

ВОЛНЫ ПУАНКАРЕ И ВОЛНЫ РОССБИ В СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЯХ МЕЛКОЙ ВОДЫ

М. А. Юденкова^{a,b*}, Д. А. Климачков^b, А. С. Петросян^{b,a}

^a Московский физико-технический институт (Национальный исследовательский университет)
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия

^b Институт космических исследований Российской академии наук
117997, Москва, Россия

Поступила в редакцию 4 октября 2021 г.,
после переработки 14 октября 2021 г.
Принята к публикации 14 октября 2021 г.

Приближение мелкой воды обобщается для описания крупномасштабных течений тяжелой жидкости со свободной поверхностью. Классические уравнения мелкой воды являются альтернативой решению полной системы гидродинамических уравнений в поле силы тяжести, однако классическое приближение не учитывает плотностную неоднородность слоя жидкости. Исследовано течение тонкого слоя вращающейся жидкости со свободной поверхностью при учете эффектов сжимаемости. Получена система квазилинейных дифференциальных уравнений, которая описывает течение сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды. Найдены решения полученной системы в виде линейных волн Пуанкаре на f -плоскости и волн Россби на β -плоскости в сжимаемых течениях. Исследована нелинейная динамика волн Россби в сжимаемых течениях методом многомасштабных разложений. Полученные трехволновые уравнения для амплитуд взаимодействующих волн проанализированы на наличие параметрических неустойчивостей, и найдены их инкременты.

DOI: 10.31857/S0044451022030099

1. ВВЕДЕНИЕ

Приближение мелкой воды играет фундаментальную роль при изучении крупномасштабных процессов в атмосферах планет и океанов. Уравнения мелкой воды широко используются в геофизической гидродинамике для исследования крупномасштабных волн и их нелинейных взаимодействий. Классические уравнения мелкой воды являются альтернативой решению полной системы гидродинамических уравнений течения жидкости со свободной границей в поле силы тяжести. Эти уравнения получаются из полных уравнений гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью, находящейся в поле силы тяжести, усреднением по глубине слоя в предположении гидростатичности распределения давлений и малости толщины слоя по отношению к характерному линейному размеру задачи и в пренебреже-

нии вертикальной неоднородностью плотности потока горизонтального импульса. Традиционно исследуют два типа линейных волн в приближении мелкой воды вращающейся жидкости. Первый тип — это высокочастотные волны (волны Кельвина и волны Пуанкаре (инерционно-гравитационные)), второй тип волн — это низкочастотные планетарные волны (волны Россби). Волны Кельвина и волны Пуанкаре представляют собой модифицированные вследствие вращения гравитационные волны, волны Россби образуются вследствие зависимости параметра Кориолиса от широты в течениях на вращающейся сфере.

Несмотря на фундаментальный характер приближения мелкой воды для описания течений жидкости в поле силы тяжести, классические уравнения мелкой воды не учитывают плотностную неоднородность, всегда формируемую силой гравитации. Поэтому условия применимости классических уравнений мелкой воды к реальным средам ограничиваются не только малостью отношения глубины слоя к характерному линейному размеру задачи, но и характерным вертикальным масштабом изме-

* E-mail: yudenkova.ma@phystech.edu

нения плотности вследствие наличия силы тяжести и масштабом вертикальных неоднородностей горизонтального поля скорости.

В работе предложена модель течения сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды для описания эффектов неоднородности плотности [1]. Эта модель получается в результате усреднения по толщине слоя полных уравнений движения Эйлера сжимаемой жидкости в поле силы тяжести. Таким образом, в этом приближении фильтруются звуковые волны и учитывается зависимость плотности от давления на крупных масштабах, описывающая эффекты статической сжимаемости [2]. Такие условия возникают в течениях газов с примесями твердых частиц, например, в физике планетных колец [3], при изучении пылевых бурь на Марсе [4], крупномасштабных течений в атмосфере Земли с частицами пыли или песка [1], извержений вулканов [5, 6], а также в геофизике [7, 8].

Предложенная система выгодно отличается от традиционных уравнений мелкой воды для несжимаемой жидкости. В классических уравнениях мелкой воды высота и горизонтальная скорость столба жидкости полностью определяют его взаимодействие с остальным объемом жидкости. В уравнениях мелкой воды для сжимаемых жидкостей это взаимодействие определяется не только горизонтальной скоростью и высотой, но и средней плотностью столба жидкости. Вследствие этого учет горизонтального импульса в уравнениях происходит более точно, что является фундаментальным преимуществом при применении этих уравнений к атмосферным, океаническим и астрофизическим процессам. В работах [1, 9, 10] показано, что учет сжимаемости в модели мелкой воды приводит к улучшению предсказания скорости распространения газового потока с примесью твердых частиц. Такое приближение является альтернативой классическим многослойным моделям мелкой воды для течений с неоднородной плотностью [11], поскольку учитывает эффекты стратификации и не требует разбиения течения на несколько однородных слоев при численном моделировании крупномасштабных процессов. Фактически, приближение мелкой воды для изучения крупномасштабных неоднородных процессов в сжимаемой жидкости играет такую же фундаментальную роль, как и аналогичное приближение в гидродинамике несжимаемой однородной жидкости.

В разд. 2 получена система уравнений для сжимаемой вращающейся жидкости в приближении мелкой воды, разобраны два важных случая вращения: f -плоскость и β -плоскость. Показано,

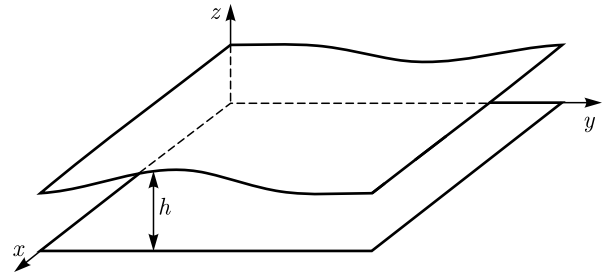


Рис. 1. Геометрия слоя жидкости

что исследование сжимаемых течений в приближении мелкой воды сводится к изучению квазилинейной системы уравнений в частных производных. В разд. 3 изучаются линейные волны в полученных системах. Для каждой системы уравнений найдены решения в виде плоских волн и их дисперсионные соотношения и описан графический метод анализа условия трехволнового синхронизма; этот метод применен к ранее полученным решениям систем уравнений. В разд. 4 рассматриваются слабонелинейные взаимодействия в сжимаемых течениях с помощью асимптотического метода многих масштабов. В Заключении приведены основные результаты работы.

2. УРАВНЕНИЯ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА С УЧЕТОМ ВРАЩЕНИЯ

В данном разделе получена система уравнений мелкой воды для сжимаемых вращающихся течений жидкости в поле силы тяжести.

Система уравнений сжимаемого газа в приближении мелкой воды получается из классических трехмерных уравнений движения сжимаемой жидкости усреднением по высоте слоя [10, 12, 13]. Предполагаем газ идеальным и политропным, распределение давлений по высоте — гидростатическим. Все процессы считаем адиабатическими. Скорости частиц жидкости и фазовые скорости возмущений полагаем малыми по сравнению со скоростью звука. Мы также пренебрегаем интегралами произведений отклонений переменных от их средних значений.

Ось z системы координат направлена вдоль вектора силы тяжести в противоположном направлении, ось x направлена вдоль широты, ось y соответственно вдоль долготы (рис. 1).

Запишем исходную систему уравнений для сжимаемой жидкости с учетом вращения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - f[\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}] - \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}, \quad (3)$$

$$p = \frac{1}{\mu} \rho T. \quad (4)$$

Здесь (1) — уравнение непрерывности, (2) — уравнение Эйлера с учетом вращения и силы тяжести, (3) — уравнение адиабаты идеального газа, (4) — уравнение Менделеева–Клапейрона. В системе (1)–(4) $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)^T$ — крупномасштабная скорость, ρ — плотность газа, p — гидродинамическое давление, \mathbf{g} — ускорение свободного падения, f — параметр Кориолиса, γ — показатель адиабаты, μ — молярная масса, T — температура в энергетических единицах. Уравнения записаны в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с жидкостью.

Запишем граничные условия для системы (1)–(4):

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad (5)$$

$$u_z|_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + u_x|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + u_y|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (6)$$

$$p|_{z=h} = p_h = \text{const}, \quad T|_{z=h} = T_h = \text{const}. \quad (7)$$

Высоту слоя жидкости, отсчитываемую от уровня нижней границы $z = 0$, обозначим $z = h(x, y, t)$. Выражения (5) и (6) соответствуют условию непротекания на дне и на свободной границе и обозначают обращение в нуль нормальной к поверхностям составляющей скорости жидкости. Условия (7) задают постоянные значения плотности и температуры на свободной границе. Отметим, что если на свободной границе хотя бы один из параметров p, ρ, T постоянен, то и остальные два необходимо постоянны вследствие адиабатичности процессов (3) и уравнения Клапейрона (4).

Из уравнения состояния (4) с учетом граничных условий (7) получим следующее выражение для плотности на свободной границе:

$$\rho|_{z=h} = \frac{p_h}{T_h \mu} = \rho_h. \quad (8)$$

Уравнение адиабаты (3) с учетом (7) запишется в виде

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_h}{\rho_h^\gamma}. \quad (9)$$

Давление слоя жидкости предполагаем гидростатическим, тогда

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (10)$$

Выразим ρ из уравнения (9) и подставим в уравнение (10). С учетом выражений (7) получим выражение для давления как функции координат и времени:

$$p(x, y, z, t) = p_h \left(1 + \frac{h-z}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (11)$$

Тогда из (9) выразим $\rho(x, y, z, t)$:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_h \left(1 + \frac{h-z}{H_\rho} \right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (12)$$

где $H_\rho = c_p T_h / g$ — характерная плотностная высота — масштаб, на котором вариация плотности по высоте становится существенной, $c_p = \mu^{-1} \gamma (\gamma - 1) = \text{const}$ — теплоемкость при постоянном давлении.

Условие гидростатического равновесия (10) означает пренебрежение вертикальными ускорениями. Это условие широко используется для описания сжимаемых астрофизических течений, таких как конвективные зоны Солнца и звезд [14], атмосфера Земли [15, 16]. Ниже показано, что использование стандартной процедуры усреднения для получения приближения мелкой воды с гидростатическим условием (10) позволяет значительно упростить исходную трехмерную систему уравнений (1)–(4). В результате получается новая система уравнений, в которой звуковые волны отфильтровываются и сохраняются эффекты крупномасштабной сжимаемости, а именно, зависимость градиента плотности от градиента давления.

Отметим, что в классических уравнениях мелкой воды для несжимаемой жидкости масса элементарного столба жидкости с единичным горизонтальным размером равна высоте свободной границы. В нашем случае приближения мелкой воды с учетом крупномасштабной сжимаемости масса элементарного столба жидкости с единичным горизонтальным размером равна произведению высоты свободной поверхности и средней плотности газа элементарного столба, при этом перенос массы между элементарными столбами отсутствует.

Усредним уравнения (1)–(4) по высоте слоя жидкости от $z = 0$ до $z = h(x, y, t)$, используя выражения для давления и плотности (11), (12) и граничные условия (5)–(7). Вынося знак интегрирования из-под знака интеграла, преобразуем слагаемые в уравнении (1) с учетом граничных условий (5) и (6):

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz - \rho|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (13)$$

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u_x dz - \rho u_x|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (14)$$

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho u_y dz - \rho u_y|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \int_0^h \frac{\partial \rho u_z}{\partial z} dz &= \rho u_z|_{z=h} = \\ &= \rho|_{z=h} \left(\frac{\partial h}{\partial t} + u_x|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + u_y|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Сложив уравнения (13)–(16), получим усредненное по высоте уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u_x dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho u_y dz = 0. \quad (17)$$

Аналогично, проинтегрировав x - и y -составляющие уравнения Эйлера (2) по высоте от $z = 0$ до $z = h(x, y, t)$ с учетом граничных условий (5), (6), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho u_x dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u_x^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho u_x u_y dz = \\ = - \int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz + \int_0^h f u_x dz, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^h \rho u_y dz + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \rho u_x u_y dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^h \rho u_y^2 dz = \\ = - \int_0^h \frac{\partial p}{\partial y} dz - \int_0^h f u_y dz. \end{aligned} \quad (19)$$

Введем средние по высоте слоя плотность $\bar{\rho}$, давление \bar{p} и скорость \bar{u}_i :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{h} \int_0^h \rho dz, \quad \bar{p} = \frac{1}{h} \int_0^h p dz, \quad (20)$$

$$\bar{u}_i = \frac{1}{h} \int_0^h u_i dz, \quad i = x, y. \quad (21)$$

Подставив в уравнения (20) значения давления и плотности из (11), (12), получим

$$\bar{\rho} = \frac{p_h}{hg} \left[\left(1 + \frac{h}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right], \quad (22)$$

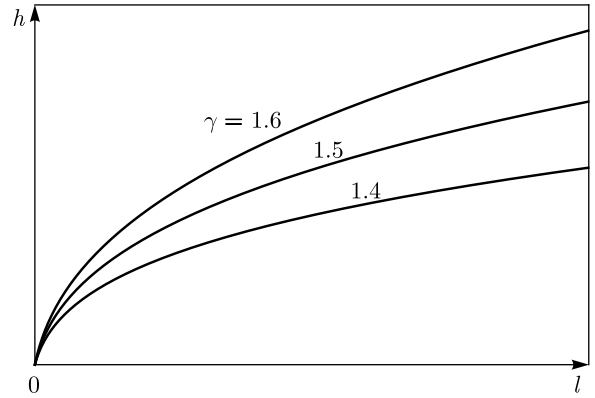


Рис. 2. Зависимости новой переменной l от высоты h при различных коэффициентах адиабаты γ

$$\begin{aligned} \bar{p} = \frac{p_h}{h} \frac{H_\rho}{\gamma/(\gamma-1) + 1} \frac{p_h}{h} \times \\ \times \left[\left(1 + \frac{h}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)+1} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Величины p, ρ, u_i представим в виде суммы средних значений и малых флуктуаций: $p = \bar{p} + p', \rho = \bar{\rho} + \rho', u_i = \bar{u}_i + u'_i$. Заметим, что для малых флуктуаций

$$\int_0^h p' dz = \int_0^h \rho' dz = \int_0^h u'_i dz = 0. \quad (24)$$

Введем новую переменную l :

$$l = h\bar{p} = \frac{p_h}{g} \left[\left(1 + \frac{h}{H_\rho} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - 1 \right], \quad (25)$$

которая, в отличие от высоты слоя h , имеет размерность длины, умноженной на плотность. На рис. 2 показана связь между новой переменной l и высотой слоя h при разных значениях показателя адиабаты γ . Новая переменная l нелинейно связана с высотой слоя h , таким образом, модернизированные уравнения относительно переменной l точнее описывают динамику высоты слоя. Однозначное соответствие между новой переменной l и высотой слоя h , согласно выражению (25), позволяет однозначно восстановить форму свободной поверхности после нахождения решения модернизированной системы уравнений.

Выразим теперь слагаемые в выражениях (17)–(19) через средние значения $\bar{p}, \bar{\rho}, \bar{u}_i$ и переменную l , пренебрегая интегралами от произведений флуктуаций:

$$\int_0^h \frac{\partial p}{\partial x} dz = g\bar{\rho}h \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{a^2 g}{l} \frac{\partial l}{\partial x}, \quad (26)$$

$$\int_0^h \rho u_i dz = \int_0^h (\bar{\rho} + \rho')(\bar{u}_i + u'_i) dz =$$

$$= \int_0^h \bar{\rho} \bar{u}_i dz + \bar{\rho} \int_0^h u'_i dz + \bar{u}_i \int_0^h \rho' dz + \int_0^h \rho' u'_i dz =$$

$$= h \bar{\rho} \bar{u}_i = l \bar{u}_i, \quad (27)$$

$$\int_0^h \rho u_i u_j dz = h \bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j = l \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (28)$$

В выражении (26)

$$a^2 = \frac{l}{\rho h} \left(\frac{lg}{\rho h} + 1 \right)^{-1/\gamma}. \quad (29)$$

Новая переменная a вводится так, чтобы величина $a^2 g$ представляла собой квадрат скорости слабых возмущений в сжимаемой жидкости, в отличие от несжимаемого случая, в котором выражение для квадрата скорости слабых возмущений имеет вид gh . Таким образом, величина a^2 имеет размерность длины.

Подставив выражения (26)–(28) в усредненные по высоте слоя уравнения непрерывности и Эйлера (17)–(19), получим усредненную по высоте слоя систему

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_y)}{\partial y} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial(lu_x)}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_x u_y)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial x} - f l u_y = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial(lu_y)}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_y^2)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + f l u_x = 0, \quad (32)$$

в которой выражение для квадрата скорости малых возмущений a^2 определено в (29). Для упрощения записи здесь и далее опущены знаки усреднения.

Система (30)–(32) является обобщением системы уравнений мелкой воды для сжимаемой жидкости, рассмотренной в работах [1, 9, 10], на двумерный случай с учетом вращения. Данная система записана в переменных поверхностной плотности слоя l и средних по высоте компонент скорости v_x и v_y . Уравнение (30) является следствием закона сохранения массы, а уравнения (31), (32) — следствием закона сохранения импульса.

Отметим отличия системы (30)–(32) от классической системы уравнений мелкой воды для несжимаемой жидкости [1]. В классической системе переменными являются высота h свободной поверхности и средняя скорость \mathbf{v} . Полученная же система

уравнений содержит переменную l , зависящую от средней плотности столба жидкости и высоты свободной поверхности. Заметим, что в выражение для плотности (12) входит параметр H_ρ — характерная плотностная высота. Отношение характерной высоты h_0 слоя к характерной плотностной высоте определяет масштаб сжимаемости. При $h_0/H_\rho \rightarrow 0$ жидкость можно считать несжимаемой, система уравнений (30)–(32) переходит в классическую систему уравнений мелкой воды для несжимаемой жидкости.

Вращение в задаче определяет параметр Кориолиса $f = 2\Omega \sin \theta$, где θ — широта, а Ω — угловая скорость вращения сферы. Далее рассмотрим два приближения: вращение на f -плоскости и на β -плоскости.

В первом случае считаем, что $f = f_0 = \text{const}$. Тогда система уравнений на f -плоскости запишется в виде

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_y)}{\partial y} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\partial(lu_x)}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_x u_y)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial x} - f_0 l u_y = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial(lu_y)}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_y^2)}{\partial y} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + f_0 l u_x = 0. \quad (35)$$

В приближении β -плоскости считаем изменение параметра Кориолиса f при малых изменениях широты θ линейным:

$$f = 2\Omega \sin \theta \approx 2\Omega \sin \theta_0 + (\theta - \theta_0) \cos \theta_0 = f_0 + \beta y. \quad (36)$$

Здесь $f_0 = 2\Omega \sin \theta_0$, $\beta = \partial f / \partial y$. Подставим параметр Кориолиса (36) в систему (30)–(32) и продифференцируем уравнение (31) по y , чтобы исключить y из уравнения. Таким образом, в приближении β -плоскости система (30)–(32) перепишется в виде

$$\frac{\partial l}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_y)}{\partial y} = 0, \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2(lu_x)}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2(lu_x^2)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2(lu_x u_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial(a^2 g)}{\partial y} +$$

$$+ a^2 g \frac{\partial^2 l}{\partial y \partial x} - f_0 \frac{\partial(lu_y)}{\partial y} - \beta l u_y = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial(lu_y)}{\partial t} + \frac{\partial(lu_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(lu_y^2)}{\partial y} \frac{\partial l}{\partial x} + a^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + f_0 l u_x = 0. \quad (39)$$

Таким образом, исследование сжимаемых течений в приближении мелкой воды сводится к исследованию квазилинейной системы уравнений (30)–(32). Далее будем анализировать эту систему как в приближении f -плоскости (33)–(35), так и в приближении β -плоскости (37)–(39).

3. ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЯХ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В данном разделе будем изучать волновые процессы в течении тонкого сжимаемого слоя газа в линейном приближении. Для этого линеаризуем систему уравнений в f -приближении (33)–(35) и β -приближении (37)–(39) около стационарных решений и найдем решения в виде плоских волн. Также сравним полученные дисперсионные соотношения с аналогичными результатами для несжимаемых течений.

3.1. Волны Пуанкаре в сжимаемых течениях на f -плоскости

Обратимся к системе уравнений на f -плоскости (33)–(35). Линеаризуя систему около стационарного решения $l = l_0, u_x = u_y = 0$, получим

$$\frac{\partial l}{\partial t} + l_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + l_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (40)$$

$$l_0 \frac{\partial u_x}{\partial t} + a_0^2 g \frac{\partial l}{\partial x} - f_0 l_0 u_y = 0, \quad (41)$$

$$l_0 \frac{\partial u_y}{\partial t} + a_0^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + f_0 l_0 u_x = 0. \quad (42)$$

Здесь $a_0^2 = a^2(l_0)$, функция $a^2(l)$ определена в (29).

Ищем решение линеаризованной системы в виде плоских волн:

$$\begin{pmatrix} l \\ u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{pmatrix} \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y), \quad (43)$$

где ω — частота волны, $\mathbf{k} = (k_x, k_y)^T$ — волновой вектор.

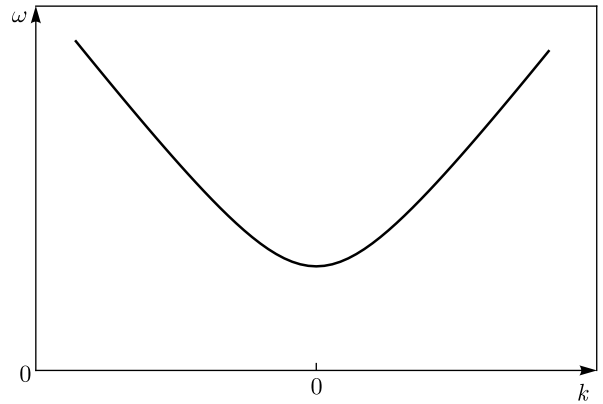


Рис. 3. Проекция дисперсионной поверхности волны Пуанкаре

После подстановки решения в виде плоской волны (43) в линеаризованную систему (40)–(42) получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\omega & k_x l_0 & k_y l_0 \\ -k_x a_0^2 g & \omega l_0 & -i f_0 l_0 \\ -k_y a_0^2 g & i f_0 l_0 & \omega l_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (44)$$

Однородная система (44) имеет нетривиальное решение, когда определитель матрицы системы равен нулю. Приравняв определитель матрицы к нулю, получим уравнение для нахождения дисперсионного соотношения:

$$\omega^3 + \omega f_0^2 + \omega(k_x^2 + k_y^2)a_0^2 g = 0. \quad (45)$$

Уравнение (45) имеет нулевое решение и два нетривиальных решения:

$$\omega = \pm \sqrt{f_0^2 + k^2 a_0^2 g}. \quad (46)$$

Уравнение (46) описывает дисперсионное соотношение для линейной волны в сжимаемой жидкости на f -плоскости. Полученная волна известна как волна Пуанкаре, ее дисперсионное соотношение изображено на рис. 3. Заметим, что частота волны всегда превышает частоту Кориолиса f_0 .

В коротковолновом пределе, когда

$$k^2 \gg \frac{f_0^2}{a_0^2 g}, \quad (47)$$

дисперсионное соотношение сводится к случаю без вращения. Физически это значит, что длина волны много меньше радиуса деформации Россби $L = \sqrt{a_0^2 g / f_0}$ [17]. Тем не менее длина волны должна быть больше толщины слоя жидкости, чтобы выполнялось приближение мелкой воды.

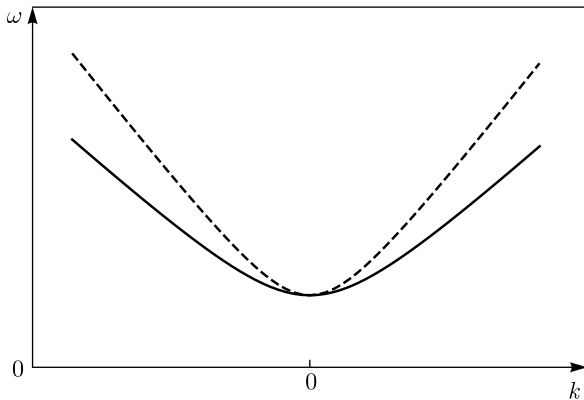


Рис. 4. Проекция дисперсионной поверхности волны Пуанкаре в несжимаемой жидкости (штриховая линия) и в сжимаемой жидкости (сплошная линия)

В длинноволновом пределе, когда

$$k^2 \ll \frac{f_0^2}{a_0^2 g}, \quad (48)$$

т.е. длина волны много больше радиуса деформации L , дисперсионные соотношения преобразуются и имеет вид

$$\omega = f_0. \quad (49)$$

Этот случай известен как инерционные колебания.

Заметим, что если высота слоя жидкости много меньше характерной высоты H_ρ , то $a_0^2 \approx h_0$ и дисперсионное соотношение (46) переходит в дисперсионное соотношение для волны Пуанкаре в несжимаемой жидкости [18]:

$$\omega = \pm \sqrt{f_0^2 + hgk^2}. \quad (50)$$

На рис. 4 изображены проекции дисперсионных поверхностей волн Пуанкаре в сжимаемой (46) и несжимаемой (50) жидкостях. На рисунке видно, что дисперсионные соотношения (46) и (50) — уравнения одного вида, однако наличие сжимаемости влияет на кривизну дисперсионных поверхностей.

На рис. 5 представлены решения для высоты h свободной поверхности в случае несжимаемой жидкости и в случае учета крупномасштабной сжимаемости. Учет эффектов сжимаемости позволяет скорректировать решение для высоты свободной поверхности. Таким образом, реальная высота свободной поверхности в сжимаемой жидкости меньше предсказываемой в модели несжимаемой жидкости. Кроме того, форма свободной поверхности в случае распространения одиночной плоской волны, в отличие от случая несжимаемой жидкости, имеет фор-

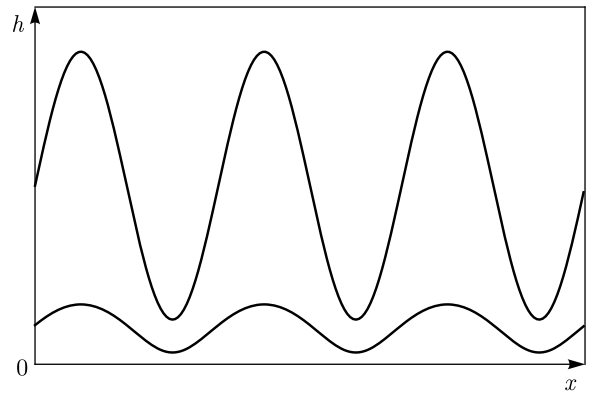


Рис. 5. Свободная поверхность в сжимаемой (нижняя кривая) и несжимаемой (верхняя кривая) жидкостях

му, отличающуюся от синусоиды. Решение уравнений для сжимаемой жидкости переходит в решение для несжимаемой жидкости, когда $h/H_\rho \rightarrow 0$.

3.2. Волны Пуанкаре и Россби на β -плоскости

Аналогичным образом найдем дисперсионные соотношения для линейных волн на β -плоскости. Линеаризуя систему (37)–(39) около стационарного решения $l = l_0, u_x = u_y = 0$, получим

$$\frac{\partial l}{\partial t} + l_0 \frac{\partial u_x}{\partial x} + l_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \quad (51)$$

$$l_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial t} + a_0^2 g \frac{\partial^2 l}{\partial y \partial x} - f_0 l_0 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \beta l_0 u_y = 0, \quad (52)$$

$$l_0 \frac{\partial u_y}{\partial t} + a_0^2 g \frac{\partial l}{\partial y} + f_0 l_0 u_x = 0. \quad (53)$$

После подстановки плоской волны (43) в линеаризованную систему (51)–(53) получим систему линейных однородных уравнений

$$\begin{pmatrix} -\omega & k_x l_0 & k_y l_0 \\ -k_x k_y a_0^2 g & \omega k_y l_0 & -i k_y f_0 l_0 - \beta l_0 \\ -k_y a_0^2 g & i f_0 l_0 & \omega l_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \hat{l} \\ \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (54)$$

Приравняв детерминант матрицы системы к нулю, получим уравнение

$$\omega^3 - \omega(f_0^2 + a_0^2 g k^2) - \beta a_0^2 g k_x = 0. \quad (55)$$

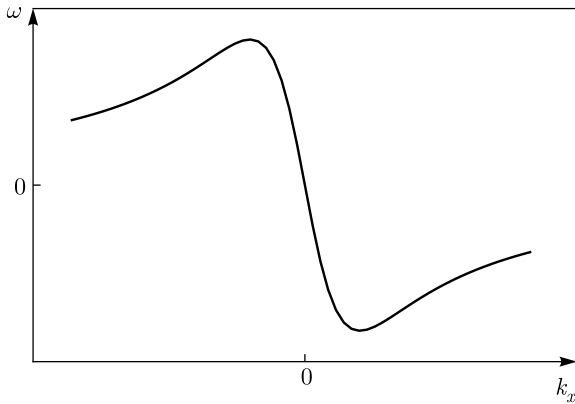


Рис. 6. Проекция дисперсионной поверхности волны Россби на k_x

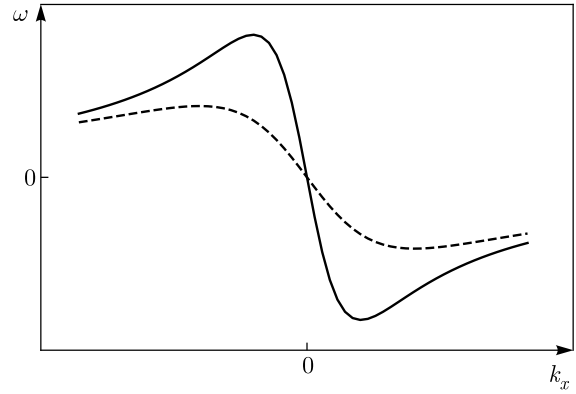


Рис. 7. Проекция дисперсионной поверхности волны Россби в несжимаемой (штриховая линия) и в сжимаемой (сплошная линия) жидкостях

Точное решение этого уравнения дается формулой Кардано:

$$\omega_1 = A + B, \quad \omega_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i \frac{A-B}{2} \sqrt{3}, \quad (56)$$

где

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}},$$

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{3}\right)^3, \quad p = -(f_0^2 + a_0^2 g k^2), \\ q = -\beta a_0^2 g k_x.$$

Рассмотрим два важных предельных случая. В коротковолновом пределе, если

$$k_x \gg \frac{f_0^3}{\beta a_0^2 g} = \frac{1}{L^2} \frac{f_0}{\beta},$$

то дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 = f_0^2 + a_0^2 g k^2, \quad (57)$$

что соответствует случаю волны Пуанкаре. В длинноволновом пределе, если

$$k_x \ll \frac{f_0^3}{\beta a_0^2 g} = \frac{1}{L^2} \frac{f_0}{\beta},$$

то

$$\omega = -\frac{\beta a_0^2 g k_x}{f_0^2 + a_0^2 g k^2}. \quad (58)$$

Волна, описываемая данным дисперсионным соотношением, называется волной Россби. На рис. 6 изображена дисперсионная поверхность волны Россби (57), (58) в проекции на k_x .

Отметим, что если масштаб плотностной неоднородности много больше высоты слоя жидкости, то

дисперсионное соотношение волны Россби перейдет в дисперсионное соотношение для волны Россби в случае несжимаемой жидкости:

$$\omega = -\frac{\beta h g k_x}{f_0^2 + h g k^2}. \quad (59)$$

На рис. 7 приводится сравнение проекций дисперсионных поверхностей волны Россби в несжимаемой жидкости (59) и волны Россби в сжимаемой жидкости (58). Как и в случае с волной Пуанкаре, наличие сжимаемости влияет на кривизну дисперсионных поверхностей.

Таким образом, полученные в линейном приближении дисперсионные уравнения (46) и (58) имеют тот же вид, что и дисперсионные уравнения (50), (59) в несжимаемой жидкости, и отличаются только числовыми коэффициентами. При этом в несжимаемом пределе дисперсионные уравнения (46) и (58) переходят в уравнения (50) и (59) соответственно.

3.3. Качественный анализ трехволновых взаимодействий

Определим, для каких из полученных типов волн возможны резонансные взаимодействия. Для того чтобы три волны испытывали взаимодействие, необходимо выполнение условия трехволнового синхронизма:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3, \quad \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2) = \omega_3(\mathbf{k}_3), \quad (60)$$

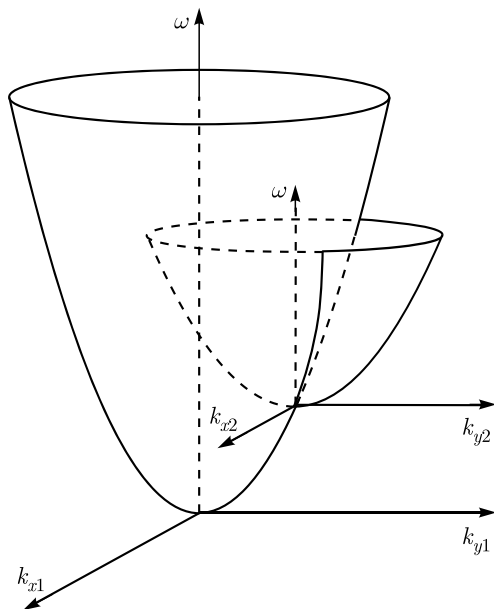


Рис. 8. Пересечение дисперсионных поверхностей взаимодействующих волн

где \mathbf{k}_i — волновые векторы взаимодействующих волн, $\omega_i(\mathbf{k})$ — дисперсионное соотношение для соответствующей волны.

Будем рассматривать условие резонанса как пересечение дисперсионных поверхностей [19]. Для двумерного вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ функция $\omega(\mathbf{k})$ задает поверхность в трехмерном пространстве ω, k_x, k_y . Рассмотрим две поверхности (рис. 8): S_1 , заданную уравнением $\omega = \omega_1(\mathbf{k})$, и S_2 , заданную уравнением $\omega = \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) = \omega_1(\mathbf{k}_1) + \omega_2(\mathbf{k}_2)$ — вторым слагаемым условия синхронизма (60) в смещенной точке $(\mathbf{k}_1, \omega_1(\mathbf{k}_1))$. Если поверхности пересеклись, обозначим точку пересечения \mathbf{k}_3 . Пересечение дисперсионных поверхностей S_1 и S_2 означает, что существует вектор $\mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и некоторая дисперсионная поверхность $\omega_3(\mathbf{k})$ такая, что

$$\omega_3(\mathbf{k}_3) = \omega_3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \omega_2(\mathbf{k}_2) + \omega_1(\mathbf{k}_1).$$

Проанализируем дисперсионные соотношения линейных волн для системы уравнений на f -плоскости (33)–(35), описывающей волны Пуанкаре (46). Покажем, что для волн Пуанкаре не выполняется условие трехволнового синхронизма (60). На рис. 9 изображены проекции дисперсионных поверхностей двух волн Пуанкаре на плоскость k_x, ω . Очевидно, что дисперсионные поверхности не имеют пересечений, а значит, условие синхро-

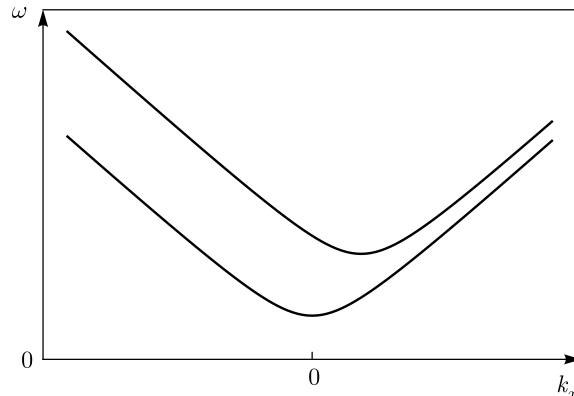


Рис. 9. Отсутствие синхронизма трех волн Пуанкаре

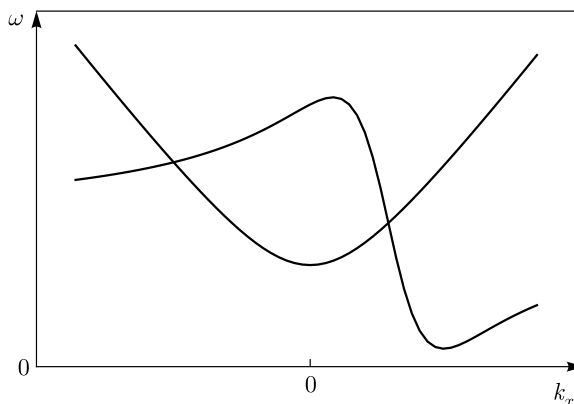


Рис. 10. Условие трехволнового синхронизма для двух волн Россби и волны Пуанкаре

низма (60) не выполняется. Таким образом, для волн на f -плоскости трехволновое взаимодействие невозможно.

Для системы уравнений на β -плоскости (37)–(39) были получены дисперсионные соотношения волны Пуанкаре (57) и волны Россби (58). Возможны четыре конфигурации взаимодействия волн: три волны Пуанкаре; две волны Пуанкаре и волна Россби; волна Пуанкаре и две волны Россби; три волны Россби.

Дисперсионные поверхности двух волн Пуанкаре не имеют пересечений, поэтому трехволновое взаимодействие невозможно для трех волн Пуанкаре, а также для двух волн Пуанкаре и волны Россби.

На рис. 10 изображены проекции волновых поверхностей на ось k_x дисперсионной поверхности волны Пуанкаре и волны Россби в смещенной точке. Кривые имеют пересечение, поэтому выполняет-

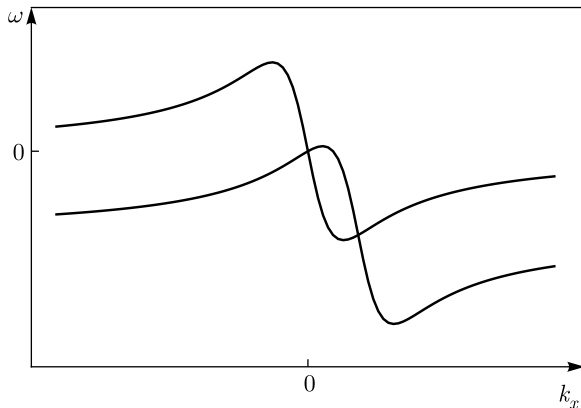


Рис. 11. Условие трехволнового синхронизма для трех волн Россби

ся условие трехволнового синхронизма. Аналогично на рис. 11 показано пересечение проекций волновых поверхностей волн Россби.

Таким образом, для системы уравнений на β -плоскости (37)–(39) возможны трехволновые взаимодействия для двух конфигураций — трех волн Россби, а также двух волн Россби и одной волны Пуанкаре. В обоих случаях это означает существование таких волновых векторов \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , что условие трехволнового синхронизма (60) выполнено [20].

4. СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЯХ В ПРИБЛИЖЕНИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В предыдущем разделе было показано, что в приближении f -плоскости существуют линейные волны Пуанкаре, для которых волновые взаимодействия невозможны. Между тем, на β -плоскости есть два типа волн — волны Пуанкаре в коротковолновом диапазоне и волны Россби в длинноволновом диапазоне. Условие трехволнового синхронизма для этих волн выполняется в двух вариантах: для трех волн Россби, для двух волн Россби и одной волны Пуанкаре.

4.1. Метод многих масштабов

Исследуем систему уравнений на β -плоскости (37)–(39), для которой ранее была качественно показана возможность трехволновых взаимодействий.

Для изучения слабонелинейных взаимодействий используем асимптотический метод многих масштабов [21]. В основе метода многих масштабов лежит идея перехода от одного набора аргументов a к нескольким наборам A_n , таких что $A_0 = a$, $A_1 = \varepsilon a$, $A_2 = \varepsilon^2 a$ и т. д. В нашем случае разложим аргументы t, x, y на «быстрые» переменные T_0, X_0, Y_0 и «медленные» переменные T_1, X_1, Y_1 . В таком случае операторы частных производных переписуются в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1}, \tag{61}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1}, \tag{62}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial Y_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial Y_1}. \tag{63}$$

Решение системы (61)–(63) будем искать в виде асимптотического ряда по степеням ε :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots \tag{64}$$

Здесь $\mathbf{u} = (l, u_x, u_y)^T$ — вектор-решение, $\mathbf{u}_0 = (l_0, u_{x0}, u_{y0})^T$ — стационарное решение, $\mathbf{u}_1 = (l_1, u_{x1}, u_{y1})^T$ — решение линеаризованной системы (51)–(53), \mathbf{u}_2 — квадратичная поправка.

Приравнивая слагаемые нулевого порядка по ε , получаем стационарное решение, приравнивая слагаемые первого порядка по ε , получаем линейную систему (51)–(53).

Подставим в исходную систему уравнений на β -плоскости разложение (64) и выражения для частных производных (61)–(63). Выписав слагаемые с ε^2 , получим систему

$$\hat{A} \mathbf{u}_2 = \hat{S} \mathbf{u}_1 + \hat{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1), \tag{65}$$

где \hat{A} — линейный оператор, действующий на квадратичную поправку, такой, что

$$\hat{A} \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial l_2}{\partial T_0} + l_0 \frac{\partial u_{x2}}{\partial X_1} + l_0 \frac{\partial u_{y2}}{\partial Y_0} \\ l_0 \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial Y_0 \partial T_1} + a_0^2 g \frac{\partial^2 l_2}{\partial Y_0 \partial T_0} - f_0 \frac{\partial u_{y2}}{\partial Y_0} - \beta l_0 u_{y2} \\ l_0 \frac{\partial u_{y2}}{\partial T_0} + a_0^2 g \frac{\partial l_2}{\partial Y_0} + f_0 l_0 u_{x2} \end{pmatrix}, \tag{66}$$

\hat{S} — линейный оператор, действующий на линейную поправку, такой, что

$$\hat{S}\mathbf{u}_1 = - \begin{pmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial T_1} + l_0 \frac{\partial u_{x1}}{\partial X_1} + l_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial Y_1} \\ l_0 \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial Y_0 \partial T_1} + l_0 \frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial Y_1 \partial T_0} + a_0^2 g \frac{\partial^2 l_1}{\partial Y_0 \partial X_1} + a_0^2 g \frac{\partial l_1}{\partial Y_1 \partial X_0} - f_0 l_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial Y_1} \\ l_0 \frac{\partial u_{y1}}{\partial T_1} + a_0^2 g \frac{\partial l_1}{\partial Y_1} \end{pmatrix}, \quad (67)$$

\hat{R} — нелинейный оператор такой, что

$$\hat{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial(l_1 u_{x1})}{\partial X_0} + \frac{\partial(l_1 u_{y1})}{\partial Y_0} \\ \frac{\partial^2(l_1 u_{x1})}{\partial Y_0 \partial T_0} + l_0 \left(\frac{\partial^2 u_{x1}^2}{\partial Y_0 \partial X_0} + \frac{\partial^2(u_{x1} u_{y1})}{\partial Y_0^2} \right) \\ \frac{\partial(l_1 u_{y1})}{\partial T_0} + l_0 \frac{\partial(u_{x1} u_{y1})}{\partial X_0} + l_0 \frac{\partial u_{y1}^2}{\partial Y_0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a_0^2 g}{L} \left(\frac{\partial l_1}{\partial Y_0} \frac{\partial l_1}{\partial X_0} + l_1 \frac{\partial^2 l_1}{\partial Y_0 \partial X_0} \right) - f_0 \frac{\partial(l_1 u_{y1})}{\partial Y_0} - \beta l_1 u_{y1} \\ a_0 g \frac{l_1}{L} \frac{\partial l_1}{\partial Y_0} + f_0 l_1 u_{x1} \end{pmatrix}. \quad (68)$$

Здесь величина

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{l_0} - \frac{g}{\gamma} \frac{1}{p + l_0 g}$$

получается при разложении величины a^2 , заданной формулой (29), в ряд по ε .

В правой части уравнения (65) содержатся слагаемые, полученные при решении линеаризованной системы уравнений (51)–(53). Они могут привести к линейному по времени или координате росту решения, что приведет к нарушению условия малости поправки по сравнению с решением линейной задачи ($\varepsilon^2 \mathbf{u}_2 \ll \varepsilon \mathbf{u}_1$) на больших масштабах. Чтобы исключить влияние резонансных слагаемых, введем зависимость амплитуды волны от медленных переменных, а фазы волны — от быстрых переменных:

$$\mathbf{u}_1 = \hat{\mathbf{u}}_1(T_1, X_1, Y_1) \exp(-i\omega T_0 + ik_x X_0 + ik_y Y_0). \quad (69)$$

Если искать \mathbf{u}_2 в виде линейных волн, то получим систему

$$A \hat{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{b}, \quad (70)$$

где \mathbf{b} — вектор правой части, который можно найти подстановкой выражения для линейной поправки (69) в правую часть уравнения (65), A — матрица

системы. Матрица A совпадает с матрицей однородной системы (54):

$$A = \begin{pmatrix} -\omega & k_x l_0 & k_y l_0 \\ -k_x k_y a_0^2 g & \omega k_y l_0 & -ik_y f_0 l_0 - \beta l_0 \\ -k_y a_0^2 g & i f_0 l_0 & \omega l_0 \end{pmatrix}. \quad (71)$$

При выполнении дисперсионного соотношения (55) определитель матрицы A равен нулю. Воспользуемся теоремой Фредгольма, чтобы найти условие совместности системы (70). Система алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда каждое решение сопряженной однородной системы $\mathbf{z}^T A = 0$ ортогонально вектору правой части \mathbf{b} .

Найдем вектор $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$ из системы

$$-\omega z_1 - k_x k_y a_0^2 g z_2 - k_y a_0^2 g z_3 = 0, \quad (72)$$

$$k_x l_0 z_1 + \omega k_y l_0 z_2 - i f_0 l_0 z_3 = 0, \quad (73)$$

$$k_y z_1 + (-ik_y f_0 l_0 - \beta l_0) z_2 + \omega l_0 z_3 = 0. \quad (74)$$

Поскольку уравнения (72)–(74) линейно зависимы, мы можем выразить компоненты вектора \mathbf{z} через уравнения (72) и (73). Тогда получим

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_0^2 g (if_0 - \omega k_y) \\ \frac{if_0 \omega - k_x k_y a_0^2 g}{k_y (\omega^2 - k_x a_0^2 g)} \end{pmatrix} c, \quad (75)$$

где c — произвольная константа.

4.2. Уравнения трехволновых взаимодействий

Представим решение в виде трех волн, удовлетворяющих условию синхронизма (60):

$$\mathbf{u}_1 = \phi \mathbf{a}(\mathbf{k}_1) \exp(i\theta_1) + \psi \mathbf{a}(\mathbf{k}_2) \exp(i\theta_2) + \chi \mathbf{a}(\mathbf{k}_3) \exp(i\theta_3) + \text{c.c.} \quad (76)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(T_1, X_1, Y_1), & \psi &= \psi(T_1, X_1, Y_1), \\ \chi &= \chi(T_1, X_1, Y_1) \end{aligned}$$

— амплитуды взаимодействующих волн, $\theta_i = -\omega(\mathbf{k}_i)T_0 + k_x X_0 + k_y Y_0$ — фазы волн, \mathbf{a} — собственный вектор матрицы A . Так как для волновых взаимодействующих волн выполняется условие синхронизма (60), то $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$.

Подставим (76) в правую часть уравнения (65). Выпишем часть, пропорциональную $\exp(i\theta_1)$:

$$\begin{aligned} \hat{S}\mathbf{u}_1 + \hat{R}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) &= - \left(\begin{array}{c} a_1 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + a_2 l_0 \frac{\partial \phi}{\partial X_1} + a_3 l_0 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \\ ia_2 l_0 k_{y1} \frac{\partial \phi}{\partial T_1} - ia_2 l_0 \omega(\mathbf{k}_1) \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + ia_1 a_0^2 g k_{y1} \frac{\partial \phi}{\partial X_1} - a_3 f_0 l_0 \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} + ia_1 a_0^2 g k_{x1} \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \\ a_3 l_0 \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + a_1 a_0^2 g \frac{\partial \phi}{\partial Y_1} \end{array} \right) - \\ &- \left(\begin{array}{c} 2ia_1 a_2 k_{x1} \psi^* \chi + 2ia_1 a_3 k_{y1} \psi^* \chi \\ 2a_1 a_2 k_{y1} \omega(\mathbf{k}_1) \psi^* \chi - 2l_0 a_2^2 k_{x1} k_{y1} \psi^* \chi - 2l_0 a_2^2 k_{y1}^2 \\ -2ia_1 a_3 \omega(\mathbf{k}_1) \psi^* \chi + 2il_0 a_2 a_3 k_x + 2il_0 a_3^2 k_{y1} \psi^* \chi \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} 0 \\ 4 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 k_{x1} k_{y1} \psi^* \chi - if_0 a_1 a_3 k_{y1} \psi^* \chi - \beta a_1 a_3 \psi^* \chi \\ 2 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 k_{y1} \psi^* \chi + f_0 a_1 a_2 \psi^* \chi \end{array} \right). \quad (77) \end{aligned}$$

Домножим получившееся выражение (77) на вектор-решение \mathbf{z} сопряженной системы и получим уравнение для амплитуды ϕ первой волны

$$s_1 \phi = f_1 \psi^* \chi. \quad (78)$$

Здесь s_1 — линейный дифференциальный оператор по переменным T_1, X_1, Y_1 :

$$s_1 = r_1 \frac{\partial}{\partial T_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + q_1 \frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (79)$$

$$r_1 = a_1 z_1 + ia_2 z_2 l_0 k_{y1} + a_3 l_0 z_3, \quad (80)$$

$$p_1 = a_2 z_1 l_0 + ia_1 z_2 a_0^2 g k_{y1}, \quad (81)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= a_3 z_1 l_0 - ia_2 z_2 l_0 \omega(\mathbf{k}_1) - \\ &- a_3 z_2 f_0 l_0 + ia_1 z_2 a_0^2 g k_{x1}, \quad (82) \end{aligned}$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{k}_1)$ — собственный вектор матрицы A .

Коэффициент f_1 в правой части соотношения (78) зависит от волновых векторов взаимодействующих волн:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_1(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = 2ia_1 a_2 z_1 k_{x1} + 2ia_1 a_3 z_1 k_{y1} + \\ &+ 2a_1 a_2 z_2 k_{y1} \omega(\mathbf{k}_1) - 2l_0 a_2^2 z_2 k_{x1} k_{y1} - 2l_0 a_2^2 z_2 k_{y1}^2 + \\ &+ 4 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 z_2 k_{x1} k_{y1} - if_0 a_1 a_3 z_2 k_{y1} - \beta a_1 a_3 z_2 - \\ &- 2ia_1 a_3 z_3 \omega(\mathbf{k}_1) + 2il_0 a_2 a_3 z_3 k_{x1} + 2il_0 a_3^2 k_{y1} + \\ &+ 2 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 z_3 k_{y1} + f_0 a_1 a_2 z_3. \quad (83) \end{aligned}$$

Аналогично можем получить уравнения для амплитуд ψ и χ , выписав слагаемые, пропорциональные соответственно $\exp(i\theta_2)$ и $\exp(i\theta_3)$:

$$s_2 \psi = f_2 \phi^* \chi, \quad (84)$$

$$s_3 \phi = f_3 \phi \psi, \quad (85)$$

где s_2 и s_3 — дифференциальные операторы, f_2, f_3 — коэффициенты, зависящие только от волновых векторов взаимодействующих волн.

В уравнении (84) оператор s_2 выражается следующим образом:

$$s_2 = r_2 \frac{\partial}{\partial T_1} + p_2 \frac{\partial}{\partial X_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (86)$$

$$r_2 = a_1 z_1 + ia_2 z_2 l_0 k_{y2} + a_3 l_0 z_3, \quad (87)$$

$$p_2 = a_2 z_1 l_0 + ia_1 z_2 a_0^2 g k_{y2}, \quad (88)$$

$$q_2 = a_3 z_1 l_0 - ia_2 z_2 l_0 \omega(\mathbf{k}_2) - a_3 z_2 f_0 l_0 + ia_1 z_2 a_0^2 g k_{x2}, \quad (89)$$

а коэффициент f_2 —

$$\begin{aligned} f_2 = f_2(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= 2ia_1 a_2 z_1 k_{x2} + 2ia_1 a_3 z_1 k_{y2} + \\ &+ 2a_1 a_2 z_2 k_{y2} \omega(\mathbf{k}_2) - 2l_0 a_2^2 z_2 k_{x2} k_{y2} - 2l_0 a_2^2 z_2 k_{y2}^2 + \\ &+ 4 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 z_2 k_{x2} k_{y2} - if_0 a_1 a_3 z_2 k_{y2} - \beta a_1 a_3 z_2 - \\ &- 2ia_1 a_3 z_3 \omega(\mathbf{k}_2) + 2il_0 a_2 a_3 z_3 k_{x2} + 2il_0 a_3^2 k_{y2} + \\ &+ 2 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 z_3 k_{y2} + f_0 a_1 a_2 z_3. \end{aligned} \quad (90)$$

Аналогично для уравнения (85):

$$s_3 = r_3 \frac{\partial}{\partial T_1} + p_3 \frac{\partial}{\partial X_1} + q_3 \frac{\partial}{\partial Y_1}, \quad (91)$$

$$r_3 = a_1 z_1 + ia_2 z_2 l_0 k_{y3} + a_3 l_0 z_3, \quad (92)$$

$$p_3 = a_2 z_1 l_0 + ia_1 z_2 a_0^2 g k_{y3}, \quad (93)$$

$$q_3 = a_3 z_1 l_0 - ia_2 z_2 l_0 \omega(\mathbf{k}_3) - a_3 z_2 f_0 l_0 + ia_1 z_2 a_0^2 g k_{x3}, \quad (94)$$

$$\begin{aligned} f_3 = f_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) &= 2ia_1 a_2 z_1 k_{x3} + 2ia_1 a_3 z_1 k_{y3} + \\ &+ 2a_1 a_2 z_2 k_{y3} \omega(\mathbf{k}_3) - 2l_0 a_2^2 z_2 k_{x3} k_{y3} - 2l_0 a_2^2 z_2 k_{y3}^2 + \\ &+ 4 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 z_2 k_{x3} k_{y3} - if_0 a_1 a_3 z_2 k_{y3} - \beta a_1 a_3 z_2 - \\ &- 2ia_1 a_3 z_3 \omega(\mathbf{k}_3) + 2il_0 a_2 a_3 z_3 k_{x3} + 2il_0 a_3^2 k_{y3} + \\ &+ 2 \frac{a_0^2 g}{L} a_1^2 z_3 k_{y3} + f_0 a_1 a_2 z_3, \end{aligned} \quad (95)$$

Таким образом, получена система уравнений для амплитуд взаимодействующих волн на β -плоскости:

$$s_1 \phi = f_1 \psi^* \chi, \quad (96)$$

$$s_2 \psi = f_2 \phi^* \chi, \quad (97)$$

$$s_3 \chi = f_3 \phi \psi. \quad (98)$$

Система из трех уравнений (96)–(98) для трех неизвестных амплитуд взаимодействующих волн описывает трехволновые взаимодействия волн, удовлетворяющие условию трехволнового синхронизма (60). В уравнениях (96)–(98) операторы s_1, s_2, s_3 определяются соответственно выражениями (79)–(82), (86)–(89), (91)–(94), а коэффициенты f_1, f_2, f_3 — выражениями (83), (90), (95).

Рассмотрим случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн в начальный момент много больше амплитуд двух других, например, $\phi \gg \psi, \chi$. В этом случае можно принять амплитуду первой волны постоянной: $\phi = \phi_0$. При этом можно пренебречь влиянием волн малых амплитуд ψ и χ на волну постоянной амплитуды ϕ_0 . Тогда система (96)–(98) примет вид

$$s_2 \psi = f_2 \phi_0^* \chi, \quad (99)$$

$$s_3 = f_3 \phi_0 \psi. \quad (100)$$

Решение линейной системы (99)–(100) ищем в виде

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi' \\ \chi' \end{pmatrix} \exp(\Gamma_i T_1). \quad (101)$$

Отсюда найдем инкремент неустойчивости

$$\Gamma_i = \sqrt{\frac{|f_2 f_3|}{|r_2 r_3|}} |\phi_0| > 0, \quad (102)$$

где f_2 и f_3 — константы, определенные в (90) и (95).

Таким образом, для волн, полученных в разд. 3, возможны следующие варианты распадных неустойчивостей.

1. Волна Пуанкаре с волновым вектором \mathbf{k}_1 , частотой, удовлетворяющей дисперсионному уравнению (57) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$, амплитудой ϕ распадается на две волны Россби с волновыми векторами $\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$, частотами, удовлетворяющими дисперсионному уравнению (58) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ и амплитудами ψ и χ .

2. Волна Россби с волновым вектором \mathbf{k}_1 , частотой, удовлетворяющей дисперсионному уравнению (58) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$, амплитудой ϕ распадается на волну Пуанкаре с волновым вектором \mathbf{k}_2 , частотой, удовлетворяющей дисперсионному уравнению (57) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2$, амплитудой ψ и волну Россби с волновым вектором \mathbf{k}_3 , частотой, удовлетворяющей дисперсионному уравнению (58) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_3$, амплитудой χ .

3. Волна Россби с волновым вектором \mathbf{k}_1 , частотой, удовлетворяющей дисперсионному уравнению (58) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$, амплитудой ϕ распадается на две

волны Россби с волновыми векторами \mathbf{k}_2 , \mathbf{k}_3 , частотами, удовлетворяющими дисперсионному уравнению (58) при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ и амплитудами ψ и χ .

Напомним, что для всех волн выполняется условие волнового синхронизма (60).

Теперь рассмотрим случай, когда амплитуда одной из взаимодействующих волн много меньше амплитуд двух других, т. е. $\phi \ll \psi, \chi$. Тогда можно считать амплитуды ψ и χ постоянными: $\psi = \psi_0$, $\chi = \chi_0$. Из системы (96)–(98) получим уравнение для амплитуды ϕ :

$$s_1 \phi = f_1 \psi^* \chi_0. \quad (103)$$

Решение уравнения ищем в виде

$$\phi = \phi' \exp(\Gamma_a T_1). \quad (104)$$

Подставив (104) в уравнение (103), получим выражение для коэффициента усиления

$$\Gamma_a = \frac{|f_1|}{|r_1|} |\phi_0^* \chi_0|. \quad (105)$$

Константы f_1 и r_1 определены соответственно в (83) и (80).

Возможны три случая параметрического усиления.

1. Две начальные волны Россби с амплитудами ψ и χ усиливают волну Пуанкаре с амплитудой ϕ .

2. Волна Пуанкаре с амплитудой ψ и волна Россби с амплитудой χ усиливают волну Россби с амплитудой ϕ .

3. Две волны Россби с амплитудами ψ и χ усиливают волну Россби с амплитудой ϕ .

Для исходных волн волновые векторы \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 , для новой волны волновой вектор \mathbf{k}_1 — волновой вектор новой волны. Частоты волн получаются подстановкой их волновых векторов в соответствующие дисперсионные уравнения — (57) для волны Пуанкаре и (58) для волны Россби. Частоты и волновые векторы волн удовлетворяют условию трехволнового синхронизма (60).

В случае несжимаемой жидкости также существуют взаимодействия аналогичных типов волн [22].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получена система дифференциальных уравнений движения вращающейся сжимаемой жидкости в поле силы тяжести со свободной границей в приближении мелкой воды. Полученная система уравнений нетривиально зависит от характерного вертикального масштаба течения и масштаба

высот, на котором изменение плотности становится существенным. В отличие от классических уравнений мелкой воды для несжимаемых течений, высота свободной поверхности не может считаться аналогом массы столба жидкости, и закон сохранения массы записывается для новой переменной, являющейся произведением высоты свободной поверхности на среднюю плотность жидкости. С учетом широкого спектра применимости полученных уравнений в геофизической гидродинамике, в астрофизике и физике планет в работе приведен их подробный вывод, проведен анализ пределов их применимости. Показано, что при малости высоты слоя по сравнению с масштабом сжимаемости полученная система переходит в систему классических уравнений мелкой воды. Вследствие различия выражений для квадрата скорости распространения слабых возмущений нелинейная динамика таких течений отличается от динамики классических уравнений для несжимаемой жидкости в приближении мелкой воды, несмотря на формальную аналогию гиперболической структуры обеих моделей.

В работе получена система уравнений для сжимаемой жидкости в приближении мелкой воды на β -плоскости, в которой учитывается линейная зависимость параметра Кориолиса от широты. Для системы уравнений на f -плоскости получены линейные решения в виде волн Пуанкаре в сжимаемой жидкости. Для системы уравнений на β -плоскости получены два вида волн — волны Пуанкаре в сжимаемой жидкости в коротковолновом пределе и волны Россби в сжимаемой жидкости в длинноволновом пределе. Качественный анализ дисперсионных соотношений показал, что на f -плоскости невозможны трехволновые взаимодействия волн Пуанкаре в сжимаемой жидкости, а на β -плоскости возможны трехволновые взаимодействия для трех волн Россби в сжимаемой жидкости, а также двух волн Россби и одной волны Пуанкаре в сжимаемой жидкости. На β -плоскости асимптотическим методом многомасштабных разложений получены нелинейные уравнения для амплитуд взаимодействующих волн. Для каждого случая трехволновых взаимодействий исследованы параметрические неустойчивости и найдены коэффициенты взаимодействия трех волн в сжимаемой жидкости на β -плоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. M.-L. E. Timmermans, J. R. Lister, and H. E. Huppert, *J. Fluid Mech.* **445**, 305 (2001).

2. C. K. Batchelor and G. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press (2000).
3. A. M. Fridman and N. N. Gorkavyi, *Physics of Planetary Rings: Celestial Mechanics of Continuous Media*, Springer Science and Business Media (2013).
4. J. D. Parsons, *Geophys. Res. Lett.* **27**, 2345 (2000).
5. F. Dobran, A. Neri, and G. Macedonio, *J. Geophys. Res.: Solid Earth* **98**, 4231 (1993).
6. G. A. Valentine and K. H. Wohletz, *J. Geophys. Res.: Solid Earth* **94**, 1867 (1989).
7. C. Ancey, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **142**, 4 (2007).
8. C. Ancey, A. Davison, T. Böhm, M. Jodeau, and P. Frey, *J. Fluid Mech.* **595**, 83 (2008).
9. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, *ЖЭТФ* **141**, 1206 (2012) [*JETP* **114**, 1058 (2012)].
10. К. В. Карельский, А. С. Петросян, А. В. Черняк, *ЖЭТФ* **143**, 779 (2013) [*JETP* **116**, 680 (2013)].
11. C. B. Vreugdenhil, *Numerical Methods for Shallow-Water Flow*, Vol. 13, Springer Science & Business Media (1994).
12. K. Karelsky, A. Petrosyan, and S. Tarasevich, *Phys. Scripta* **2013**, 014024 (2013).
13. A. Chernyak, K. Karelsky, and A. Petrosyan, *Phys. Scripta* **2013**, 014041 (2013).
14. S. Lantz and Y. Fan, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **121**, 247 (1999).
15. R. Klein, *Theor. Comput. Fluid Dynamics* **23**, 161 (2009).
16. D. R. Durran, *J. Atmosph. Sci.* **46**, 1453 (1989).
17. A. E. Gill, *Atmosphere-Ocean Dynamics*, Elsevier (2016), pp. 205–208.
18. G. K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press (2017), pp. 124–126.
19. G. Falkovich, *Fluid Mechanics: a Short Course for Physicists*, Cambridge Univ. Press (2011).
20. O. Pokhotelov, J. McKenzie, P. Shukla, and L. Stenflo, *Phys. Fluids* **7**, 1785 (1995).
21. L. Ostrovsky, *Asymptotic Perturbation Theory of Waves*, Imperial College Press (2015), pp. 18–38.
22. K. Wiklund, *Nonlin. Proc. Geophys.* **5**, 137 (1998).