

# ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗАРЯЖЕННОГО ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА С ПЛОСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ ОДНОРОДНЫХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

*А. В. Филиппов\**

*ГНЦ РФ Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований  
108840, Троицк, Москва, Россия*

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 18 ноября 2021 г.,  
после переработки 30 ноября 2021 г.  
Принята к публикации 30 ноября 2021 г.

Рассматривается взаимодействие двух заряженных диэлектрических шаров, радиус одного из которых много больше радиуса второго, на малых расстояниях между их поверхностями. Найдены аналитические решения для коэффициентов разложения потенциала для больших мультипольных моментов. Получены точные аналитические выражения для силы взаимодействия в методе разложения потенциала в бисферической системе координат в случае совпадения диэлектрической проницаемости одного из шаров с диэлектрической проницаемостью среды, в которой они находятся. Выполнен переход к случаю бесконечного радиуса шара с диэлектрической проницаемостью, отличной от диэлектрической проницаемости среды. Показано, что эти решения совпадают с известными решениями задач о взаимодействии точечного заряда с диэлектрическим шаром и с плоской заряженной границей диэлектриков. Выполнен переход к бесконечному радиусу одного из шаров в случае, когда диэлектрические проницаемости обоих шаров отличны от диэлектрической проницаемости среды, и найдено аналитическое решение задачи о взаимодействии заряженного диэлектрического шара с плоской заряженной границей однородных диэлектриков.

**DOI:** 10.31857/S0044451022050078  
**EDN:** DSUFFC

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача об электростатическом взаимодействии заряженных диэлектрических частиц сферической формы, несмотря на давнюю историю, которая начинается с Пуассона (см. работы [1, 2]), Кельвина [3] и Максвелла [4], продолжает привлекать внимание исследователей и появляются все новые работы, посвященные решению различных аспектов и развитию методов решения данной задачи (см. работы [5–11] и цитированную в них литературу). В последние годы появился ряд работ [7, 11–13], в которых изучается взаимодействие заряженных диэлектрических шаров на малых расстояниях между их поверхностями в случае, когда радиус одного из них много больше радиуса второго, включая предель-

ный случай плоской границы между однородными диэлектриками.

Точное описание взаимодействия двух заряженных диэлектрических шаров с сильно различающимися радиусами является актуальной задачей в связи с тем, что такая задача возникает при описании процесса взаимодействия наночастиц со стенкой в технологиях производства наночастиц с уникальными свойствами [14, 15] и в технологии нанесения нанослоев [16], при калибровке атомных силовых микроскопов и при точном выделении ван-дер-ваальсова взаимодействия на малых расстояниях [17–21], при изучении адгезии заряженных частиц тонера к пластине [22], при моделировании процесса удаления мелких пылевых частиц из воздуха [23] и т. д. Эта задача может быть решена с использованием бисферической системы координат, в которой система уравнений для коэффициентов разложения потенциала по мультипольным моментам имеет блочно-диагональный вид и ее численное решение

\* E-mail: fav@triniti.ru

может быть найдено методом матричной прогонки. При этом в случае сильно различающихся радиусов частиц возникает проблема задания значений коэффициентов разложения при больших номерах мультипольного момента, которая вызвана медленным убыванием выражений вида  $\exp\{-(2\ell + 1)\xi_1\}$  (более подробно см. в работе [5]). Здесь  $\ell$  — номер мультипольного момента,  $\xi_1$  — координата поверхности шара большого радиуса в бисферической системе координат, которая является малой величиной при малых расстояниях между поверхностями макрочастиц  $L$ . Например, при радиусе малого шара  $a_2 = 100$  нм, радиусе большого шара  $a_1 = 10^4 a_2$  и  $L = 0.1$  нм имеем  $\xi_1 = 4.473 \cdot 10^{-6}$ , а координата поверхности малого шара равна  $\xi_2 = 4.473 \cdot 10^{-2}$ . Именно на расстояниях  $L = 0.1-1$  нм силы электростатического и ван-дер-ваальсова взаимодействия оказываются сравнимыми друг с другом [18], поэтому эти расстояния и вызывают повышенный интерес.

Настоящая работа посвящена решению задачи о взаимодействии двух заряженных диэлектрических шаров на малых расстояниях между их поверхностями в случае, когда радиус одного из них много больше радиуса второго, включая предельный случай плоской границы между однородными диэлектриками. Для решения задачи используется метод разложения потенциала по полиномам Лежандра (по мультипольным моментам) в бисферической системе координат. Этим же методом данная задача решалась в работах [7, 11], а в работах [12, 13] решалась с использованием разложения в сферической системе координат. В последних работах отмечается трудность решения данной задачи методом разложения в сферической системе координат. Нужно отметить, что во всех этих работах взаимодействие заряженного шара с плоской границей между однородными диэлектриками рассматривалось как взаимодействие заряженного шара с другим шаром заметно большего радиуса (например, в работе [12] радиус большого шара был в 64 раза больше радиуса малого). Трудность решения рассматриваемой задачи связана с тем, что при использовании метода разложения в сферической системе координат для коэффициентов разложения потенциала получается система уравнений с квадратной матрицей, порядок которой для достижения требуемой точности при уменьшении межчастичного расстояния быстро растет, а коэффициенты разложения все медленнее убывают с увеличением номера. При использовании метода разложения в бисферической системе координат система уравнений для коэффициентов разложения потенциала, как уже отмечалось выше,

становится блочно-диагональной, которая при сравнимых размерах шаров успешно решается, например, методом матричной прогонки [5]. Но при сильно различающихся размерах и здесь, как будет показано ниже, возникают проблемы, которые остались незамеченными в работах [7, 11].

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ШАРОВ С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ РАДИУСАМИ

### 2.1. Взаимодействие точечного заряда с диэлектрическим заряженным шаром и плоской границей диэлектриков

Сначала приведем хорошо известные решения задачи о взаимодействии точечного заряда с диэлектрическим заряженным шаром и плоской границей диэлектриков (см. [24, 25]), которые в настоящей работе будут использованы для проверки получаемых результатов. Сила взаимодействия точечного заряда с диэлектрическим заряженным шаром, которая может быть найдена методом разложения по мультипольным моментам с использованием сферических координат или методом изображений (см. [24, 25]), описывается выражением (в настоящей работе приводится сила, действующая на первую частицу, которая положительна в случае отталкивания и отрицательна в случае притяжения; в случае отсутствия внешнего электрического поля эта сила равна по абсолютной величине силе, действующей на вторую частицу)

$$F_{ps} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} - \frac{q_2^2}{\varepsilon R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon_1 n + \varepsilon(n+1)} \left(\frac{a_1}{R}\right)^{2n+1}, \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, q_1, q_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  — соответственно радиусы, заряды и диэлектрические проницаемости частиц,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $R$  — расстояние между центрами частиц. При больших  $a_1$  и, соответственно,  $R$  их отношение стремится к единице:  $a_1/R \rightarrow 1$ , и ряд (1) медленно сходится. Поэтому преобразуем сумму в выражении (1), выделив в коэффициенте перед  $(a_1/R)^{2n+1}$  постоянную и линейную по  $n$  составляющие. Выделенные члены (члены со знаком минус в определении  $f_n$  ниже) просто суммируются (как геометрическая прогрессия и ее производная) и в итоге получим

$$F_{ps} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R^2} - \frac{q_2^2}{\varepsilon} \left(\frac{a_1}{R}\right)^3 \frac{1}{R^2 - a_1^2} \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \times \left[ \frac{R^2}{R^2 - a_1^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \right] - \delta f_{ps}, \quad (2)$$

где поправка  $\delta f_{ps}$  определена выражением

$$\delta f_{ps} = \frac{q_2^2}{\varepsilon R^2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \left(\frac{a_1}{R}\right)^{2n+1}, \quad (3)$$

$$f_n = \frac{n(n+1)(\varepsilon_1 - \varepsilon)}{\varepsilon_1 n + \varepsilon(n+1)} - \frac{1}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \left[ (\varepsilon_1 - \varepsilon)n + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon} \right].$$

Когда  $a_1 \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow \infty$ ,  $a_1/R \rightarrow 1$ , но при этом остается конечной величина  $R - a_1 = L + a_2$  (в наших обозначениях), поправка  $\delta f_{ps}$  обращается в нуль. Также исчезающе малым по сравнению с первым становится второй член в квадратных скобках в выражении (2) (как  $2L/a_1$ ) и для силы взаимодействия точечного заряда с заряженной плоской границей диэлектриков получается выражение (см. [24], задача 144)

$$F_{pp} = \frac{4\pi\sigma_1 q_2}{\varepsilon} - \frac{q_2^2}{4\varepsilon(L + a_2)^2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon}, \quad (4)$$

где  $\sigma_1$  — плотность поверхностного свободного заряда. Прделанный переход к случаю  $a_1 \rightarrow \infty$  показывает сложность этого перехода в общем случае, когда аналитическое выражение для вычисления силы отсутствует, а члены ряда (1) с ростом номера растут пропорционально номеру и при строгом равенстве  $a_1/R = 1$  этот ряд вообще расходится.

### 2.2. Решение методом разложения в бисферической системе координат

Переход к пределу  $a_1 \rightarrow \infty$  при конечных  $L = R - a_1 - a_2$  и  $\sigma_1 = q_1/(4\pi a_1^2)$  в сферической системе координат затруднен (см., например, [12, 13]), поэтому рассмотрим задачу с использованием бисферической системы координат [5]. Здесь не будем приводить общее решение задачи, которое представлено, например, в работе [5], а запишем окончательные уравнения для определения коэффициентов мультипольного разложения потенциала по полиномам Лежандра.

Геометрия рассматриваемой задачи приведена на рис. 1. Две сферические частицы с радиусами  $a_1$ ,  $a_2$ , зарядами  $q_1$ ,  $q_2$  и диэлектрическими постоянными  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  помещены в однородный диэлектрик проницаемостью  $\varepsilon$  и в однородное до введения частиц внешнее электрическое поле  $E_0$ . Введем декартову

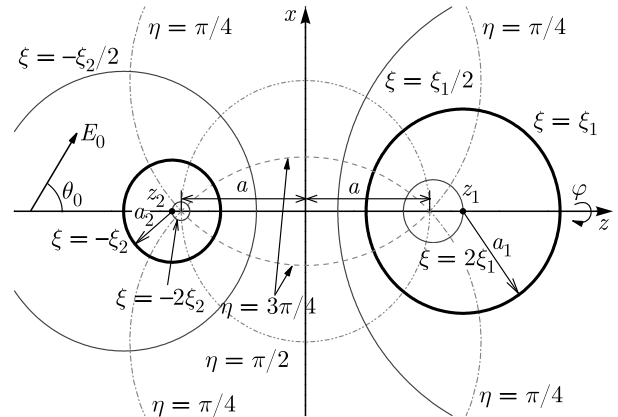


Рис. 1. Геометрия взаимодействия двух макрочастиц радиусами  $a_1$  и  $a_2$  в бисферической системе координат  $(\xi, \eta, \varphi)$

систему координат так, чтобы вектор напряженности внешнего поля лежал в плоскости  $xz$ , а ось  $z$  была направлена вдоль линии, соединяющей центры частиц (см. рис. 1).

Далее введем бисферические координаты (см. [24, 26] и рис. 1):

$$x = \frac{a \sin \eta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \sin \eta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}, \quad (5)$$

$$z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}.$$

В бисферических координатах поверхности макрочастиц определяются соотношениями  $\xi = \xi_1$ ,  $\xi = -\xi_2$ , где

$$\operatorname{ch} \xi_1 = \frac{R^2 + a_1^2 - a_2^2}{2Ra_1}, \quad \operatorname{ch} \xi_2 = \frac{R^2 + a_2^2 - a_1^2}{2Ra_2}, \quad (6)$$

$R$  — расстояние между центрами макрочастиц,  $a$  — параметр, определенный выражением  $a = a_1 \operatorname{sh} \xi_1 = a_2 \operatorname{sh} \xi_2$ .

Электростатическое взаимодействие частиц в однородном диэлектрике определяется уравнением Лапласа  $\Delta\phi = 0$ , которое в бисферических координатах может быть решено методом разделения переменных введением новой величины

$$\phi(\xi, \eta, \varphi) = \psi(\xi, \eta, \varphi) \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta}. \quad (7)$$

Здесь  $\phi$  — потенциал электростатического поля.

Рассматриваем аксиально-симметричную задачу. В этом случае решение для потенциала в однородной диэлектрической среде (вакууме) в области вне частиц определяется выражением [24]

$$\phi(\xi, \eta) = \sqrt{\operatorname{ch} \xi - \cos \eta} \times \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ C_{\ell} e^{-(\ell+1/2)\xi} + D_{\ell} e^{(\ell+1/2)\xi} \right] P_{\ell}(\cos \eta), \quad (8)$$

$C_\ell, D_\ell$  — искомые коэффициенты разложения,  $P_\ell$  — полиномы Лежандра.

Из граничных условий непрерывности потенциала и разрыва нормальных составляющих вектора электрической индукции для нахождения коэффициентов разложения (8) при однородном распределении свободных зарядов по поверхностям частиц для аксиально-симметричной задачи получим уравнения [5]

$$A_\ell \mathbf{y}_{\ell-1} + C_\ell \mathbf{y}_\ell + B_\ell \mathbf{y}_{\ell+1} = \mathbf{F}_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots, \infty, \quad (9)$$

где вектор неизвестных  $\mathbf{y}_\ell = (C_\ell, D_\ell)^T$ , а матрицы  $A_\ell, B_\ell, C_\ell$  и столбец  $\mathbf{F}_\ell$  определены соотношениями

$$A_\ell = -\ell \times \begin{pmatrix} \tau_1 e^{-(\ell-1/2)\xi_1} & e^{(\ell-1/2)\xi_1} \\ e^{(\ell-1/2)\xi_2} & \tau_2 e^{-(\ell-1/2)\xi_2} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (C_\ell)_{11} &= \tau_1 [-\text{sh } \xi_1 + (2\ell + 1) \text{ch } \xi_1] e^{-(\ell+1/2)\xi_1}, \\ (C_\ell)_{12} &= [-\tau_1 \text{sh } \xi_1 + (2\ell + 1) \text{ch } \xi_1] e^{(\ell+1/2)\xi_1}, \\ (C_\ell)_{21} &= [-\tau_2 \text{sh } \xi_2 + (2\ell + 1) \text{ch } \xi_2] e^{(\ell+1/2)\xi_2}, \\ (C_\ell)_{22} &= \tau_2 [-\text{sh } \xi_2 + (2\ell + 1) \text{ch } \xi_2] e^{-(\ell+1/2)\xi_2}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} B_\ell &= \\ &= -(\ell+1) \times \begin{pmatrix} \tau_1 e^{-(\ell+3/2)\xi_1} & e^{(\ell+3/2)\xi_1} \\ e^{(\ell+3/2)\xi_2} & \tau_2 e^{-(\ell+3/2)\xi_2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_\ell)_1 &= 2\sqrt{2}a \left\{ \frac{4\pi\sigma_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} - \right. \\ &\left. - \tau_1 E_0 [\text{ch } \xi_1 - (2\ell + 1) \text{sh } \xi_1] \right\} e^{-(\ell+1/2)\xi_1}, \\ (\mathbf{F}_\ell)_2 &= 2\sqrt{2}a \left\{ \frac{4\pi\sigma_2}{\varepsilon + \varepsilon_2} + \right. \\ &\left. + \tau_2 E_0 [\text{ch } \xi_2 - (2\ell + 1) \text{sh } \xi_2] \right\} e^{-(\ell+1/2)\xi_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2$  — плотности свободных зарядов на поверхностях частиц;  $\sigma_i = q_i/4\pi a_i^2, i = 1, 2$ ; величины  $\tau_1$  и  $\tau_2$  определены соотношениями

$$\tau_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 + \varepsilon}, \quad \tau_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{\varepsilon_2 + \varepsilon}. \quad (14)$$

Далее для упрощения выкладок рассмотрим случай без внешнего электрического поля, учет которого не сильно изменит следующие ниже выкладки. В этом случае система уравнений (9) принимает вид ( $\ell = 0, 1, \dots, \infty$ )

$$\begin{aligned} -\ell e^{-\xi_1} D_{\ell-1} + [-\tau_1 \text{sh } \xi_1 + (2\ell + 1) \text{ch } \xi_1] D_\ell - \\ - (\ell + 1) e^{\xi_1} D_{\ell+1} = \frac{2\sqrt{2} \text{sh } \xi_1}{\varepsilon + \varepsilon_1} \frac{q_1}{a_1} e^{-(2\ell+1)\xi_1} + \\ + \tau_1 \{ \ell e^{\xi_1} C_{\ell-1} + [\text{sh } \xi_1 - (2\ell + 1) \text{ch } \xi_1] C_\ell + \\ + (\ell + 1) e^{-\xi_1} C_{\ell+1} \} e^{-(2\ell+1)\xi_1}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} -\ell e^{-\xi_2} C_{\ell-1} + [-\tau_2 \text{sh } \xi_2 + (2\ell + 1) \text{ch } \xi_2] C_\ell - \\ - (\ell + 1) e^{\xi_2} C_{\ell+1} = \frac{2\sqrt{2} \text{sh } \xi_2}{\varepsilon + \varepsilon_2} \frac{q_2}{a_2} e^{-(2\ell+1)\xi_2} + \\ + \tau_2 \{ \ell e^{\xi_2} D_{\ell-1} + [\text{sh } \xi_2 - (2\ell + 1) \text{ch } \xi_2] D_\ell + \\ + (\ell + 1) e^{-\xi_2} D_{\ell+1} \} e^{-(2\ell+1)\xi_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражение для силы в случае аксиально-симметричной задачи имеет вид [5]

$$F_{1z} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} D_\ell [(2\ell + 1) C_\ell - \ell C_{\ell-1} - (\ell + 1) C_{\ell+1}]. \quad (17)$$

Обратим внимание, что внешнее поле явно не входит в выражение для определения силы, входит только через коэффициенты разложения потенциала.

Далее рассмотрим сначала простые случаи.

### 2.2.1. Случай $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$

В этом случае  $\tau_1 = \tau_2 = 0$  и из (15), (16) вытекают уравнения

$$\begin{aligned} -\ell e^{-\xi_1} D_{\ell-1} + (2\ell + 1) \text{ch } \xi_1 D_\ell - (\ell + 1) e^{\xi_1} D_{\ell+1} = \\ = \frac{4\pi\sqrt{2}a_1\sigma_1}{\varepsilon} \text{sh } \xi_1 e^{-(2\ell+1)\xi_1}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} -\ell e^{-\xi_2} C_{\ell-1} + (2\ell + 1) \text{ch } \xi_2 C_\ell - (\ell + 1) e^{\xi_2} C_{\ell+1} = \\ = \frac{4\pi\sqrt{2}a_2\sigma_2}{\varepsilon} \text{sh } \xi_2 e^{-(2\ell+1)\xi_2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение уравнений (18) и (19) имеет вид

$$\begin{aligned} C_\ell &= \frac{4\pi\sqrt{2}a_2\sigma_2}{\varepsilon} e^{-(2\ell+1)\xi_2}, \\ D_\ell &= \frac{4\pi\sqrt{2}a_1\sigma_1}{\varepsilon} e^{-(2\ell+1)\xi_1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Суммы, входящие в выражение для силы (17) с коэффициентами (20), легко находятся и для силы взаимодействия имеем

$$F_{1z} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q_1 q_2}{a_1 a_2} \frac{\text{sh } \xi_1 \text{sh } \xi_2}{\text{sh}^2(\xi_1 + \xi_2)}. \quad (21)$$

Используя следующие соотношения, связывающие бисферические координаты с радиусами частиц и расстояниями между их центрами (см. [27, 28]):

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \xi_1 &= \frac{z_1}{a_1}, & \operatorname{ch} \xi_2 &= \frac{z_2}{a_2}, & \operatorname{sh} \xi_1 &= \frac{a}{a_1}, \\ \operatorname{sh} \xi_2 &= \frac{a}{a_2}, \\ \operatorname{sh}(\xi_1 + \xi_2) &= \frac{R}{a_2} \operatorname{sh} \xi_1 = \frac{R}{a_1} \operatorname{sh} \xi_2, \\ z_1 + z_2 &= R, \end{aligned} \quad (22)$$

из (21) легко получается закон Кулона:

$$F_C = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon R}. \quad (23)$$

### 2.2.2. Случай $\varepsilon_2 = \varepsilon$

В этом случае только  $\tau_2 = 0$  и из уравнения (16) для  $C_\ell$  получаем уравнение (19), решением которого является первое выражение (20). Подставим это решение в уравнение (15) и для  $D_\ell$  получим уравнение

$$\begin{aligned} -\ell e^{-\xi_1} D_{\ell-1} + [-\tau_1 \operatorname{sh} \xi_1 + (2\ell + 1) \operatorname{ch} \xi_1] D_\ell - \\ - (\ell + 1) e^{\xi_1} D_{\ell+1} &= \frac{2\sqrt{2}q_1}{a_1(\varepsilon + \varepsilon_1)} \operatorname{sh} \xi_1 e^{-(2\ell+1)\xi_1} - \\ - \frac{2\sqrt{2}q_2}{a_2(\varepsilon + \varepsilon_2)} \tau_1 e^{-(2\ell+1)(\xi_1 + \xi_2)} [\ell e^{\xi_1 + 2\xi_2} + \\ + \operatorname{sh} \xi_1 - (2\ell + 1) \operatorname{ch} \xi_1 - (\ell + 1) e^{-(\xi_1 + 2\xi_2)}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Это уравнение при достаточно больших  $\ell > \ell_{min}$  приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \ell e^{-\xi_1} D_{\ell-1} + [-\tau_1 \operatorname{sh} \xi_1 + (2\ell + 1) \operatorname{ch} \xi_1] D_\ell - \\ - (\ell + 1) e^{\xi_1} D_{\ell+1} &= \frac{2\sqrt{2}q_1}{a_1(\varepsilon + \varepsilon_1)} \operatorname{sh} \xi_1 e^{-(2\ell+1)\xi_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Значение  $\ell_{min}$  определяет точность вычисления силы взаимодействия. В настоящей работе значение  $\ell_{min}$  определялось из выражения

$$\ell_{min} \approx -\frac{1}{2} \frac{\ln \delta}{\xi_1 + \xi_2}. \quad (26)$$

В расчетах задавалось  $\delta = 10^{-31}$ , следовательно, отбрасываемые члены в выражении (24) будут величинами именно такого порядка или меньше. При этом точность вычисления силы будет не такой высокой, но число учитываемых членов разложения потенциала в расчетах будет достаточной, чтобы при суммировании ряда для определения силы получить хорошую точность до 11–13 знаков. Конечно, такая высокая точность обычно не требуется, но для сравнения точности вычисления силы разными методами и в различных приближениях она бывает необходима.

Решение уравнения (25) будем искать в виде  $D_\ell = \alpha \exp\{-(2\ell + 1)\xi_1\}$ , где  $\alpha$  — независимая от  $\ell$  величина. В итоге получаем решение, совпадающее со вторым выражением (20). Соответственно, в случае  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  на больших расстояниях сила определяется выражением (21), что говорит о выходе силы на больших расстояниях на кулоновскую асимптотику.

### 2.2.3. Общий случай $\varepsilon_2 \neq \varepsilon$ , $\varepsilon_1 \neq \varepsilon$

Из решения (20) видно, что множителями при  $\tau_1$  и  $\tau_2$  в конце уравнений (15) и (16) при сравнимых радиусах частиц и, соответственно, сравнимых  $\xi_1$  и  $\xi_2$  при достаточно больших  $\ell > \ell_{min}$  можно пренебречь, поскольку они убывают как  $\exp\{-(2\ell + 1)(\xi_1 + \xi_2)\}$  и решение при больших  $\ell > \ell_{min}$  будет тем же самым. В работе [5] система уравнений (15), (16) решалась методом матричной прогонки с использованием нулевых значений коэффициентов  $C_\ell$  и  $D_\ell$  в качестве граничных значений при  $\ell = \ell_{min}$ , что, как видно из (20), оправдано при сравнимых радиусах частиц. Отметим, что нулевые граничные значения можно использовать при достаточно больших  $\ell \gtrsim \ell_{max}$ , где число  $\ell_{max}$  определено соотношением

$$\ell_{max} \approx -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{\delta}{\xi_{min}} \right), \quad \xi_{min} = \min\{\xi_1, \xi_2\}. \quad (27)$$

Для упомянутых выше радиусов малого шара  $a_2 = 100$  нм и большого  $a_1 = 10^4 a_2$  при  $L = 0.1$  нм и  $\delta = 10^{-31}$  из (27) находим, что  $\ell_{max} \approx 7.98 \cdot 10^6$ , в то время как (26) дает на четыре порядка меньшее число:  $\ell_{min} \approx 798$ .

В настоящей работе решение системы уравнений для коэффициентов разложения методом матричной прогонки проводилось со значениями коэффициентов  $C_\ell$  и  $D_\ell$  при  $\ell = \ell_{min}$ , задаваемых выражениями (20). В случае сильно различающихся радиусов частиц при малых расстояниях между поверхностями частиц, как уже отмечалось во Введении, координата поверхности большей частицы оказывается малой величиной и коэффициенты разложения, «связанные» с ней, медленно убывают. Поэтому задание нулевого граничного значения при  $\ell = \ell_{min}$  для него приводит к значительной ошибке в определении силы, а при задании граничного значения  $D_\ell$  при  $\ell = \ell_{max}$  блочно-диагональная система становится чрезвычайно большой и появляются сложности при ее точном решении.

### 2.3. Переход к пределу $a_1 \rightarrow \infty$

Из определения координат поверхностей частиц в бисферической системе координат (6) следует, что

$$\lim_{a_1 \rightarrow \infty} \xi_1 = 0, \quad \lim_{a_1 \rightarrow \infty} \operatorname{ch} \xi_2 = 1 + \frac{L}{a_2}. \quad (28)$$

При этом произведение  $a_1 \operatorname{sh} \xi_1 = a_2 \operatorname{sh} \xi_2 \equiv a$  остается конечной величиной, что учитывается в выкладках ниже.

При выполнении условия  $\ell > \ell_{min}$  решением уравнений (15) и (16) будет (20). Из первого выражения (20) в пределе  $a_1 \rightarrow \infty$  для  $D_\ell$  можно получить

$$D_\ell^0 = \lim_{a_1 \rightarrow \infty} D_\ell = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\varepsilon} \sigma_1 [a_1 - (2\ell + 1)a]. \quad (29)$$

Поэтому введем новые коэффициенты

$$d_\ell = D_\ell - D_\ell^0, \quad (30)$$

подставим в уравнение (15) и после несложных преобразований в пределе  $a_1 \rightarrow \infty$  найдем, что

$$\begin{aligned} -\ell d_{\ell-1} + (2\ell + 1)d_\ell - (\ell + 1)d_{\ell+1} = \\ = \tau_1 [\ell C_{\ell-1} - (2\ell + 1)C_\ell + (\ell + 1)C_{\ell+1}]. \end{aligned} \quad (31)$$

Из (31) следует, что коэффициенты  $\tau_1 C_\ell$  и  $d_\ell$  различаются только на постоянную (не зависящую от  $\ell$ ) величину, которая из вида решений (20) при  $\ell > \ell_{min}$  должна быть положена равной нулю, поэтому имеем равенство

$$d_\ell = -\tau_1 C_\ell. \quad (32)$$

Подставим  $D_\ell$  из (30) с решением (32) в уравнение (16):

$$\begin{aligned} -\ell e^{-\xi_2} (1 - \beta_{\ell-1}) C_{\ell-1} + \{(1 - \tau_2) \operatorname{sh} \xi_2 + \\ + (1 - \beta_\ell) [(2\ell + 1) \operatorname{ch} \xi_2 - \operatorname{sh} \xi_2]\} C_\ell - \\ - (\ell + 1) e^{\xi_2} (1 - \beta_{\ell+1}) C_{\ell+1} = \\ = e^{-(2\ell+1)\xi_2} \{ \alpha_1 \operatorname{sh} \xi_2 + 2\alpha_2 \tau_2 \operatorname{sh} \xi_2 \times \\ \times [(2\ell + 1) \operatorname{sh} \xi_2 - \operatorname{ch} \xi_2] \}, \end{aligned} \quad (33)$$

здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \beta_\ell = \tau_1 \tau_2 e^{-(2\ell+1)\xi_2}, \quad \alpha_1 = \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon + \varepsilon_2} \frac{q_2}{a_2}, \\ \alpha_2 = \frac{4\pi\sqrt{2}}{\varepsilon} a_2 \sigma_1. \end{aligned}$$

Мы получили для нахождения коэффициентов систему с трехдиагональной матрицей, которая может быть успешно решена методом простой прогонки.

Найдем решение уравнения (32) для больших  $\ell$ , когда становятся пренебрежимо малыми  $\beta_\ell$  и ими можно пренебречь. Решение будем искать в виде

$$C_\ell = (\alpha + \beta \ell) e^{-(2\ell+1)\xi_2},$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — независимые от  $\ell$  величины. В итоге находим следующее решение уравнения (32):

$$C_\ell = \left\{ \frac{\sqrt{2}q_2}{\varepsilon a_2} + \alpha_2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_2} [(2\ell + 1) \operatorname{sh} \xi_2 - \operatorname{ch} \xi_2] \right\} \times e^{-(2\ell+1)\xi_2}. \quad (34)$$

Появление дополнительного члена в выражении (34) по сравнению с (20) связано с тем, что при  $a_1 \gg \gg a_2$  величина  $\exp\{-2(\ell+1)\xi_1\}$  практически не убывает (в пределе  $a_1 \rightarrow \infty$ , который мы здесь рассматриваем, она равна единице).

Отметим, что в рассматриваемом случае сила через коэффициенты  $d_\ell$  определяется выражением

$$F_{z\infty} = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell [-\ell d_{\ell-1} + (2\ell + 1)d_\ell - (\ell + 1)d_{\ell+1} + \alpha_2 \operatorname{sh} \xi_2]. \quad (35)$$

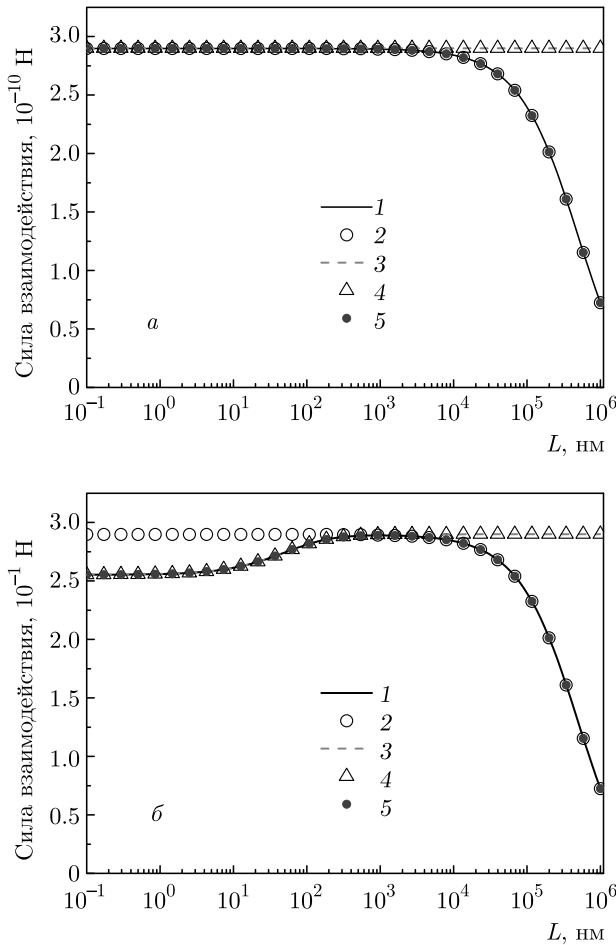
Используя приближенное решение (34), из (35) находим

$$F_{z\infty}^a = \frac{4\pi\sigma_1 q_2}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon a_2^2 \operatorname{ch}^2 \xi_2} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_1} \left[ \frac{q_2^2}{4} - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_2} \frac{2\pi q_2 \sigma_1 a_2^2}{\operatorname{ch} \xi_2} + \left( \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_2} \right)^2 \frac{6\pi^2 \sigma_1^2 a_2^4}{\operatorname{ch}^2 \xi_2} \right]. \quad (36)$$

Подставив вместо  $\operatorname{ch} \xi_2$  его значение (28), из (36) легко получим выражение

$$F_{z\infty}^a = \frac{4\pi\sigma_1 q_2}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_1} \frac{1}{(L + a_2)^2} \frac{q_2^2}{4\varepsilon} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_2} \frac{2\pi\sigma_1 a_2^3}{\varepsilon(L + a_2)^3} \times \left[ q_2 - \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{2\varepsilon + \varepsilon_2} \frac{3\pi a_2^3 \sigma_1}{L + a_2} \right]. \quad (37)$$

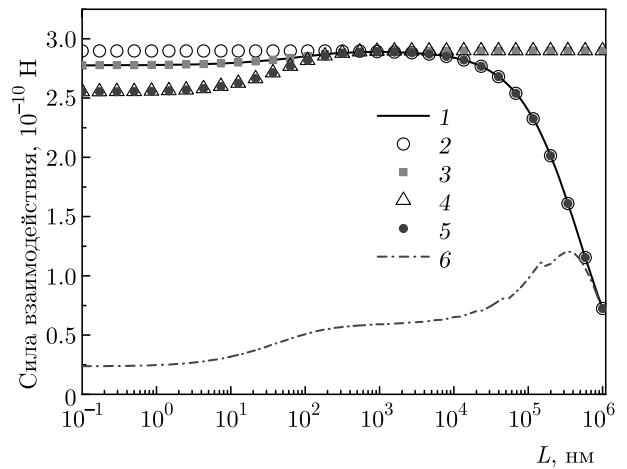
Верхняя строка в этом выражении совпадает с выражением для силы взаимодействия точечного заряда с заряженной плоской границей (см. выражение (4)), которое автоматически получается при  $\varepsilon_2 = \varepsilon$ . А при  $\varepsilon_1 = \varepsilon$  остается только первый член вне зависимости от значения  $\varepsilon_2$ , поскольку в этом случае заряд на поверхности диэлектрика не поляризуется и однородное распределение свободного заряда создает однородное же электрическое поле. Под действием этого поля на второй частице наводится дипольный момент, сила взаимодействия которого с однородным полем равна нулю.



**Рис. 2.** Зависимости силы взаимодействия частиц от расстояния между их поверхностями: а)  $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = 4$ , б)  $\epsilon_1 = 4, \epsilon_2 = 1$ . Кривая 1 — из (17) при  $a_1 = 10^4 a_2$ , 2 — сила взаимодействия точечных зарядов (23), 3 — из (35) при  $a_1 = \infty$ , 4 — сила взаимодействия точечного заряда с плоской заряженной границей диэлектриков (4), 5 — сила взаимодействия точечного заряда с шаром (1)

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Основные расчеты в настоящей работе проведены для следующих параметров: радиус малой частицы  $a_2 = 100$  нм, радиус крупной —  $a_1 = 10^4 a_2$ , для крупной частицы задается однородная плотность поверхностного свободного заряда  $\sigma_1 = 10^{-3} e/\text{нм}^2$  (при такой плотности свободного заряда при  $a_1 = a_2$  заряд первой частицы будет  $q_1 \approx 125.6e$ ), заряд малой частицы  $q_2 = 100e$ , их диэлектрические проницаемости, если не оговорено иное,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$ , диэлектрическая проницаемость среды (вакуума)  $\epsilon = 1$ , расстояние между поверхностями частиц менялась от 0.1 нм до 1 см.



**Рис. 3.** Зависимости силы взаимодействия частиц от расстояния между их поверхностями при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$ . Кривая 1 — из (17) при  $a_1 = 10^4 a_2$ , 2 — сила взаимодействия точечных зарядов (23), 3 — из (35) при  $a_1 = \infty$ , 4 — сила взаимодействия точечного заряда с плоской заряженной границей диэлектриков из (4), 5 — сила взаимодействия точечного заряда с шаром (1), 6 — из (17) при  $a_1 = 10^4 a_2$  и  $C_{\ell_{min}} = D_{\ell_{min}} = 0$ , 7 — из (17) при  $a_1 = 10^4 a_2$  и  $C_{\ell_{min}} = 0, D_{\ell_{min}}$  из (20)

В таблице приведены значения силы взаимодействия частиц при  $L = 0.1$  нм, а на рис. 2 и 3 — зависимости силы взаимодействия от расстояния между поверхностями частиц, рассчитанные для различных параметров и в различных приближениях. Из первого ряда таблицы видно, что конечный размер второй частицы (или учет ее поляризуемости) оказывает заметное влияние на силу взаимодействия (отличие значений как  $F_{1z}$  и  $F_{ps}$ , друг от друга, так и  $F_{z\infty}$  и  $F_{pp}$  составляет почти 8%). В то же время различие между  $F_{1z}$  при  $a_1 = 10^4 a_2$  и  $F_{z\infty}$  при  $a_1 = \infty$  проявляется только в третьем знаке после десятичной точки и относительное их отличие составляет величину порядка 0.03%. Такого же порядка относительное отличие имеет место для сил взаимодействия точечного заряда со сферой радиусом  $a_1 = 1$  мм и точечного заряда с плоской границей диэлектриков. Это отличие связано с тем, что для двух шаров основной составляющей силы является кулоновская зависимость (23), а при  $a_1 = \infty$  величина

$$F_{C\infty} = \frac{4\pi\sigma_1 q_2}{\epsilon}. \tag{38}$$

Сила Кулона при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$  для двух шаров при  $a_1 = 10a_2$  составляет  $F_C = 2.89857829708 \cdot 10^{-10}$  Н, а для сферы и плоской границы —  $F_{C\infty} = 2.89915862150 \cdot 10^{-10}$  Н. Отличие между ними при  $L \ll a_2$  составляет величину порядка

**Таблица.** Сила взаимодействия частиц (в  $10^{-10}$  Н) при  $L = 0.1$  нм,  $a_2 = 100$  нм, вычисленная с  $\ell_{min} = 1081$

	$a_1 = 1$ мм		$a_1 = \infty$	
	$F_{1z}$ из (17)	$F_{ps}$ из (1)	$F_{z\infty}$ из (35)	$F_{pp}$ из (4)
$\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 4$	2.77719582129	2.55322165285	2.77812264405	2.55378813877
$C_\ell = D_\ell = 0$ при $\ell = \ell_{min}$	0.23691354841	–	–	–
$C_\ell = 0$ при $\ell = \ell_{min}$	2.77719582129	–	–	–
$\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 4$	2.89821402039	2.89818502941	2.89915862150	2.89915862150
$\varepsilon_1 = 4, \varepsilon_2 = 1$	2.55322151314	2.55322165285	2.55378813877	2.55378813877
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$	2.89857815821	2.89857829708	2.89915862150	2.89915862150

$$\frac{F_{C\infty}}{F_C} = \left( \frac{L + a_1 + a_2}{a_1} \right)^2 \approx 1 + \frac{2a_2}{a_1},$$

т. е. отличие составляет 0.02 %.

При задании нулевых значений для коэффициентов разложения потенциала  $C_\ell = D_\ell = 0$  при  $\ell = \ell_{min}$ , как видно из таблицы, сила взаимодействия оказывается на порядок меньше, чем при задании асимптотических значений этих коэффициентов из (20). В то же время, если задавать нулевое значение только для  $C_\ell$ , то для силы взаимодействия получается не отличающаяся в 11 десятичных знаках величина.

При задании  $\varepsilon_1 = 1$  первая частица (или плоская граница) не поляризуется, поэтому она выступает как точечная частица (или только создает однородное электрическое поле). В этом случае учет размера второй частицы при  $a_1 = 10^4 a_2$  приводит к незначительному изменению силы взаимодействия (в четвертом знаке после десятичной точки), причем сила оказывается больше при  $a_2 = 0$ . В то же время при  $a_1 = \infty$  значения силы совпадают в обоих случаях: как при конечном  $a_2$ , так и при точечном заряде  $a_2 = 0$ , причина чего отмечалась в конце разд. 2.3.

В случае  $\varepsilon_2 = 1$  вторая частица выступает как точечная частица в том смысле, что распределение поля вне второй частицы точно совпадает с полем точечного заряда  $q_2$ , помещенного в ее центр. В этом случае должны совпадать значения силы как при  $a_1 = 10^4 a_2$ , рассчитанные из (1) и (17), так и при  $a_1 = \infty$ , рассчитанные из (4) и (35). Из таблицы видно, что значения силы совпадают с высокой точностью при  $a_1 = \infty$ , а при  $a_1 = 10^4 a_2$  отличие появляется в седьмом знаке после десятичной точки, что позволяет судить о точности решения блочно-диагональной системы (15), (16) методом матричной прогонки и точности вычисления силы взаимодей-

ствия. Отметим, что при сравнимых радиусах частиц, как было показано в работе [5], этот метод оказывается значительно точнее.

При увеличении расстояния между поверхностями частиц  $L$  отмеченные в таблице особенности сохраняются, что хорошо видно из рис. 2 и 3. Из рис. 2а видно, что при  $\varepsilon_1 = \varepsilon$  в случае  $a_1 = \infty$  сила взаимодействия остается постоянной при всех  $L$ , а при  $a_1 = 10^4 a_2$  на всех расстояниях совпадает с кулоновской зависимостью. При  $\varepsilon_2 = \varepsilon$  на малых расстояниях значения силы как при  $a_1 = \infty$ , так и при  $a_1 = 10^4 a_2$  оказываются близкими и заметно отличными от кулоновской силы. При больших  $L, L \gg a_2$ , сила  $F_{z\infty}$  принимает постоянное значение, так как эффект от поляризации поверхностного заряда на плоской границе точечным зарядом становится пренебрежимо малым, а сила  $F_{1z}$  при  $L \gg a_2$  выходит на кулоновскую асимптотику по той же причине.

Из рис. 3 видно, что учет поляризации обеих частиц приводит к отличию значений силы от силы взаимодействия в случае, когда одна из частиц является точечным зарядом. Это отличие по мере увеличения  $L$  постепенно уменьшается и становится пренебрежимо малым при  $L \gg a_2$ . На больших расстояниях сила взаимодействия хорошо описывается выражением (1) в случае конечного радиуса  $a_1$  и выражением (4) в случае плоской границы. Из рис. 3 видно также, к какой ошибке приводит решение системы (15), (16) с нулевыми значениями коэффициентов разложения потенциала при  $\ell = \ell_{min}$ .

На рис. 4 проводится сравнение решений системы (15), (16) методом матричной прогонки при различных радиусах большей частицы и уравнения (33) методом простой прогонки при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$  и  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 80$ . Видно, что различие этих решений на малых расстояниях становится заметным при  $a_1 = 100 a_2$  и отклонения растут по мере уменьшения



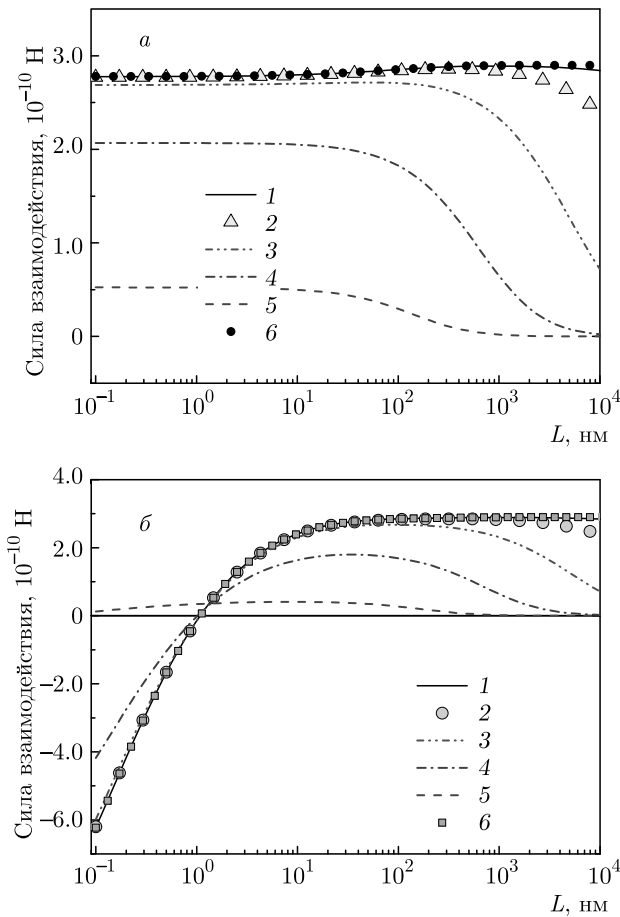


Рис. 4. Сила взаимодействия как функция расстояния между поверхностями частиц  $L$  при следующих параметрах: а)  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$ , б)  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 80$ ; кривая 1 —  $a_1 = 10^4 a_2$ , 2 —  $a_1 = 10^3 a_2$ , 3 —  $a_1 = 10^2 a_2$ , 4 —  $a_1 = 10 a_2$ , 5 —  $a_1 = a_2$ , 6 —  $a_1 = \infty$  из (35)

радиуса большей частицы. На больших расстояниях сила взаимодействия частицы с плоской границей медленнее убывает и, как видно из рис. 4, переходит в решение (4) на расстояниях  $L \sim a_2$ . Следовательно, можно сделать вывод, что для получения хорошей точности для силы взаимодействия заряженного шара с плоской заряженной границей задачу о взаимодействии двух шаров необходимо решать при  $a_1 \gtrsim 10^3 a_2$  и расстояниях  $L \lesssim a_2$ . Отметим, что при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 80$  переход от отталкивания на больших расстояниях к притяжению на малых для рассмотренных здесь зарядов не наблюдается только при  $a_1 = a_2$ , а при  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 4$  этот переход вообще не имеет места.

На рис. 5 проводится сравнение численных решений друг с другом и с аналитическими формулами (1) и (4) при трех значениях диэлектрической про-

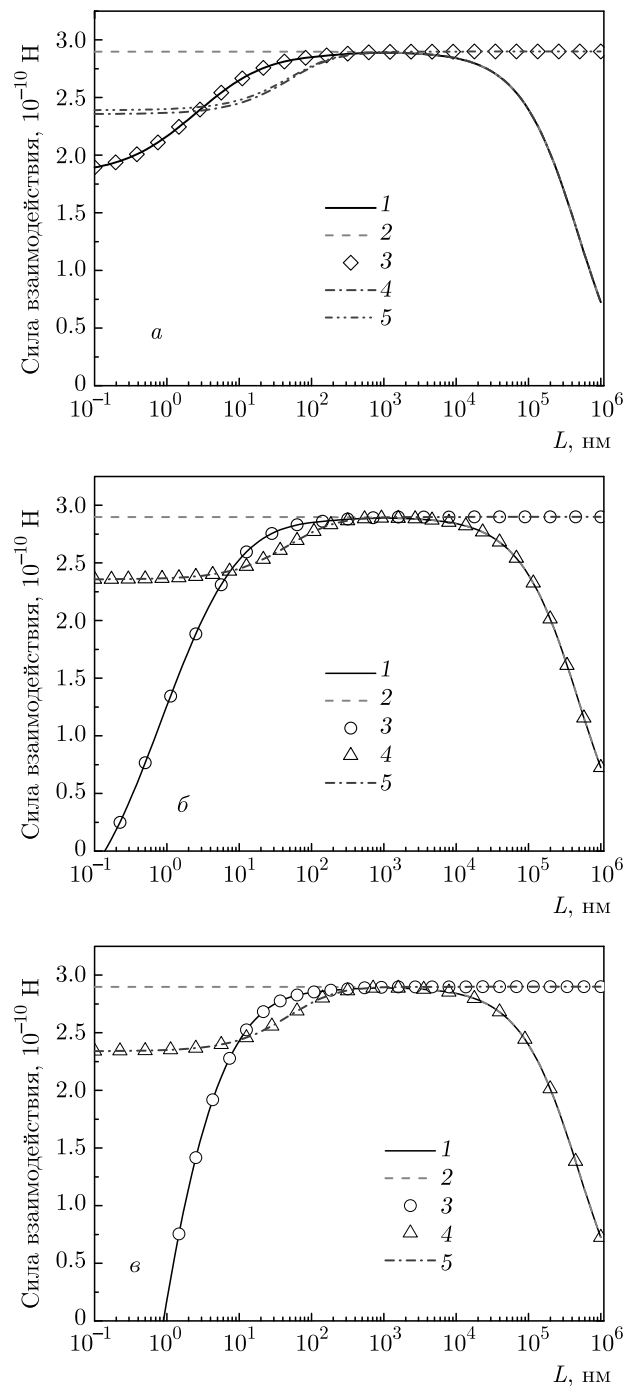
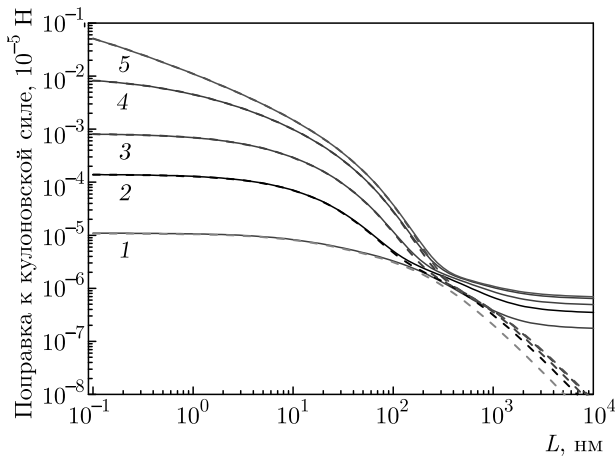


Рис. 5. Сила взаимодействия как функция расстояния между поверхностями частиц  $L$  при следующих параметрах: а)  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 16$ , б)  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 32$ , в)  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 64$ ; кривая 1 — из (17) при  $a_1 = 10^4 a_2$ , 2 — сила взаимодействия точечных зарядов (23), 3 — из (35) при  $a_1 = \infty$ , 4 — сила взаимодействия точечного заряда с плоской заряженной границей диэлектриков из (4), 5 — сила взаимодействия точечного заряда с шаром (1)



**Рис. 6.** Поправка к кулоновской силе как функция расстояния между поверхностями частиц  $L$ : сплошные кривые —  $a_1 = \infty$ , штриховые —  $a_1 = 10^4 a_2$ , 1 —  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ , 2 —  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 4$ , 3 —  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 8$ , 4 —  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 32$ , 5 —  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 256$

нищаемости материала частиц. Видно хорошее согласие сил  $F_{1z}$  и  $F_{z\infty}$  и все возрастающее с ростом диэлектрической проницаемости отличие их от  $F_{ps}$  и  $F_{pp}$ . При этом интересно отметить хорошее совпадение  $F_{ps}$  и  $F_{pp}$  при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 > 16$ . Это связано с тем, что при больших  $\varepsilon_1$  величина  $f_n$  в выражении (3), которая определяет поправку  $\delta f_{ps}$ , стремится к нулю. Из рис. 5 видно, что при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 32$  происходит переход от отталкивания к притяжению на малых расстояниях, при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 64$  этот переход происходит на больших расстояниях, а при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 16$  он не имеет места.

На рис. 6 проводится сравнение поправки к кулоновской силе, в качестве которой при  $a_1 = \infty$  выступает величина  $F_{C\infty} - F_{z\infty}$ , а при  $a_1 = 10^4 a_2$  — величина  $F_C - F_{1z}$ . Видно, что эти величины при всех рассмотренных значениях диэлектрической проницаемости материала частиц на малых расстояниях до  $L \sim a_2$  практически сливаются. На больших расстояниях эти поправки зависят от отношения  $(\varepsilon_1 - \varepsilon) / (\varepsilon_1 + \varepsilon)$  и отличие кривых по мере роста  $\varepsilon_1$  становится все меньше и меньше. Также отметим, что поправка на всех расстояниях положительна, следовательно, сила взаимодействия всегда меньше, чем  $F_{C\infty}$  или  $F_C$  в случае конечного радиуса большой частицы.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе найдены ряд аналитических решений для коэффициентов разложения потен-

циала в бисферической системе координат для больших номеров мультипольного момента. Выполнен переход к бесконечному радиусу одного из шаров и впервые найдено аналитическое решение данной задачи. Найденное решение позволяет с высокой точностью рассчитать силу взаимодействия заряженной диэлектрической частицы сферической формы с частицей значительно большего радиуса или с плоской границей диэлектриков при расстояниях между их поверхностями в области 0.1–1 нм, в которой силы электростатического и ван-дер-ваальсова взаимодействия сравнимы друг с другом.

**Финансирование.** Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (соглашение № 075-15-2020-785).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. W. Home, *British J. Hist. Sci.* **16**(3), 239 (1983).
2. J. R. Hoffman and A.-M. Ampère, *Poisson's 1812 Electricity Memoir*, Cambridge Univ. Press (1995), pp. 113–118.
3. W. Thomson, *Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism*, Macmillan, London, UK (1884), pp. 86–97.
4. J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, UK (1891).
5. В. Р. Муниров, А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **144**, 931 (2013).
6. E. B. Lindgren, H. K. Chan, A. J. Stace, and E. Besley, *Phys. Chem. Chem. Phys.* **18**, 5883 (2016).
7. A. Khachatourian, H.-K. Chan, A. J. Stace, and E. Bichoutskaia, *J. Chem. Phys.* **140**, 074107 (2014).
8. A. V. Filippov, X. Chen, C. Harris, A. J. Stace, and E. Besley, *J. Chem. Phys.* **151**, 154113 (2019).
9. M. Majic, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **276**, 107945 (2021).
10. J. Baptiste, C. Williamson, J. Fox, A. J. Stace, M. Hassan, S. Braun, and E. Besley, *Atmosph. Chem. Phys.* **21**, 8735 (2021).
11. A. T. Pérez and R. Fernández-Mateo, *J. Electrostatics* **112**, 103601 (2021).
12. Y. Nakajima and T. Sato, *J. Electrostatics* **45**, 213 (1999).

13. E. Bichoutskaia, A. L. Boatwright, A. Khachatourian, and A. J. Stace, *J. Chem. Phys.* **133**, 024105 (2010).
14. T. B. Jones and T. B. Jones, *Electromechanics of Particles*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2005).
15. A. Castellanos, *Adv. Phys.* **54**(4), 263 (2005).
16. X. Meng, J. Zhu, and J. Zhang, *J. Phys. D* **42**, 065201 (2009).
17. B. Gady, D. Schleef, R. Reifenberger, D. Rimai, and L. P. DeMejo, *Phys. Rev. B* **53**, 8065 (1996).
18. B. Gady, R. Reifenberger, D. S. Rimai, and L. P. DeMejo, *Langmuir* **13**, 2533 (1997).
19. Y. Liu, C. Song, G. Lv, N. Chen, H. Zhou, and X. Jing, *Appl. Surf. Sci.* **433**, 450 (2018).
20. M. C. Stevenson, S. P. Beaudoin, and D. S. Corti, *J. Phys. Chem. C* **124**, 3014 (2020).
21. M. C. Stevenson, S. P. Beaudoin, and D. S. Corti, *J. Phys. Chem. C* **125**, 20003 (2021).
22. H. Zhou, M. Götzinger, and W. Peukert, *Powder Technology* **135–136**, 82 (2003).
23. Y. Gao, E. Tian, and J. Mo, *ACS EST Engg.* **1**, 1449 (2021).
24. В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин, *Сборник задач по электродинамике*, Наука, Москва (1970).
25. В. Смайт, *Электростатика и электродинамика*, Изд-во иностр. лит., Москва (1954) [W. R. Smythe, *Static and Dynamic Electricity*, Taylor and Francis, New York–Toronto–London (1950)].
26. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill, New York (1953).
27. А. В. Филиппов, *ЖЭТФ* **136**, 601 (2009).
28. А. В. Филиппов, *Contrib. Plasma Phys.* **49**, 433 (2009).