации при $T_1 = 6200$ и сосуществует с режимом механического равновесия при уменьшении электрического параметра до $T_2 = 1800$. Полученные в нашем численном моделировании результаты $T_1 = 6280$ и $T_2 = 1780$ находятся в хорошем соответствии с результатами работы [10].

Еще один элемент тестирования связан со сравнением результатов линейной теории данных расчетов в полной нелинейной постановке. При наличии нагрева сверху ($Ra < 0$) критическое значение для колебательной моды неустойчивости, полученное в ходе наших расчетов T_{osc} , отличается от результатов линейной теории T_{osc}^{lin} не более, чем на 3.5%: например, $Ra = -1800$, $T_{osc} = 6778$, $T_{osc}^{lin} = 7007.3$.

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЖИМЫ ЭЛЕКТРОКОНВЕКЦИИ

Обсудим влияние нагрева сверху (изменение числа Рэлея) на эволюцию электроконвективных волновых режимов. В отличие от результатов [8, 16] в ходе численного моделирования обнаружено два типа бегущих волн (TW, traveling wave), изображенных для примера в случае $T = 6820$, $Ra = -1900$ на рис. 2. Изолинии вращающихся по часовой стрелке вихрей (положительная функция тока, штриховые линии), против часовой стрелки (отрицательная функция тока, сплошные линии) совмещены с полями температуры (верхний ряд) и плотности заряда (нижний ряд). Несмотря на то, что оба решения трансляционно-симметричны с пространственным периодом l , между ними имеется и различие, которое связано с тем, что интенсивности вращения соседних вихрей в бегущей волне разные. В одном режиме (TW1, бегущей слева направо волны) вращающийся по часовой стрелке положительный вихрь имеет большую интенсивность, но меньший горизонтальный размер, чем его сосед, $\psi_{max}^1 > |\psi_{min}^1|$ (рис. 2a), а в другом режиме (TW2, бегущей справа налево волны), наоборот, $\psi_{max}^2 < |\psi_{min}^2|$, при-

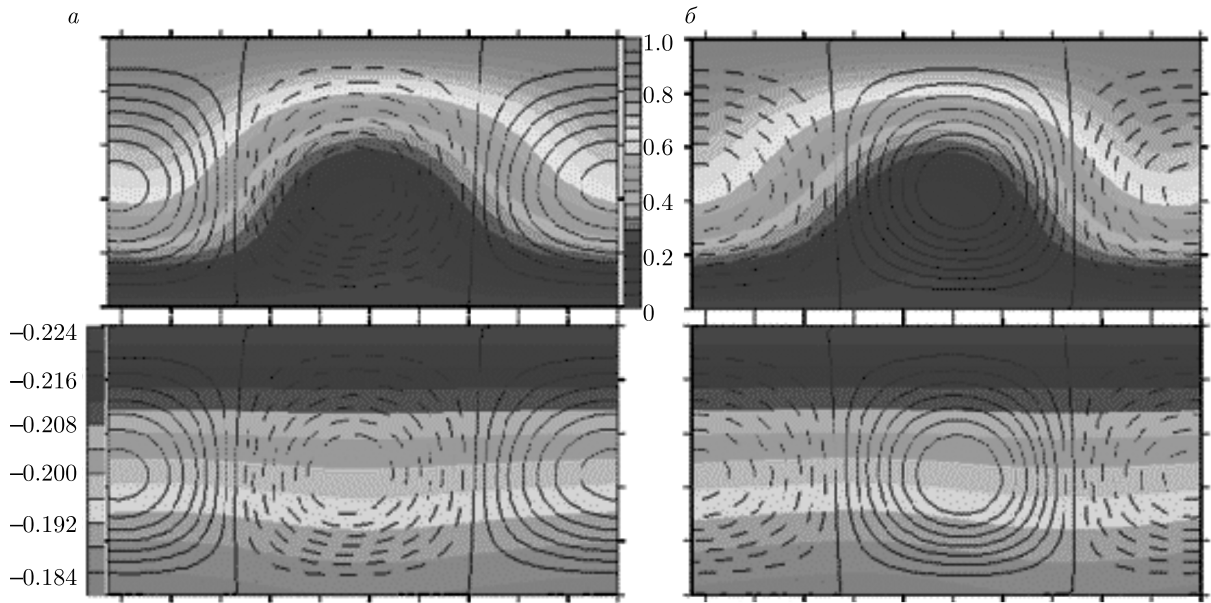


Рис. 2. (В цвете онлайн) Бегущие волны. Изолинии функции тока и температуры (верхний ряд), функции тока и заряда (нижний ряд): *a*) режим TW1, *б*) режим TW2. Штриховые линии — изолинии вращающихся по часовой стрелке вихрей (положительная функция тока), сплошные линии — изолинии вихрей, вращающихся против часовой стрелки (отрицательная функция тока). $T = 6820$, $Ra = -1900$, $A = 0.25$, $M = 14.14$, $Pr = 10$

чем $\psi_{max}^1 \simeq -\psi_{min}^2$ и $\psi_{max}^2 \simeq -\psi_{min}^1$. Различие в пространственной структуре бегущих в противоположных направлениях волн наблюдалось ранее для случая электрокондуктивного [28] или диэлектрофоретического [29] механизмов зарядообразования в жидкости.

Из рис. 2 видно, что конвективное движение сильно искажает изолинии температуры, в то время как отклонение заряда от равновесного значения (8) мало и имеет наибольшее значение у анода (нижнего электрода).

Бифуркационные диаграммы режимов при $T = 6780$ и $T = 6820$ представлены на рис. 3. Они содержат зависимости максимального значения функции тока ψ_{max}^1 (сплошная линия), ψ_{max}^2 (штриховая линия) бегущих волн (рис. 3*а*) и циклической частоты колебаний функции тока в фиксированной точке ячейки $\psi_{loc}(t)$ (рис. 3*б*) от модуля числа Рэлея. Точками на рис. 3*а* отмечены данные максимального значения функции тока для бегущих TW1 и стоячих волн, которые соответствуют значениям параметров ($T = 6820$, $1000 < |Ra| < 2500$ [16]). Отметим, что ранее в [8, 16] был обнаружен только один тип бегущих волн — TW1.

Частоты (рис. 3*б*) определяются по спектрам Фурье (рис. 4), которые могут содержать либо характерную частоту электроконвективных колеба-

ний ω_{TW} (рис. 4*а*, бегущая волна, ω_{TW}) и удвоенную гармонику $2\omega_{TW}$, либо дополнительно к ним частоту ω_1 (рис. 4*б*, MTW — модулированная бегущая волна).

Из бифуркационной диаграммы (рис. 3) видно, что уменьшение интенсивности нагрева ($|Ra|$) приводит к уменьшению максимального значения функции тока и согласно (9) ($v_z = \partial\psi/\partial x \simeq k\psi$) максимального значения вертикальной скорости электроконвекции, а следовательно, интенсивности конвективного перемешивания жидкости в волне. Основная частота колебаний ω_{TW} в фиксированной точке конвективной ячейки и фазовая скорость волны $v_{ph} = \omega_{TW}/k$ также убывают с уменьшением интенсивности нагрева.

При уменьшении степени нагрева $|Ra| < |Ra_{MTW}| = 925$ на бифуркационной диаграмме появляется новое решение (не обнаруженное в [16]): бегущая волна приобретает модуляцию по амплитуде $\psi_1 < \psi_{max}(t) < \psi_2$. При этом новая частота, связанная с модуляцией волны, возникает скачком $\omega_1 = 2.802$ и характеризует квазипериодические колебания решений в фиксированной точке конвективной ячейки (отношение $Q = \omega_1/\omega_{TW}$ не является рациональным числом). Минимальное ψ_1 и максимальное ψ_2 значения амплитуды бегущей волны также представлены на рис. 3*а*. С умень-

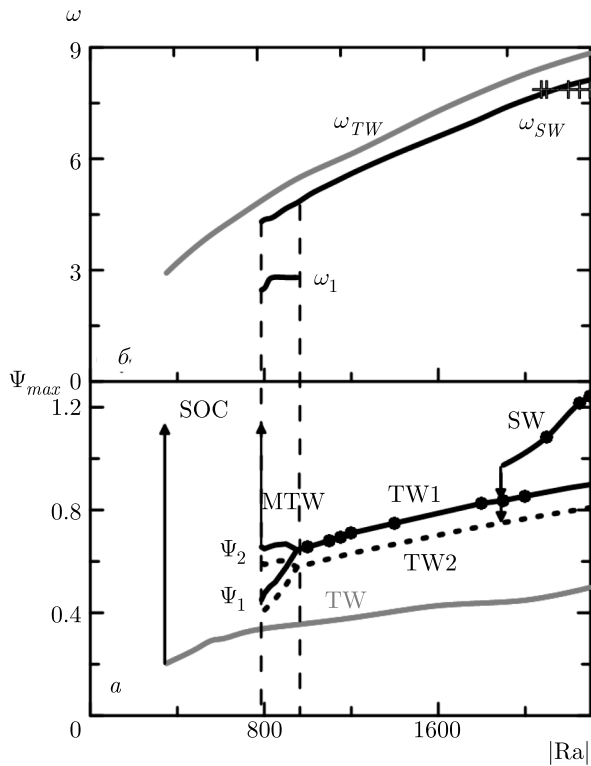


Рис. 3. (В цвете онлайн) Бифуркационные диаграммы режимов электроконвекции: зависимости *a*) максимального значения функции тока, *б*) частоты колебаний функции тока в фиксированной точке; $T = 6820$ (черные линии), 6780 (красные линии); $Ra = -1900$, $A = 0.25$, $M = 14.14$, $Pr = 10$

пением модуля числа Рэля степень модуляции амплитуды постепенно возрастет, $\delta_A = \psi_2/\psi_1$, а частота бегущей волны ω_{TW} и частота ω_1 уменьшаются (рис. 2б). При некотором критическом значении числа Рэля $|Ra_{SOC}| \approx 784$ модулированная бегущая волна теряет устойчивость, и после переходного процесса устанавливается режим интенсивной стационарной конвекции (SOC, $\psi_{SOC} = 26$). Этот режим характеризуется зеркальной симметрией между противоположно вращающимися валами SOC [8, 16].

В модулированной волне (MTW) при $|Ra| < |Ra_{MTW}|$ (например, для $T = 6820$, $|Ra| = 800$, рис. 5) периодически меняется не только амплитуда: значение $\psi_{max}(t)$ изменяется в интервале (ψ_1, ψ_2) (рис. 5а), но и фаза $v_{ph}^1 < v_{ph} < v_{ph}^2$ (рис. 5б). При этом средняя фазовая скорость MTW во всем интервале их существования удовлетворяет условию $\langle v_{ph} \rangle \simeq \omega_{TW}/k$ (например, $T = 6820$, $Ra = -800$, $\omega_{TW} = 4.33$, $k = \pi$, $\omega_1 = 2.52$, $\langle v_{ph} \rangle = 1.37$), а фазовая скорость на периоде модуляции меняется в

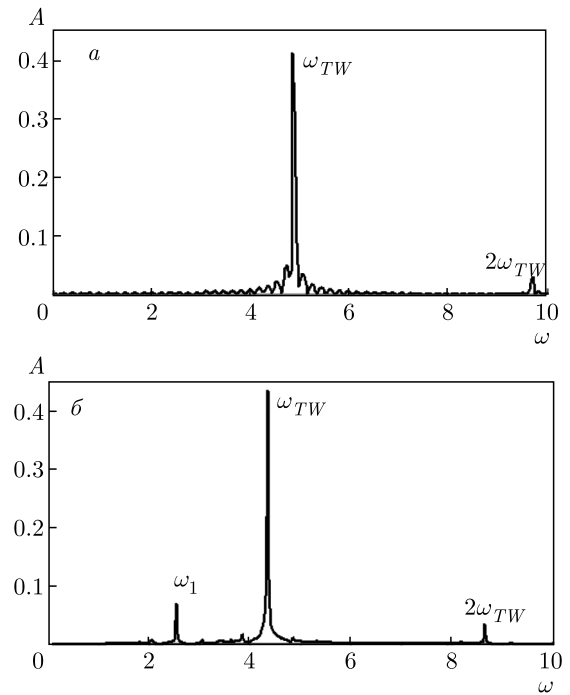


Рис. 4. Фурье-спектры колебаний функции тока в заданной точке конвективной ячейки в режимах *a*) бегущей волны ($Ra = -950$) и *б*) модулированной бегущей волны ($Ra = -800$); $T = 6820$, $A = 0.25$, $M = 14.14$, $Pr = 10$.

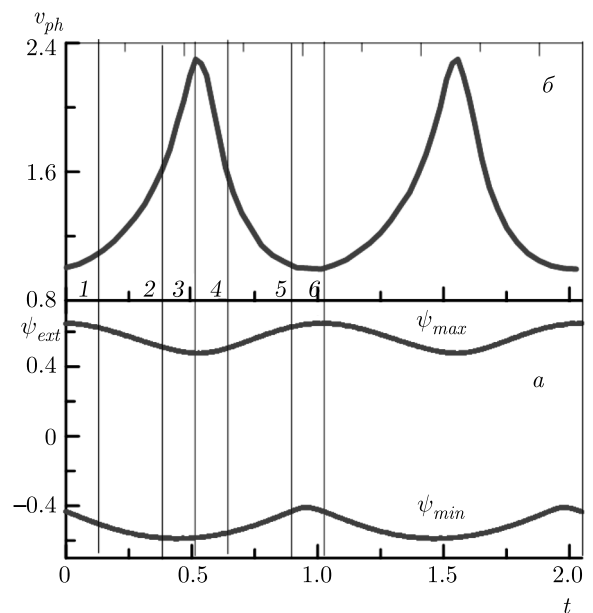


Рис. 5. Модулированная бегущая волна. Зависимости максимального и минимального значений функции тока (*a*), а также фазовой скорости волны (*б*) от времени: $Ra = -800$, $T = 6820$, $A = 0.25$, $M = 14.14$, $Pr = 10$

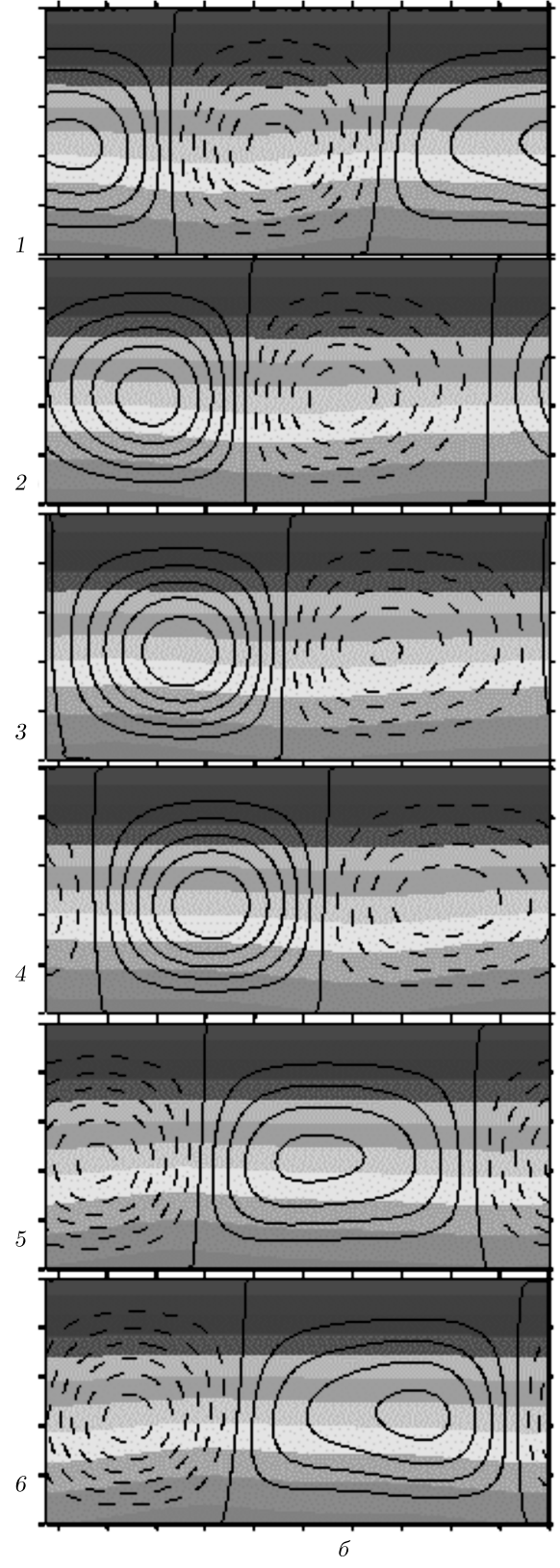
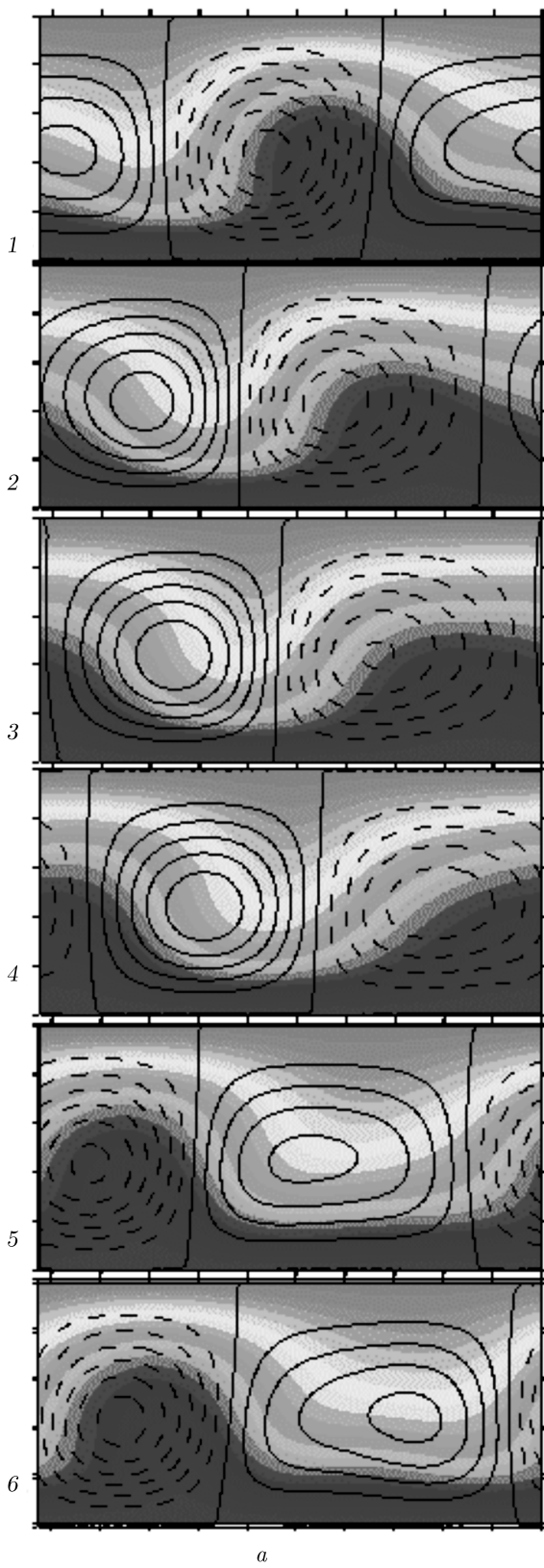


Рис. 6. (В цвете онлайн) Модулированная бегущая волна. Изолинии *a*) функции тока и температуры, *б*) функции тока и заряда в различные моменты времени. Штриховые и сплошные линии соответствуют положительным и отрицательным значениям функции тока. Числа 1–6 соответствуют моментам времени, отмеченным на рис. 5. $Ra = -800$, $T = 6820$, $A = 0.25$, $M = 14.14$, $Pr = 10$

$v_{ph}^2/v_{ph}^1 \approx 2.3$ раза. Частота модуляции $\omega_{mod} = 2\pi/T$ (T — период модуляции) связана с частотами колебаний в спектре квазипериодических колебаний (рис. 4) соотношением $\omega_{mod} = 2\omega_{TW} - \omega_1$ и одинакова для изменения фазовой скорости $v_{ph}(t)$, максимального $\psi_{max}(t)$ и минимального $\psi_{min}(t)$ значений функции тока. Колебания максимального ψ_{max} и минимального ψ_{min} значений функции тока сдвинуты по фазе. Интенсивности вращения соседних вихрей в конвективной ячейке в режиме модулированной бегущей волны различны, но в отличие от бегущей волны изменяются на периоде модуляции.

Изолинии функции тока, температуры и плотности заряда модулированной бегущей волны (MTW) в моменты времени $t_1 = T/8$, $t_2 = 3T/8$, $t_3 = 4T/8$, $t_4 = 5T/8$, $t_5 = 7T/8$, $t_6 = T$ при ($|Ra| = 800$, $\omega_{mod} = 6.123$) представлены на рис. 6 (ряды, отмеченные числами 1–6 соответствуют моментам времени t_1 – t_6 на рис. 5).

Следует обратить внимание, что сверху находится более нагретая (легкая) жидкость и течение обеспечивается силой Кулона, поднимающей более холодную (тяжелую) жидкость вверх (рис. 6*a*). Из рисунков видно направление движения волны слева направо. Общее свойство: конвективное движение значительно искажает изолинии температуры (велико отклонение изолиний от горизонтального положения в равновесии), в то время как отклонение плотности заряда от равновесного распределения (8) мало. Конвективные валы, вращающиеся по и против часовой стрелки и смещающиеся вдоль горизонтали, меняют не только свою интенсивность, но и размеры, что связано с генерацией второй пространственной гармоники $\hat{\psi}_2, \hat{\theta}_2, \hat{q}_2$ (18). Наличие высших пространственных гармоник \hat{F}_2 хорошо видно на эволюции поля температуры (рис. 5*a*).

В момент $t_1 = T/8$ фазовая скорость волны немного превышает минимальную, интенсивность электроконвекции большая, горизонтальный размер вихря, вращающегося против часовой стрелки, превышает размер соседнего. В ходе эволюции размеры соседних противоположно вращающихся вихрей осциллируют в противофазе и в моменты $t = 3T/8$ и

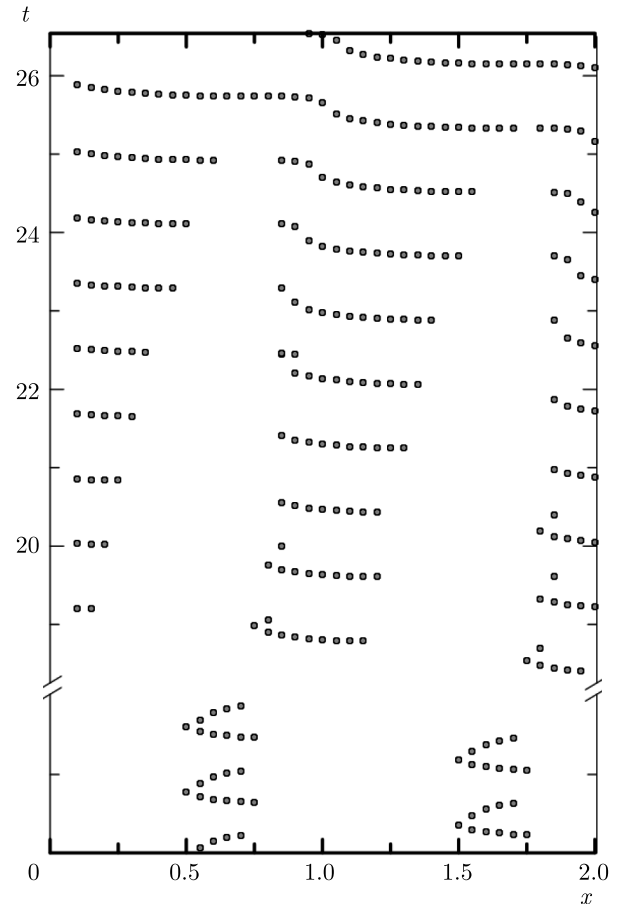


Рис. 7. Переход от стоячей волны к бегущей. Поведение координаты максимума на характеристической плоскости. $Ra = -1888$, $T = 6820$, $A = 0.25$, $M = 14.14$, $Pr = 10$

$6T/8$ практически совпадают. При $t_2 < t < t_4$ большую часть ячейки занимает вихрь, вращающийся по часовой стрелке.

При t_5, t_6 снова преобладает вихрь, направленный против часовой стрелки. В эти моменты времени нулевая изолиния (соответствующая средней температуре) имеет форму, близкую к трапеции.

На бифуркационной диаграмме (рис. 3) при $T = 6280$ присутствует область чисел Рэлея $1900 < |Ra| < 2400$, в которой сосуществуют бегущие (TW) и стоячие (SW) волны. Эта область раньше [8, 16] не была обнаружена. Отметим, что частота стоячей волны ω_{SW} немного меньше частоты бегущей ω_{TW} и практически не зависит от числа Рэлея (крестики на рис. 3*б*). В стоячей волне выполняется условие $\psi_{max}(t) = |\psi_{min}(t)|$.

Обсудим переходный процесс от стоячей волны к бегущей, отраженный для примера на рис. 7, 8 при $|Ra| = 1888$. Изменение пространственного положе-

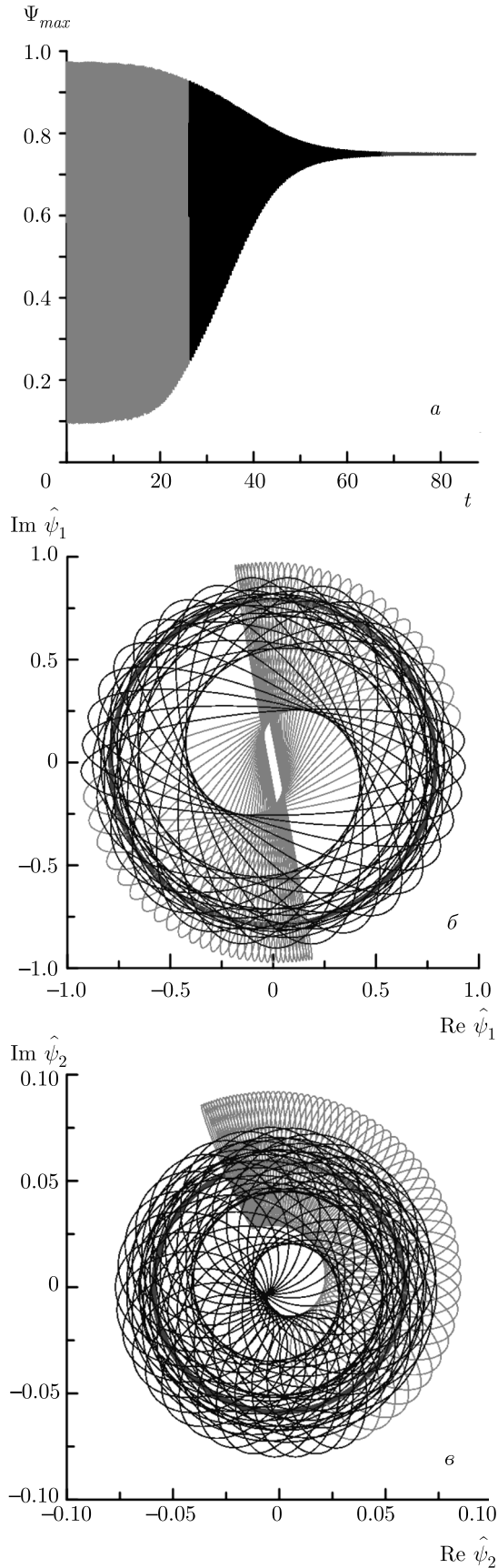


Рис. 8. (В цвете онлайн) Переход от стоячей волны к бегущей. Эволюция а) максимальной функции тока, б) первой и в) второй пространственных гармоник функции тока.
 $Ra = -1888$, $T = 6820$, $A = 0.25$, $M = 14.14$, $Pr = 10$

ния максимума функции тока на начальном интервале перехода представлено на характеристической плоскости (рис. 7, $0 < t < 26.5$, красные круги). На первом временном интервале $t < 1.88$ положение максимума функции тока осциллирует в интервалах координат $0.5 < x < 0.75$ и $1.5 < x < 1.75$, оставляя на характеристической плоскости следы в виде «подков». Нижние границы этих интервалов ($x = 0.5$ и $x = 1.5$) соответствуют положениям экстремумов первой пространственной гармоники, а сами осцилляции связаны с изменениями амплитуды второй гармоники. Через половину периода по времени происходит переключение: положение максимума сдвигается на половину длины ячейки $\pm l/2$.

В интервале $1.88 < t < 25$ характер волны изменяется. Несмотря на то, что горизонтальное движение структуры существует по-прежнему только в части конвективной ячейки, интервал координат x , при котором существует возвратное движение, уменьшается.

При $t = 25.16$ возникает сквозное движение конвективных валов через слой. Из рис. 7 видно, что формирующаяся бегущая волна движется справа налево (решение TW2) и модулирована по фазе: фазовая скорость волны равна обратному тангенсу наклона к графику $t(x)$.

Полностью переход от стоячей волны к бегущей при $Ra = -1888$ представлен на рис. 8 ($0 < t < 87.5$), где изображены эволюция максимальной функции тока (рис. 8а), а также траектории на плоскостях $Re \hat{\psi}_1 - Im \hat{\psi}_1$ (рис. 8б) и $Re \hat{\psi}_2 - Im \hat{\psi}_2$ (рис. 8в), отражающие эволюцию первой и второй пространственных гармоник функции тока. При этом на всех частях рисунка использована одинаковая цветовая кодировка: красные линии соответствуют интервалам времени Δt_1 ($0 < t < 26.5$), черные — Δt_2 ($26.5 < t < 78.32$), фиолетовые — Δt_3 ($78.32 < t < 87.5$). В результате представленного на рис. 8 процесса формируется бегущая волна TW2 (рис. 3) с $\psi_{max}^2 = 0.750$. Вклад второй гармоники (рис. 8в) на порядок меньше вклада первой (рис. 8б). Первый этап Δt_1 соответствует переходу от стоячей волны к модулированной бегущей, который был обсужден выше (рис. 7). На втором этапе Δt_2 модуляция фазовой скорости значительно изменяется, уменьшаясь по амплитуде. При дальнейшей

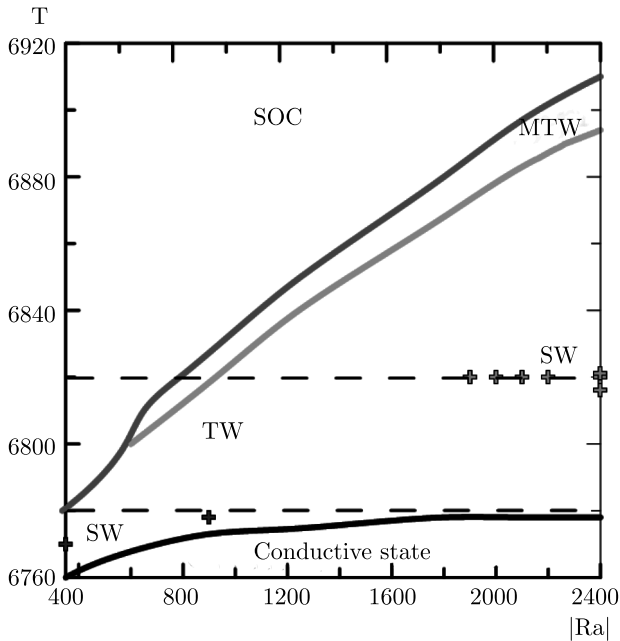


Рис. 9. (В цвете онлайн) Карта волновых режимов на плоскости (Ra, T) . $A = 0.25$, $M = 14.14$, $Pr = 10$. TW — бегущая волна, SW — стоячая волна, MTW — модулированная бегущая волна, SOC — стационарная конвекция

эволюции волны Δt_3 амплитуда модуляции фазовой скорости убывает до нуля и при $t = 78.32$ возникает бегущая с постоянными скоростью и амплитудой волна.

На рис. 8 эту волну отображают фиолетовые окружности, причем вклад второй гармоники $|\hat{\psi}_2| = 0.059$ составляет 13% от вклада первой гармоники и $|\hat{\psi}_1| = 0.792$. Вклад третьей гармоники, как отмечалось ранее, пренебрежимо мал, $|\hat{\psi}_3| = 0.0016$. Аналогичное поведение демонстрируют гармоники температуры и заряда.

При значении электрического параметра $T = 6780$ бифуркационная диаграмма меняется (рис. 3), режим модулированных бегущих волн отсутствует, а переход к стационарной конвекции (SOC) происходит от режима бегущих волн (TW) при $|Ra_{SOC}| \approx 337$. Отметим, что различие между двумя режимами бегущих волн TW1 и TW2 по-прежнему существует, но в пределах графика этого не заметно. Частота бегущей волны уменьшается с уменьшением интенсивности нагрева (рис. 3б).

Итоговая карта различных волновых режимов представлена на плоскости (Ra, T) , см. рис. 9. В зависимости от расположения точки на этой плоско-

сти устойчивыми могут быть различные решения. Нижняя (черная) граница отделяет область покоящейся жидкости (conductive state) от установившихся волновых режимов. При фиксированном числе Рэлея и увеличении электроконвективного параметра T выше этой границы начинают возрастать колебательные возмущения и формируется стоячая электроконвективная волна (SW), которая с ростом параметра T разрушается с формированием бегущей волны (TW). Устойчивые стоячие волны отмечены зелеными крестиками. В стоячей волне энергия перетекает между первой и второй пространственными гармониками, как это было проанализировано выше. Дальнейший рост параметра T приводит к появлению относительно узкой зоны модуляции бегущей волны (MTW) по амплитуде и по фазе, а затем к разрушению волнового режима и переходу к режиму стационарной конвекции (SOC). С ростом интенсивности нагрева сверху $|Ra|$ порог устойчивости T_{osc} повышается, а область существования волновых режимов расширяется.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучена эволюция двумерных волновых режимов конвекции (бегущих и модулированных бегущих волн), возникающих в конденсаторе, заполненном нагреваемой сверху слабопроводящей жидкостью при инъекции заряда с катода. Для различных значений электроконвективного параметра T , характеризующего влияние электрического поля на заряженную жидкость, построены бифуркационные диаграммы. Показано, что уменьшение интенсивности нагрева приводит к уменьшению как максимального значения функции тока, а следовательно, интенсивности конвективного перемешивания жидкости в волне, так и основной частоты колебаний, а следовательно, и фазовой скорости горизонтального движения волны. При некотором критическом значении числа Рэлея $Ra_{MTW} = f(T)$ происходит переход к модулированной бегущей волне, а затем при $|Ra_{SOC}| < |Ra_{MTW}|$ еще один переход к режиму стационарной конвекции (SOC). Обнаружена область сосуществования режимов бегущих и стоячих волн. На основе изучения положения координаты максимальной функции тока на характеристической плоскости и поведения пространственных гармоник проанализирован режим разрушения стоячей волны и переход к режиму бегущей волны. Получена карта волновых режимов электроконвекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. А. Остроумов, *Взаимодействие электрических и электрогидродинамических полей*, Наука, Москва (1979).
2. M. C. Cross and P. C. Hohenberg, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
3. *Pattern Formation in Liquid Crystals*, ed. by A. Buka and L. Kramer, Springer, New York (1995).
4. M. J. Gross and J. E. Porter, *Nature* **212**, 1343 (1966).
5. М. К. Болога, Ф. П. Гросу, И. А. Кожухарь, *Электроконвекция и теплообмен*, Штиинца, Кишинев (1977).
6. Ю. К. Стишков, А. А. Остапенко, *Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках*, Изд-во Ленингр. унив., Ленинград (1989).
7. F. Pontiga and A. Castellanos, *Phys. Fluids* **6**, 1684 (1994).
8. А. Н. Мордвинов, Б. Л. Смородин, *ЖЭТФ* **141**, 997 (2012).
9. J. C. Lacroix, P. Atten, and E. J. Hopfinger, *J. Fluid Mech.* **69**, 539 (1975).
10. А. Н. Верещага, Е. Л. Тарунин, в сб. *Численное и экспериментальное моделирование гидродинамических явлений в невесомости*, УрО АН СССР, Свердловск, с. 93 (1988).
11. А. Н. Верещага, в сб. *Гидродинамика и процессы тепломассопереноса*, УрО АН СССР, Свердловск, с. 42 (1989).
12. Ph. Traore, A. T. Perez, D. Koulova, and H. J. Ro-mat, *J. Fluid Mech.* **658**, 279 (2010).
13. J. Wu and P. Traore, *Numer. Heat Transfer A Appl.* **68**(5), 471 (2015).
14. T. F. Li, K. Luo, and H. L. Yi, *Phys. Fluids* **31**, 064106 (2019).
15. R. D. Selvakumar, J. Wu, J. Huang, and P. Traoré, *Int. J. Heat Fluid Flow* **89**, 108787 (2021).
16. В. А. Ильин, В. Н. Александрова, *ЖЭТФ* **157**, 349 (2020).
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, Москва (1986).
18. Б. Л. Смородин, А. В. Тараут, *Изв. РАН, сер. Механика жидкости и газа* **1**, 3 (2010).
19. Е. Л. Тарунин, *Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции*, Изд-во Иркут. унив., Иркутск (1990).
20. F. H. Busse, in *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence. Topics in Applied Physics*, ed. by H. L. Swinney and J. P. Gollub, Vol. **45**, Springer, Berlin, Heidelberg (1981).
21. J. Niemela, G. Ahlers, and D. Cannel, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1365 (1990).
22. K. D. Eaton, D. R. Ohlsen, S. Y. Yamamoto, C. M. Surko, W. Barten, M. Lücke, M. Kamps, and P. Kolodner, *Phys. Rev. A* **43**, 7105 (1991).
23. W. Barten, M. Lücke, M. Kamps, and R. Schmitz, *Phys. Rev. E* **51**, 5636 (1995).
24. B. L. Winkler and P. Kolodner, *J. Fluid Mech.* **240**, 31 (1992).
25. P. Kolodner, C. M. Surko, and H. Williams, *Physica D* **37**, 319 (1989).
26. M. Liu and J. R. de Bruyn, *Can. J. Phys.* **70**, 689 (1992).
27. Б. Л. Смородин, А. В. Тараут, *ЖЭТФ* **145**, 180 (2014).
28. В. А. Ильин, Б. Л. Смородин, *Прикл. мех. технич. физ.* **49**(3), 20 (2008).
29. E. B. Barry, H. N. Yoshikawa, M. T. Fogaing, C. Kang, and I. Mutabazi, *Micrograv. Sci. Technol.* **33**, 162021 (2021).