

ПОИСК ПЕРЕХОДА БАЙКА – БЕН АРУСА – ПЕШЕ ПУТЕМ РАЗМЕРНОЙ РЕДУКЦИИ

А. Ф. Валов^а, А. С. Горский^б, С. К. Нечаев^{с, д*}

^а Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н. Н. Семенова Российской академии наук
119991, Москва, Россия

^б Институт проблем передачи информации Российской академии наук
127051, Москва, Россия

^с Междисциплинарный научный центр им. Ж.-В. Понселе (CNRS IRL 2615)
119002, Москва, Россия

^д Физический институт им. П. Н. Лебедева Российской академии наук
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 21 ноября 2021 г.,
после переработки 21 ноября 2021 г.
Принята к публикации 23 ноября 2021 г.

Рассмотрен микроканонический ансамбль случайных путей фиксированной длины, N , в окрестности полупроницаемой границы диска. При варьировании проницаемости диска для траекторий, η , от слабого режима ($0 < \eta \ll 1$) до сильного ($\eta \rightarrow 1$) наблюдается переход Байка – Бен Арус – Пеше (Baik–Ben Arous–Péché, ВВР), который проявляется в изменении характерных флуктуаций траекторий в направлении, перпендикулярном границе. Типичный размах флуктуаций, Δ , ведет себя как $\Delta(N) \sim N^{1/3}$ для $0 < \eta \ll 1$ и как $\Delta(N) \sim N^{1/2}$ для $\eta \rightarrow 1$. Применен нелинейный метод размерной редукции UMAP, широко используемый для выделения значимых («медленных») переменных при анализе больших массивов данных, и показано, что он позволяет увидеть переход ВВР в рассматриваемой задаче, что проявляется в специфической кластеризации данных на двумерной фазовой плоскости. Аналогичная размерная редукция, осуществленная с помощью линейного метода PCA, оказывается нечувствительной к переходу ВВР.

DOI: 10.31857/S0044451022030129

1. ВВЕДЕНИЕ

Размерные соображения (скейлинг) довольно часто служат инструментом, с помощью которого удобно исследовать статистическое поведение системы. Два скейлинговых закона: Гаусса и Кардара – Паризи – Занга (КПЗ), появляются в огромном разнообразии статистических систем. Стандартное распределение Гаусса с критическим индексом $1/2$ для флуктуаций следует из центральной предельной теоремы для большого числа независимых случайных величин. С другой стороны, критический индекс КПЗ $1/3$ для флуктуаций, определяемых законом Трейси – Видома, характерен для экстремальной статистики большого числа

коррелированных случайных величин. Поведение некоторых наблюдаемых в соответствующих скейлинговых режимах определяется решениями специальных дифференциальных уравнений. Например, решение уравнения Пенлеве II определяет скейлинговую зависимость КПЗ в режиме Трейси – Видома.

Недавно в работе [1] было показано, что переход от гауссова режима к режиму КПЗ является универсальным и может рассматриваться как фазовый переход с соответствующим образом выбранной скейлинговой функцией. В работе [2] было показано, что данная функция вновь определяется решением уравнения Пенлеве II. Позже подобные фазовые переходы были обнаружены в нескольких физических задачах, таких как “last passage percolation” [3], модель ASEP со специальными начальными условиями [4], q -TASEP с наличием медленных частиц [5], перколяция в двумерии [6] и переход спиновое стек-

* E-mail: sergei.nechaev@gmail.com

ло-парамагнетик в приближении среднего поля [7]. В последнем случае переход происходит при некотором критическом значении температуры.

Во всех случаях соответствующие фазовые переходы представляют собой так называемый фазовый переход Байка – Бен Аруса – Пеше (Baik–Ben Arous–Péché, ВВР), который обнаруживает новый класс универсальности перехода от флуктуационного режима КПЗ к гауссову. Физика, лежащая в основе перехода ВВР, во всех доступных примерах достаточно универсальна. На языке полимеров переход ВВР означает, что $(1+1)D$ случайная траектория находится точно на пороге образования связанного состояния с каким-либо дефектом или притягивающей границей.

Взаимодействие траектории и дефекта может быть введено явно или каким-либо эффективным способом. Пример явного взаимодействия приведен в работе [8], где переход ВВР происходит, когда часть траектории полимера локализуется на протяженном дефекте при некотором критическом значении связи между полимером и дефектом. Пример эффективного взаимодействия траектории и протяженного дефекта был рассмотрен в работах [9–12] в связи с задачей Феррари – Шпона [13]. Формулируя задачу в полимерных терминах, можно сказать, что часть полимерной траектории испытывает переход между различными флуктуационными режимами над полукругом. Соответствующая качественная картина была подтверждена в работе [14]. В этой постановке ключевым моментом является рассмотрение микроканонического ансамбля флуктуирующих траекторий фиксированной длины N . Условие $N = cR$ накладывается на траектории, концы которых закреплены в противоположных точках полукруга радиусом R . Варьируя значение c , в микроканоническом ансамбле мы наблюдаем переход ВВР. В данном случае принципиально, что мы рассматриваем траектории фиксированной длины, из-за чего траектории прижимаются к границе диска, а c является управляющим параметром, который эффективно регулирует силу «прилипания» траекторий к полукругу.

Несмотря на то, что критические (скейлинговые) показатели говорят о статистике траекторий, иногда они оказываются слишком грубыми, чтобы характеризовать конкретные детали системы, и требуются какие-то более информативные характеристики коллективного поведения путей. На помощь приходят спектральные методы изучения многообразий. Известно, что изолированные собственные значения матрицы смежности некоторого графа, оторванные

от непрерывной части спектральной плотности, характеризуют кластеры графа [15]. С динамической точки зрения возбуждения (квазичастицы), распространяющиеся по графу, локализируются на этих кластерах. Таким образом, предложив некоторый специальный способ построения графа по ансамблю траекторий, статистику которых мы анализируем, мы ожидаем, что сможем увидеть проявление перехода ВВР в поведении самых медленных мод (наибольших собственных значений) матрицы смежности построенного графа.

Современные задачи работы с большими данными (big data) сталкиваются с серьезными проблемами, связанными с объемом и надежностью исследуемых наборов данных. Кроме того, экспериментальные данные довольно часто содержат избыточную локальную информацию, которая маскирует глобальные свойства системы (данное свойство известно как «проклятие размерности»). В связи с этим актуальной проблемой анализа данных является снижение их размерности и выделение «медленных мод», ответственных за основные особенности поведения системы. В физике сложных систем такими глобальными характеристиками являются параметры порядка, которые, будучи макроскопическими, классифицируют поведение системы в разные моменты времени по наборам микропеременных. С другой стороны, часто при описании коллективных явлений выбор параметров порядка представляет собой сложную задачу, которая может быть решена методами обучения без контроля (nonsupervised learning), как это происходит в задачах упорядочения в стаях птиц и рыб [16] или при изучении возникновения топологической фазы в переходе Березинского – Костерлица – Таулесса [17, 18].

Интенсивное развитие новых нелинейных методов размерной редукции в течение последних 10 лет связано с неспособностью линейных методов описать внутреннюю топологическую структуру (многообразии) большинства современных наборов данных. Среди нелинейных методов наиболее популярными являются SNE (t-SNE) [19, 20], UMAP [21] и их многочисленные обобщения [22–24]. Координаты в низкоразмерном пространстве являются решениями задачи оптимизации для некоторого информационного функционала (типа дивергенции Кульбека – Лейблера для SNE или кросс-энтропии для UMAP).

В данной работе мы предлагаем исследовать переход ВВР в микроканоническом ансамбле путей фиксированной длины, флуктуирующих в окрестности полупроницаемой границы диска, с помощью

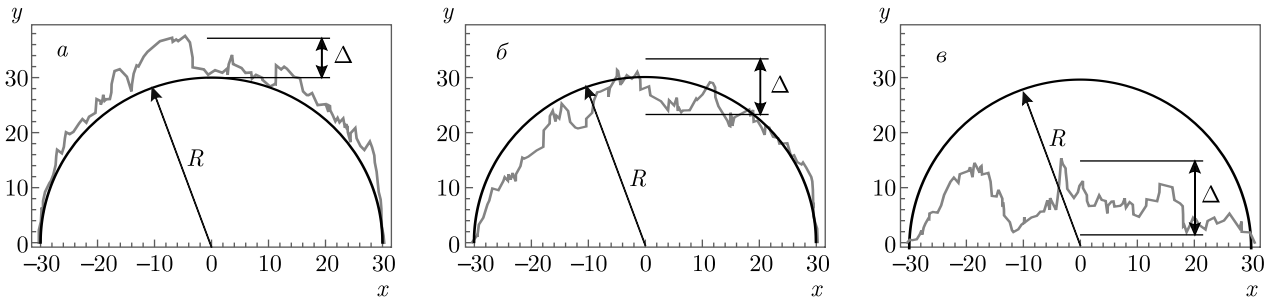


Рис. 1. Пример пути длиной $N = 4R$, который огибает частично непроницаемый полукруг радиусом $R = 30$ для $\eta = 0$ (а), 0.8 (б), 0.98 (в)

метода снижения размерности. Мы модифицируем постановку задачи в модели Феррари–Шпона и рассматриваем микроканонический ансамбль путей с фиксированным параметром c , определенным выше. Мы вводим еще один управляющий параметр, η , который соответствует «проницаемости» диска для траекторий. Подробная постановка задачи описана в следующем разделе. Переход ВВР при уменьшении размерности большого набора данных по блужданиям траекторий проявляется как некоторый спектральный паттерн кластеризации в двумерной фазовой плоскости.

2. МОДЕЛЬ

Рассмотрим микроканонический ансамбль случайных направленных путей фиксированной длины, $N = cR$, с заданными граничными условиями, которые находятся в окрестности диска радиусом R . Пусть $\pi R < N \ll R^2$, параметр c фиксирован, а диск частично проницаем для траекторий. Долю шагов траектории, которые попадают внутрь диска, обозначим через η . Варьируя η от $\eta = 0$ (все пути находятся вне диска) до $\eta = 1$ (все пути находятся внутри диска), мы исследуем зависимость характерного масштаба флуктуаций путей в нашем микроканоническом ансамбле от их взаимодействия с границей диска. С точки зрения траекторий частиц в евклидовом $(1+1)D$ пространстве-времени, параметр η можно рассматривать как отношение масс частицы в двух фазах: внутри и снаружи диска. Соответствующая статистическая сумма микроканонического ансамбля траекторий может быть записана как

$$Z(cR, \eta) = \sum_{\text{paths of length } N} \delta(N - cR) \delta\left(\eta - \frac{N_{in}(\text{path})}{N}\right), \quad (1)$$

где $N_{in}(\text{path})$ — число шагов конкретного пути внутри окружности, N — общее число шагов, которое совпадает с $N = cR$, фиксированной длиной траектории.

Напомним некоторые качественные аргументы, следующие из скейлингового анализа. Случайное блуждание из $N \gg R^2$ шагов свободно флуктуирует вне диска и почти не чувствует ограничений (границы диска). Таким образом, единственная возможная комбинация D (коэффициент диффузии) и N , которая имеет размерность длины, может быть $\Delta \sim (DN)^{1/2}$ для типичного участка траектории. В противоположном режиме, $\pi R < N \ll R^2$, статистика цепи существенно возмущена взаимодействием с границей диска. В пределе сильного растяжения, $N = cR$, соответствующий критический индекс определяется скейлинговой зависимостью: $\Delta \sim (DRN)^\gamma$ с $\gamma = 1/3$, которая в пределе $N \ll R^2$ дает $\Delta \ll R$, а при $N \sim R^2$ переходит в $\Delta \sim R$.

Постановка задачи для численного моделирования выглядит следующим образом: каждая $(1+1)D$ траектория длиной $N = cR$, флуктуирующая вблизи полупроницаемого диска радиусом R , представлена последовательностью точек $\{(x_i, y_i)\}_{i=1, N}$, конечные точки траектории закреплены рядом с противоположными сторонами полукруга, $(-R - \epsilon, 0)$ и $(R + \epsilon, 0)$, где $\epsilon/R \ll 1$. Расстояния между соседними точками траектории распределены по закону Гаусса с единичными средним значением и дисперсией.

Проницаемость полукруга характеризуется параметром $\eta = N_{in}/N$, который определяет отношение числа шагов внутри круга, N_{in} , к общему числу шагов траектории, $N = N_{in} + N_{out}$. Предельный случай $\eta \rightarrow 0$ (т.е. $N_{in} = 0$) соответствует модели Феррари–Шпона, в которой траектории находятся снаружи непроницаемого полукруга, в то время как противоположный предел, $\eta \rightarrow 1$, соответствует траекториям, полностью остающимся внутри полукруга, за исключением конечных точек, ко-

торые по определению фиксированы вне диска. На рис. 1 изображены примеры траекторий для $\eta = 0, 0.8, 0.98$.

Как известно из работы [9], «растянутая» случайная траектория длиной $N = cR$ из микроканонического ансамбля, вынужденная блуждать в окрестности непроницаемой круговой границы, флуктуирует в пределах «полосы» типичного характерного размера $\Delta(R)$ со скейлинговой зависимостью

$$\Delta(R) \sim R^{1/3}. \tag{2}$$

Вопросы, поставленные в данной работе, формулируются следующим образом: 1) как влияет проницаемость η на критический показатель γ в зависимости для флуктуаций $\Delta(R|\eta) \sim R^\gamma$, 2) можно ли увидеть переход (если таковой имеется) не только на уровне критического показателя γ (что является довольно грубой характеристикой перехода), но и непосредственно на уровне ансамбля траекторий.

Для ответа на эти вопросы мы провели моделирование траекторий методом Монте-Карло по алгоритму Метрополиса с «ценой» пребывания внутри диска, η . На начальном этапе моделирования мы генерируем $N = cR$ точек, равномерно распределенных на полукруге радиусом $R + \epsilon$, которые затем смещаются случайным образом, сохраняя 1) гауссово распределение длин связей, 2) упорядочение по x -координате, $x_i > x_{i-1}$ для всех $i \in [1, N]$. На каждом шаге моделирования мы следим за величиной

$$u = \left| \eta - \frac{N_{in}}{N} \right|, \tag{3}$$

где η – заданная проницаемость полукруга, N_{in} – число шагов пути внутри полукруга. Применение алгоритма Метрополиса подразумевает, что, если значение u в (3) не увеличивается при случайном смещении, а все остальные условия для траектории выполняются, то мы принимаем эту конформацию с единичной вероятностью; в обратном случае мы принимаем ее с вероятностью e^{-Nu} . После примерно N^3 шагов моделирования мы уравниваем систему, проверяем, что $u = 0$, и получаем траектории, из которых затем вычисляем типичные флуктуации в радиальном направлении, Δ , над средней точкой полукруга. Здесь и далее мы принимаем $c = 4$ для вытянутых траекторий, которые при $\eta = 0$ локализованы в пределах полосы $\Delta \sim R^{1/3}$ около границы полукруга. При изменении η критическая экспонента γ меняется от $1/3$ до $1/2$, как показано на рис. 2, что является признаком фазового перехода ВВР.

Чтобы выяснить тонкие детали статистического поведения траекторий, которые могут остаться

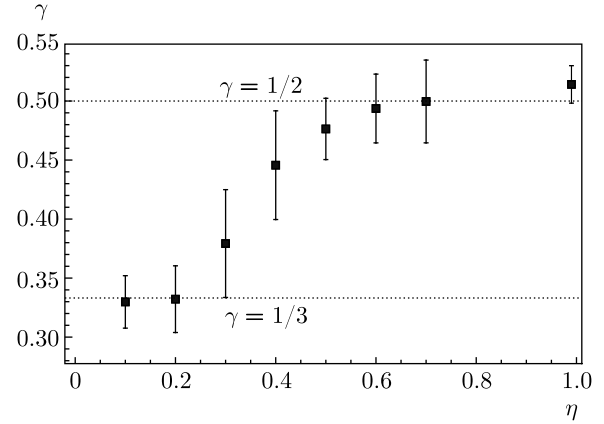


Рис. 2. Зависимость критической экспоненты γ в законе масштабирования $\Delta(R) \sim R^\gamma$ от функции параметра проницаемости, $\eta = N_{in}/N$. При $\eta = 0$ имеем $\gamma = 1/3$ (КПЗ-поведение), при $\eta \rightarrow 1$ имеем $\gamma \rightarrow 1/2$ (гауссово поведение)

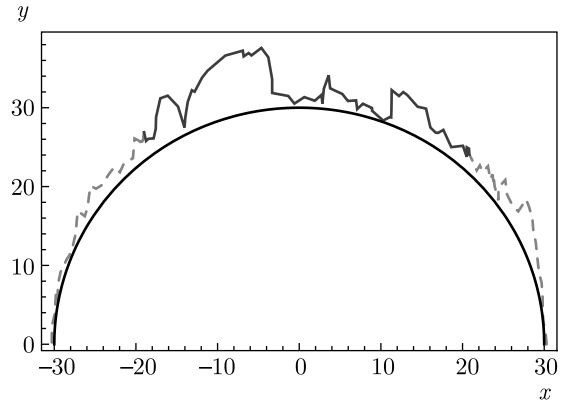


Рис. 3. Пример подготовки траектории для уменьшения размерности. Из траектории длиной $N = 120$, блуждающей около полукруга радиусом $R = 30$, вырезана центральная часть длиной $N' = 60$

вне нашего довольно грубого рассмотрения в терминах критических экспонент, γ , мы изучаем переход ВВР на уровне ансамбля траекторий, используя нелинейные методы снижения размерности. Поскольку в нашей постановке начальная и конечная точки всех траекторий фиксированы, мы имеем дело только с «подвижной» частью траекторий, на которую меньше всего влияют граничные условия. А именно, из конкретной реализации траектории длиной $N = 4R$, $\mathbf{r} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1, N}$, или, эквивалентно, $\mathbf{r} = \{(x_i, y_i)\}_{i=1, 4R}$, мы рассматриваем только ее центральную часть длиной $N' = 2R$, $\mathbf{r}_c = \{(x_i, y_i)\}_{i=[R+1, 3R]}$, как показано на рис. 3.

Удобно переписать $2 \times (2R)$ -компонентный вектор \mathbf{r}' как $1 \times (4R)$ -компонентный вектор:

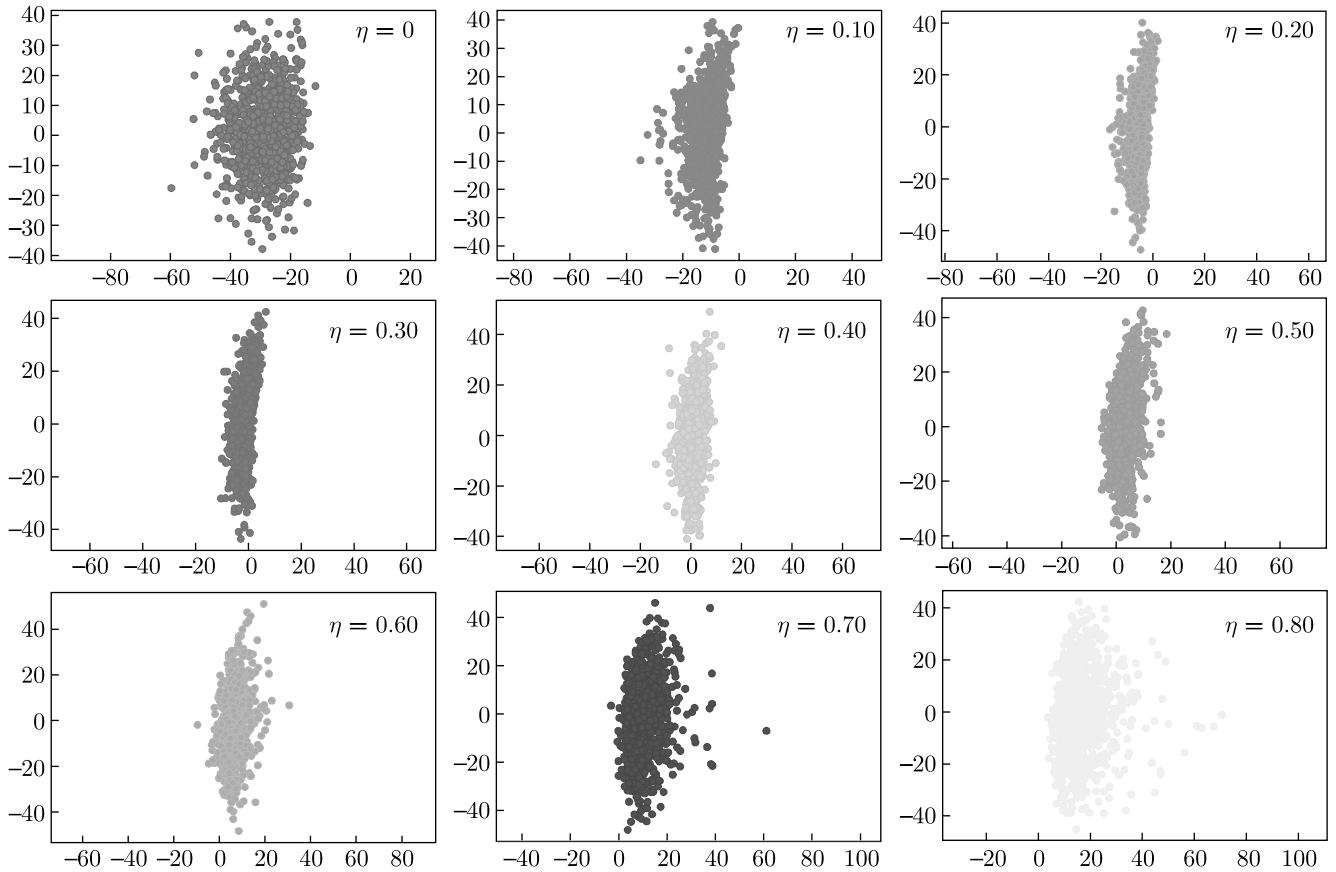


Рис. 4. Встраивание набора данных 120-мерных векторов (4) в двумерное фазовое пространство с помощью метода PCA

$$\mathbf{X} = (x_{R+1}, y_{R+1}, x_{R+2}, y_{R+2}, x_{R+3}, y_{R+3}, \dots, x_{3R}, y_{3R}). \quad (4)$$

В качестве набора данных, в котором осуществляется снижение размерности, мы выбираем ансамбль 120-компонентных векторов \mathbf{X} , уникально кодирующих траектории длиной $N = 120$, которые флуктуируют около диска радиусом $R = 30$ с проникаемостью η . Наш набор данных почти всюду равномерно покрывает интервал $0 \leq \eta < 1$ с набором параметров $\eta = \{0, 0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$, где для каждого значения η генерируется 1000 векторов \mathbf{X} . Подчеркнем, что траектории, соответствующие разным значениям η , смешиваются в одном датасете и затем анализируются все вместе.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы исследовали статистические свойства ансамбля путей, используя два популярных метода уменьшения размерности: анализ главных компонент (PCA) и UMAP (Uniform Manifold

Approximation and Projection) [21]. Мы используем оба этих метода, поскольку один из них (PCA) является линейным, а другой (UMAP) — нелинейным. Результаты размерной редукции, т.е. проекции датасета на двумерное фазовое пространство, показаны на рис. 4 для PCA и на рис. 5 для UMAP.

Оба метода, PCA и UMAP, демонстрируют пространственное разделение пятен, соответствующих траекториям, сгенерированным при различных значениях η . Кроме того, при некоторых η ($\eta \leq 0.25$) метод UMAP выделяет обособленный кластер, содержащий часть траекторий. Такой кластер не виден при уменьшении размерности с помощью PCA. Сравнивая рис. 4 и 5, можно заключить, что PCA, по-видимому, оказывается слишком грубым, чтобы различить траектории, соответствующие фазам с различными критическими показателями γ на рис. 2, как мы видим в переходе ВВР. Напротив, UMAP четко разделяет траектории, соответствующие разным фазам, что делает осмысленным и оправданным применение нелинейных методов снижения размерности для рассматриваемой задачи.

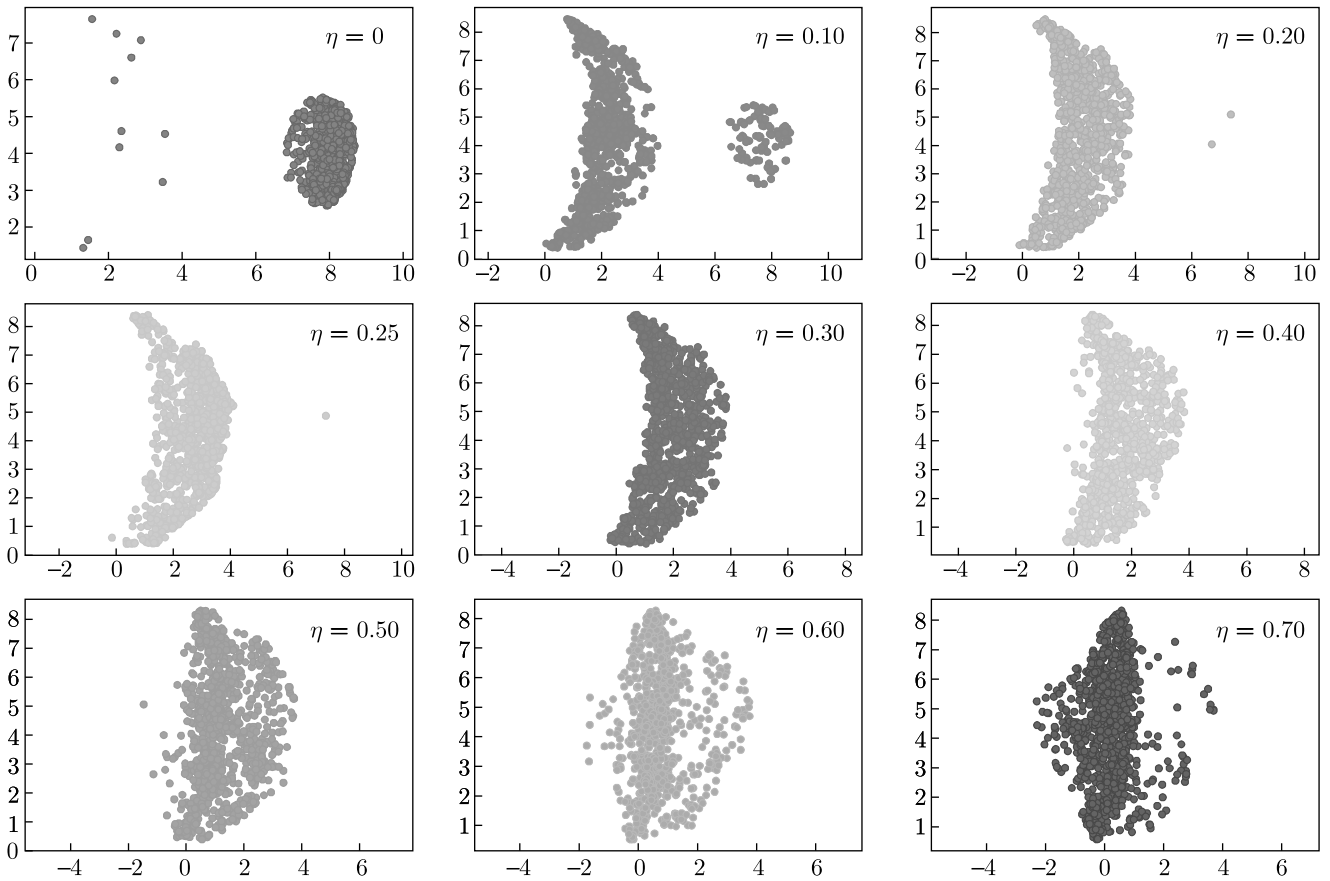


Рис. 5. Встраивание набора данных 120-мерных векторов (4) в двумерное фазовое пространство с помощью метода UMAP

Следует отметить, что используемая в данной работе реализация UMAP является результатом применения алгоритма Laplacian Eigenmaps (LE) в качестве отправной точки для некоторого процесса оптимизации. Известно, что LE дает низкоразмерные вложения, состоящие из низкоэнергетических собственных мод лапласиана графа исходной системы, поэтому финальные вложения, полученные с помощью UMAP, можно рассматривать как тонкое проявление спектральной кластеризации в низкоразмерном пространстве для алгоритма LE.

Исчезновение правого кластера на рис. 5 при изменении параметра η в интервале $\eta \in [0, 0.25]$ имеет очень ясный физический смысл. Каждая точка на рис. 5 обозначает некоторую траекторию: точки из левого кластера соответствуют траекториям с гауссовой статистикой, точки из правого (бокового) кластера кодируют траектории с КПЗ-статистикой. При увеличении η от $\eta = 0$ к $\eta = 1$ количество траекторий со статистикой $1/3$ (КПЗ) уменьшается и одновременно увеличивается количество траек-

торий со статистикой $1/2$ (гауссовой). Такая трансформация проявляется в переходе некоторых точек из правого кластера в левый. Выше $\eta = 0.25$ траекторий со статистикой КПЗ не существует и соответствующий кластер исчезает.

Это поведение находится в качественном согласии с тем, что наблюдается на рис. 2, однако есть некоторое количественное различие: переход ВВР, проанализированный с помощью метода уменьшения размерности на рис. 5, появляется при меньших значениях η , чем переход ВВР, измеренный по зависимости $\gamma(\eta)$ на рис. 2. Это количественное расхождение требует дальнейшего анализа, однако мы полагаем, что оно связано с малой длиной рассматриваемых траекторий: $N = 60$ для размерной редукции и $N = 120$ для скейлинговой зависимости $\gamma(\eta)$.

Мы провели проверку устойчивости полученных результатов. А именно, чтобы проверить, действительно ли каждая точка на рис. 5 обозначает какой-то конкретный путь, мы провели следующий численный эксперимент. После генерации рис. 5 мы взя-

ли некоторый снимок (скажем, при $\eta = 0.1$) и удалили из набора данных все траектории, соответствующие левому (гауссову) кластеру (пятну) при $\eta = 0.1$. Затем мы повторно запустили УМАР на этом измененном наборе данных и снова получили ансамбль двумерных пятен для всех рассматриваемых значений η . Мы обнаружили, что левое (гауссово) пятно при $\eta = 0.1$ отсутствует. Этот эксперимент доказывает однозначное соответствие между каждой точкой на двумерной фазовой плоскости, полученной после нелинейной размерной редукции, и каждой конкретной траекторией при некотором значении проницаемости η .

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В этой работе мы обнаружили переход ВВР в микроканоническом ансамбле траекторий фиксированной длины в окрестности частично проницаемого диска. Переход проявляется в изменении критического показателя γ флуктуаций траекторий в радиальном направлении вблизи границы диска при изменении проницаемости η . Мы показали, что нелинейный метод редукции размерности, тесно связанный со спектральным анализом матрицы связности большого массива данных (так называемый метод УМАР), позволяет идентифицировать переход ВВР через кластеризацию изображений траекторий на двумерной фазовой плоскости.

Наш результат показывает, что нелинейная редукция размерности применима для идентификации фазового перехода в ансамбле протяженных объектов (траекторий), подчиняющихся некоторому ограничению (например, наличию границы диска). В связи с этим возникает вопрос о применении метода УМАР для сходной задачи о полимерах вблизи точечных дефектов, где переходы ВВР были найдены для различных управляющих параметров, см. работы [8, 12]. Было бы также интересно применить наш метод для изучения канонического ансамбля траекторий с фиксированным химическим потенциалом, контролирующим длину пути. Такая постановка аналогична интегралу по путям массивных частиц в евклидовом пространстве-времени. Другая потенциально интересная возможность касается комбинации УМАР с алгоритмом квантового метода Монте-Карло [25], который применим для получения фазовых диаграмм в сильносвязных квантовых системах.

В работах [8, 26] переход ВВР был сформулирован в полимерных терминах как образование

изолированного собственного значения, выходящего из континуума в эффективной матричной модели с большим числом степеней свободы, N . Было бы интересно развить эффективное матричное описание для проблемы, рассматриваемой в настоящей работе, и увидеть аналогичное отсоединение одиночного собственного значения в точке перехода. Образование бокового кластера при редукции размерности в методе УМАР дает намек на возможные подходы к данной задаче.

Благодарности. Мы благодарны организаторам семинара по статистической механике сложных систем в Центре Понселе, на котором обсуждались результаты данной работы.

Финансирование. Работа А. Г. и С. Н. поддержана Российским научным фондом (грант № 21-11-00215).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Baik, G. Ben-Arous, and S. Peche, *Ann. Probab.* **33**, 1643 (2005), arXiv:math/0403022.
2. J. Baik, *Duke Math. J.* **133**, 205 (2006), arXiv:math/0504606.
3. J. Baik, G. Barraquand, I. Corwin, and T. Suidan, *Ann. Probab.* **46**, 3015 (2018).
4. A. Aggarwal and A. Borodin, *Ann. Probab.* **47**, 613 (2019), arXiv:1607.08684; A. Borodin, I. Corwin, and P. Ferrari, *Comm. Pure Appl. Math.* **67**, 1129 (2014).
5. G. Barraquand, *Stochastic Processes and their Applications* **125**, 2674 (2015), arXiv:1404.7409.
6. S. Saber and A. Ali Saberi, arXiv:2109.02348.
7. J. Baik and J. O. Lee, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **56**, 2897 (2020), arXiv:1711.06364.
8. A. Krajenbrink, P. Le Doussal, and N. O'Connell, *Phys. Rev. E* **103**, 042120 (2021), arXiv:2009.11284.
9. S. Nechaev, K. Polovnikov, S. Shlosman, A. Valov, and A. Vladimirov, *Phys. Rev. E* **99**, 012110 (2019).
10. A. Vladimirov, S. Shlosman, and S. Nechaev, *Phys. Rev. E* **102**, 012124 (2020).
11. A. S. Gorsky, S. K. Nechaev, and A. F. Valov, *JHEP* **08**, 123 (2018).
12. A. Gorsky, S. Nechaev, and A. Valov, *Phys. Part. Nuclei* **52**, 185 (2021), arXiv:2005.02382.

13. P. L. Ferrari and H. Spohn, *Ann. Probab.* **33**, 1302 (2005).
14. B. Meerson and N. R. Smith, *J. Phys. A: Math. Theor.* **52**, 415001 (2019).
15. R. R. Nadakuditi and M. E. J. Newman, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 188701 (2012), arXiv:1205.1813; R. R. Nadakuditi and M. E. J. Newman, *Phys. Rev. E* **87**, 012803 (2012), arXiv:1208.1275.
16. M. Titus, G. Hagstrom, and J. R. Watson, *PLoS Comp. Biol.* **17**, e1007811 (2021).
17. J. F. Rodriguez-Nieva, F. Joaquin, and M. S. Scheurer, *Nature Phys.* **15**, 790 (2019).
18. T. Mendes-Santos, X. Turkeshi, M. Dalmonte, and A. Rodriguez, *Phys. Rev. X* **11**, 011040 (2021).
19. G. E. Hinton and S. T. Roweis, in *Advances in Neural Information Processing Systems*, ed. by S. Becker, S. Thrun, and K. Obermayer, MIT Press, Massachusetts (2003), Vol. 15, pp. 857–864.
20. L. D. V. Maaten and G. Hinton, *J. Machine Learning Res.* **9**, 2579 (2008).
21. L. McInnes, J. Healy, and J. Melville, arXiv:1802.03426.
22. T. Sainburg, L. McInnes, and T. Q. Gentner, arXiv:2009.12981.
23. G. C. Linderman, M. Rachh, J. G. Hoskins, S. Steinerberger, and Y. Kluger, *Nature Methods* **16**, 243 (2019).
24. L. Van Der Maaten, *J. Machine Learning Res.* **15**, 3221 (2014).
25. N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov, and I. S. Tupitsyn, *ЖЭТФ* **114**, 570 (1998) [*JETP* **87**, 310 (1998)], <https://doi.org/10.1134/1.558661>.
26. G. Barraquand and P. Le Doussal, *Phys. Rev. E* **104**, 024502 (2021).