ЖЭТФ, 2022, том 161, вып. 5, стр. 702–710

ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ ПРЕЛОМЛЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ПОРИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

С. А. Родионов [a*], *А. М. Мерзликин* [a,b]

[a] *Всероссийский научно-исследовательский институт автоматики им. Н. Л. Духова 127030, Москва, Россия*

[b] *Институт теоретической и прикладной электродинамики Российской академии наук 125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 июля 2021 г.,
после переработки 17 декабря 2021 г.
Принята к публикации 20 декабря 2021 г.

Исследуется распространение света в двумерных пористых композитных материалах на основе кремния (Si) и диоксида кремния (SiO_2) в терминах эффективных параметров. Эффективный показатель преломления n_{eff} и квазистатическая эффективная диэлектрическая проницаемость $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$ были вычислены независимо. Эффективный показатель преломления был вычислен с использованием теоремы Блоха, в то время как квазистатическая эффективная диэлектрическая проницаемость была рассчитана разными методами: при помощи метода асимптотического осреднения, приближения Максвелла Гарнетта и модели Бруггемана. Показано, что в длинноволновом приближении n_{eff} не сходится к квадратному корню из квазистатической диэлектрической проницаемости, вычисленной при помощи моделей Максвелла Гарнетта и Бруггемана. Показано, что, напротив, сходимость между n_{eff} и $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$, вычисленной методом асимптотического осреднения, осуществляется в длинноволновом пределе для любых значений пористости композитного материала.

DOI: 10.31857/S004445102205008X
EDN: DSUGDW

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследование оптических композитных материалов [1], свойства которых обусловлены не только их составом, но и внутренней геометрией, представляет высокий интерес [2]. Особенности взаимодействия света с микроструктурой композитных материалов проявляется в различных макроскопических оптических свойствах данных структур, включая такие необычные свойства, как формирование фотонной запрещенной зоны [3, 4], аномальное преломление света [5, 6] и т. д. Понимание физики взаимодействия света с данными структурами и определение их макроскопических свойств — важные проблемы современной оптики [7–9].

Для изучения макроскопических оптических свойств композитных материалов достаточно широко используется метод гомогенизации уравнений Максвелла [1, 6, 10–17]. Смысл данного метода заключается в замене точных электромагнитных полей в неоднородной среде «средними»[1)] полями, взаимодействующими с некоторой гомогенной средой. Данный подход позволяет избежать затратных по времени вычислений микрополей в структуре композитного материала и описывать его свойства в терминах эффективных параметров [10–15]. Полная характеристика оптических свойств материала требует определения двух параметров[2)]: ε_{eff}, μ_{eff} — эффективных диэлектрической и магнитной проницаемостей соответственно [18], что следует из уравнений Максвелла для однородной среды.

В наиболее простом случае статических полей амплитуды электрического и магнитного полей независимы, что позволяет преобразовать систему уравнений Максвелла к уравнению Лапласа. Гомо-

* E-mail: sergeyrodionov93@yandex.ru

1) Различные авторы рассматривают поля, усредненные по физически бесконечно малому элементу объема [18], ансамблю [19], и более сложные методы усреднения [1, 12, 13].

2) В случае анизотропных сред данные параметры являются тензорными величинами. Биизотропные и бианизотропные среды не рассматриваются в данной работе.

генизация уравнения Лапласа является достаточно хорошо изученной проблемой [1, 8–11, 14, 15]. Существует много феноменологических методов гомогенизации, среди которых приближение Максвелла Гарнетта [10, 11] и модель эффективной среды Бруггемана [14] наиболее популярны. Также существуют математически строгие методы гомогенизации, среди которых метод асимптотического осреднения уравнения Лапласа для периодических сред широко используется в задачах механики, электростатики и магнитостатики [20, 21]. Данный метод основан на методе многих масштабов [9, 20] и разложении поля в ряд по малому параметру a/L, где a — характерный масштаб неоднородности внутренней структуры образца, L — характерный масштаб размеров образца.

При изучении взаимодействия переменных электромагнитных полей с композитным материалом электрическое и магнитное поля связаны посредством уравнений Максвелла, а также данные уравнения содержат дополнительный параметр масштаба — длину волны λ. Связь между электрическим и магнитным полями приводит к уравнениям, отличным от уравнения Лапласа, а наличие третьего параметра масштаба (длины волны) требует принятия во внимание отношений a/λ и λ/L, помимо a/L. Важно отметить, что в случае $a/\lambda > 1/2n$, где n — показатель преломления матрицы композитного материала, метод гомогенизации не может быть применен, так как при приближении к первому брэгговскому резонансу среда начинает сильно рассеивать излучение и не может рассматриваться как однородная [15]. Таким образом, метод гомогенизации может применяться, когда $a/\lambda \ll 1/2n$.

В случае, когда длина волны существенно превышает все остальные характерные масштабы: $\lambda \gg a, L$, уравнения Максвелла могут быть сведены к уравнению Лапласа. Однако, в отличие от статического случая, связь между электрическим и магнитным полями должна быть сохранена. Также должна быть учтена дисперсия параметров среды. Данное приближение называется квазистатическим [8, 18]. Гомогенизация неоднородной среды с использованием квазистатического приближения достаточно популярный метод и, как и в статическом случае, достаточно хорошо изученная проблема [14, 22].

Волновые свойства излучения учитываются в более точном, длинноволновом приближении. В данном приближении при решении уравнений Максвелла поля раскладываются в ряд по степеням a/λ и λ/L, что позволяет учитывать набег фазы волны в среде и другие явления, связанные с волновой природой электромагнитного излучения. Однако при использовании данного приближения уравнения, которые описывают электромагнитные поля, отличны от уравнения Лапласа. Таким образом, стандартные методы гомогенизации оказываются неприменимы.

Достаточно известным методом гомогенизации в длинноволновом приближении является метод, впервые предложенный Рытовым и Левиным в работах [23, 24] и основанный на теореме Блоха [15]. Суть метода заключается в разложении электромагнитного поля в периодической структуре в ряд по блоховским волнам. При помощи данного метода можно вычислить эффективный показатель преломления n_{eff} и эффективный импеданс Y_{eff}, при помощи которых могут быть вычислены эффективная диэлектрическая проницаемость ε_{eff} и эффективная магнитная проницаемость μ_{eff}. Однако в работах [25–28] было показано, что для периодических слоистых композитов введение эффективного импеданса в длинноволновом приближении некорректно. Оказывается, что эффективный импеданс сильно зависит от граничных условий на поверхности образца и процедура сходимости для данного параметра, при увеличении размеров образца, не выполняется [25, 26]. Также в ряде работ [10–15, 29, 30] обсуждаются основные современные методы гомогенизации и способы корректного введения полного набора эффективных материальных параметров в длинноволновом приближении, которые в основном сводятся к введению эффективных переходных слоев на поверхности образца. Тем не менее такие слои все еще довольно сильно зависят от типа границы, что не позволяет описывать композитный материал в терминах эффективных параметров корректно [31].

Таким образом, применимость метода гомогенизации к уравнениям Максвелла для композитных материалов в длинноволновом приближении все еще остается до конца не решенной проблемой и требует дальнейшего исследования. Однако, так как введение n_{eff} остается в силе [29, 32, 33] в динамической задаче, данный параметр можно использовать для описания макроскопических свойств композитного материала. Также в связи с тем, что квазистатическое приближение [10, 11] применимо к композитным материалам в случае $\lambda \gg a$, достаточно важной задачей является определение разницы между n_{eff}, рассчитанным при помощи теоремы Блоха в длинноволновом приближении, и $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$, рассчитанным с использованием метода асимптотического осреднения в квазистатическом приближении:

$$\Delta n_{eff} = n_{eff} - \sqrt{\varepsilon_{eff}}. \qquad (1)$$

В последнее время нанопористый кремний и диоксид кремния представляют большой интерес в оптике [34, 35]. За счет технологической возможности управления пористостью материала p[3)] оказывается возможным изменять оптические свойства данного материала в достаточно широких пределах, что находит применение во многих оптических устройствах [35–38]. Так как данные структуры принадлежат к классу двумерных композитных материалов [39–42] за счет сонаправленного роста пор, есть определенный теоретический интерес к изучению связи между эффективными параметрами и микроструктурой данного композитного материала. Следовательно, изучение таких структур является важной задачей как для прикладной оптики, так и для теоретической. В данной работе исследуются эффективные оптические параметры двумерных пористых композитных материалов и связь между методом асимптотического осреднения и теоремой Блоха в длинноволновом пределе в задаче гомогенизации. Также в данной работе мы показали, что такие популярные методы гомогенизации, как приближение Максвелла Гарнетта и модель Бруггемана, дают результаты, отличные от математически строгого метода асимптотического осреднения при больших пористостях, и оказываются непригодными.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 описана постановка задачи, т. е. представлена модель пористого материала и методы для расчета его эффективных параметров. Метод асимптотического осреднения используется для расчета квазистатической эффективной диэлектрической проницаемости, а эффективный показатель преломления в длинноволновом приближении вычисляется при помощи теоремы Блоха. В разд. 3 представлены результаты вычислений. Обсуждение полученных результатов проводится в разд. 4.

2. МЕТОДЫ

2.1. Модель пористого композита

Модель двумерного пористого композитного материала представляет собой однородную сплошную среду из кремния или диоксида кремния (матрица) и включений в виде сонаправленных бесконечных цилиндров, заполненных воздухом (рис. 1*а*). Характерный размер неоднородности композитного материала, т. е. среднее расстояние между осями соседних цилиндров a, предполагается много меньшим, чем характерный размер всей структуры L ($a \ll L$). Также предполагается, что длина волны λ много меньше L ($\lambda \ll L$), что позволяет рассматривать структуру как двумерную и бесконечную. Для применения метода асимптотического осреднения и теоремы Блоха, которые описаны ниже, за счет равномерного распределения пор в композитном материале структура предполагается периодической, с квадратной ячейкой периода a, и все цилиндры предполагаются идентичными, с диаметром d (рис. 1*б*).

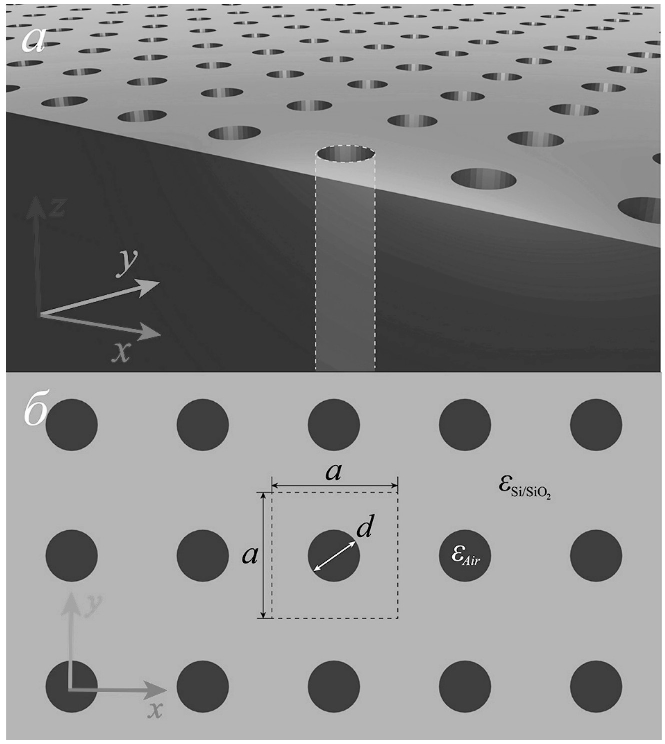

Рис. 1. Модель пористого композита

Как видно из рис. 1*а*, структура неоднородна в плоскости xy и однородна вдоль оси z. Тогда эффективная диэлектрическая проницаемость не является скаляром и зависит от направления. За счет трансляционной симметрии вдоль оси z и квадратной элементарной ячейки в выбранной системе координат, представленной на рис. 1, тензор эффективной диэлектрической проницаемости может быть представлен в диагональной форме:

$$\varepsilon_{ij}^{eff} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{eff}^{(\perp)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{eff}^{(\perp)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{eff}^{(\|)} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

[3)] Отношение объема, занимаемого порами, к объему всего композита.

Таким образом, проблема исследования оптических свойств пористого кремния или пористого диоксида кремния в квазистатическом приближении сводится к вычислению величин $\varepsilon_{eff}^{(\perp)}$ и $\varepsilon_{eff}^{(\|)}$. Отметим, что так как z-компонента вектора напряженности электрического поля непрерывна на границе между материалами, то в направлении, параллельном осям пор, электрическое поле одинаково во всем пространстве. Следовательно, $\varepsilon_{eff}^{(\|)} = \langle\varepsilon\rangle$, где $\langle\varepsilon\rangle$ — диэлектрическая проницаемость, усредненная по элементарной ячейке композитного материала.

Рассматривается структура со следующими параметрами: $a = 50$ нм — период элементарной ячейки, $d = 15$ нм — диаметр пор, $\lambda = 850$ нм — длина волны излучения в вакууме, $\varepsilon_{\mathrm{SiO_2}} = 2.13$ — диэлектрическая проницаемость диоксида кремния при заданной длине волны [43], $\varepsilon_{\mathrm{Si}} = 13.22$ — диэлектрическая проницаемость кремния при заданной длине волны [44], $\varepsilon_{Air} = 1$ — диэлектрическая проницаемость воздуха.

2.2. Метод асимптотического осреднения

В данной работе метод асимптотического осреднения используется для вычисления компонент тензора эффективной диэлектрической проницаемости в квазистатическом приближении. Детальное описание данного метода можно найти в [20, 21]. В данном разделе представлена суть этого метода. При использовании квазистатического приближения система уравнений Максвелла преобразуется к уравнению Лапласа[4)] с сохранением дисперсии параметров среды:

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})\frac{\partial\phi(\mathbf{r})}{\partial x_j} = 0, \tag{3}$$

где $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$ — тензор диэлектрической проницаемости, компоненты которого являются функциями координат, $\phi(\mathbf{r})$ — скалярный потенциал, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, x_i — i-я компонента радиус-вектора. Поиск асимптотического решения уравнения (3) в виде разложения в ряд по параметру $k = a/L$ составляет суть метода асимптотического осреднения:

$$\phi(\mathbf{r}) = \sum_n k^n \phi_n(\mathbf{r}), \tag{4}$$

где $\phi_n(\mathbf{r})$ — средний потенциал в случае нулевого индекса и его поправки во всех остальных случаях. Также в данном методе используется разделение на «быстрые» и «медленные» переменные, соответственно:

$$\xi_i = x_i/a, \quad \eta_i = x_i/L, \tag{5}$$

что позволяет существенно упростить решение задачи. Сходимость уравнения Лапласа с неоднородными коэффициентами (3) к осредненному уравнению:

$$\sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^{eff}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\phi_0(\mathbf{r}) = 0, \tag{6}$$

при $k \to 0$ выполняется в рамках теории G-сходимости [45].

Для вычисления ε_{ij}^{eff} решается дополнительная краевая задача на ячейке периодичности:

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\varepsilon_{ij}(\xi)\frac{\partial M_l(\xi)}{\partial \xi_j} = 0, \tag{7}$$

$$[M_l(\xi) - \xi_l]|_\Gamma = 0, \quad \left.\left[\frac{\partial M_l(\xi)}{\partial \mathbf{n}_\xi}\right]\right|_\Gamma = 0, \tag{8}$$

где ξ — набор «быстрых» переменных, $M_l(\xi)$ — l-я дополнительная функция «быстрых» переменных, Γ — граница элементарной ячейки, $\mathbf{n}_\xi$ — нормаль к Γ. Отсюда следует, что тензор эффективной диэлектрической проницаемости может быть вычислен с помощью выражения

$$\varepsilon_{ij}^{eff} = \int\limits_{V_\xi} \sum_n \varepsilon_{in}(\xi)\frac{\partial M_j(\xi)}{\partial \xi_n}\, d\xi, \tag{9}$$

где V_ξ — объем элементарной ячейки в быстрых переменных и $d\xi$ — элемент объема элементарной ячейки в быстрых переменных.

2.3. Теорема Блоха

Поскольку среда периодическая, для описания распространения в ней электромагнитных волн, за счет схожести уравнений квантовой механики и электродинамики, может быть использована теорема Блоха [3, 4, 15]. При данном подходе компоненты электромагнитного поля могут быть разложены по блоховским волнам:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}_b} \mathbf{E}_{\mathbf{k}_b}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}_b \cdot \mathbf{r}), \tag{10}$$

[4)] Для упрощения нашего рассмотрения временная зависимость $\exp(i\omega t)$ опущена, так как уравнения Максвелла рассматриваются в частотной области. Далее в работе временная зависимость также будет опущена.

где $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{E}_{\mathbf{k}_b}(\mathbf{r})$ — периодические функции распределения поля в среде, $\mathbf{k}_b$ — блоховский волновой вектор. При использовании данного метода задача сводится к определению закона дисперсии: $\mathbf{k}_b = \mathbf{k}_b(\omega)$, где ω — частота излучения, и к последующему вычислению $\mathbf{E}_{\mathbf{k}_b}(\mathbf{r})$. Тогда вдали от первого брэгговского резонанса ($a/\lambda \ll 1/2n$) можно ввести эффективный показатель преломления:

$$n_{eff} = k_b/k_0, \tag{11}$$

где k_0 — волновое число излучения в вакууме. В данной работе мы рассматриваем только режим распространения волн с высокой симметрией ($k_{bz} = 0$), где блоховский волновой вектор лежит в плоскости xy.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

С помощью метода асимптотического осреднения компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости были вычислены при разных величинах пористости p для моделей пористого диоксида кремния (рис. 2) и пористого кремния (рис. 3), при фиксированных λ и a.

Также мы вычислили зависимости эффективной диэлектрической проницаемости от пористости для пористого кремния при помощи приближения Максвелла Гарнетта и модели Бруггемана. Отличие результатов метода асимптотического осреднения от данных приближений представлено на рис. 4.

В динамическом случае мы рассмотрели электромагнитные волны, распространяющиеся в плоскости xy, т. е. когда $k_z = 0$. Эффективные показатели преломления данной структуры для обоих направлений вектора напряженности электрического поля (в плоскости или перпендикулярно ей) были вычислены в зависимости от a/λ для моделей пористого диоксида кремния (рис. 5a) и пористого кремния (рис. 6a). Вычисления были выполнены с использованием теоремы Блоха при фиксированных λ и p. Также, используя (1), было проведено сравнение величины эффективного показателя преломления с

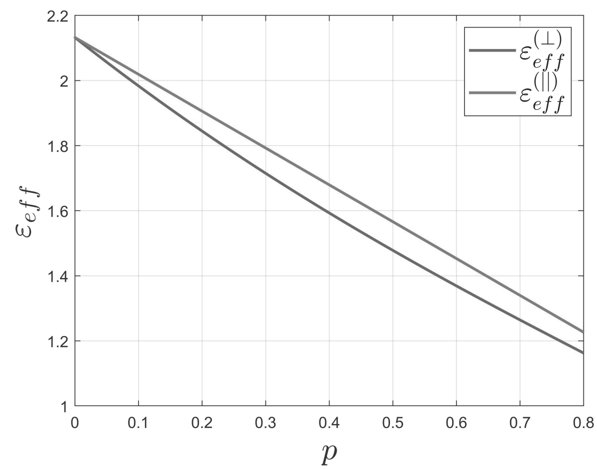

Рис. 2. (В цвете онлайн) Компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости в зависимости от пористости для пористого диоксида кремния

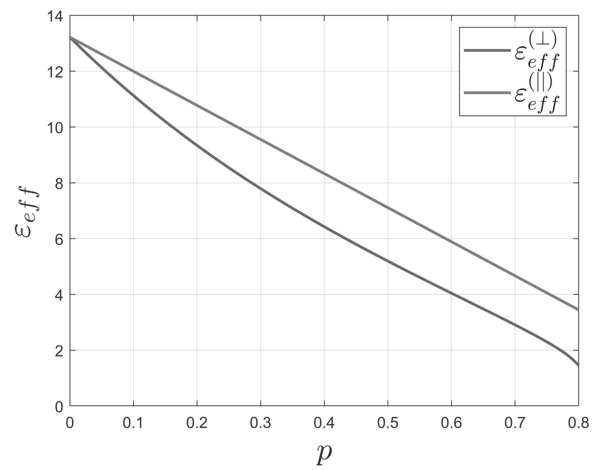

Рис. 3. (В цвете онлайн) Компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости в зависимости от пористости для пористого кремния

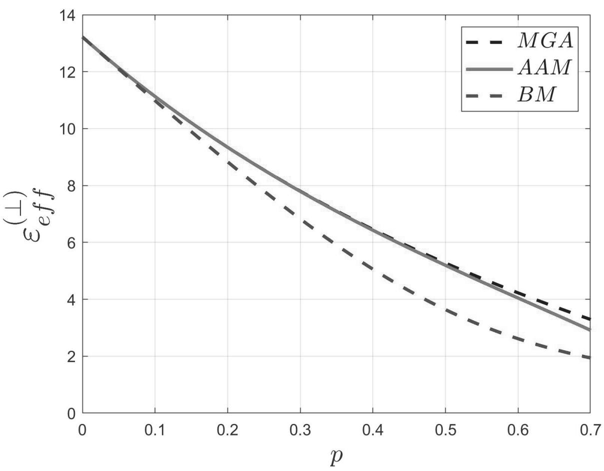

Рис. 4. (В цвете онлайн) Сравнение зависимостей эффективной диэлектрической проницаемости от пористости композитного материала, вычисленных с использованием приближения Максвелла Гарнетта (MGA), метода асимптотического осреднения (AAM) и модели Бруггемана (BM) для пористого кремния

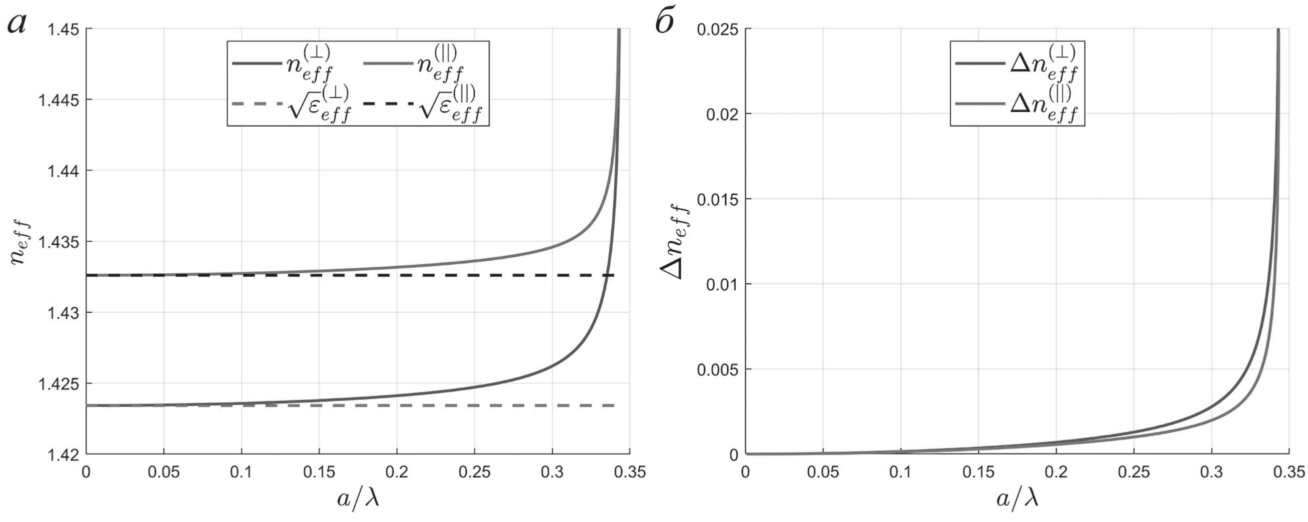

Рис. 5. (В цвете онлайн) *а*) Эффективные показатели преломления при разных a/λ для пористого диоксида кремния. Штриховые линии отмечают $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$. *б*) Разности между динамическими и квазистатическими показателями преломления как функции a/λ для пористого диоксида кремния

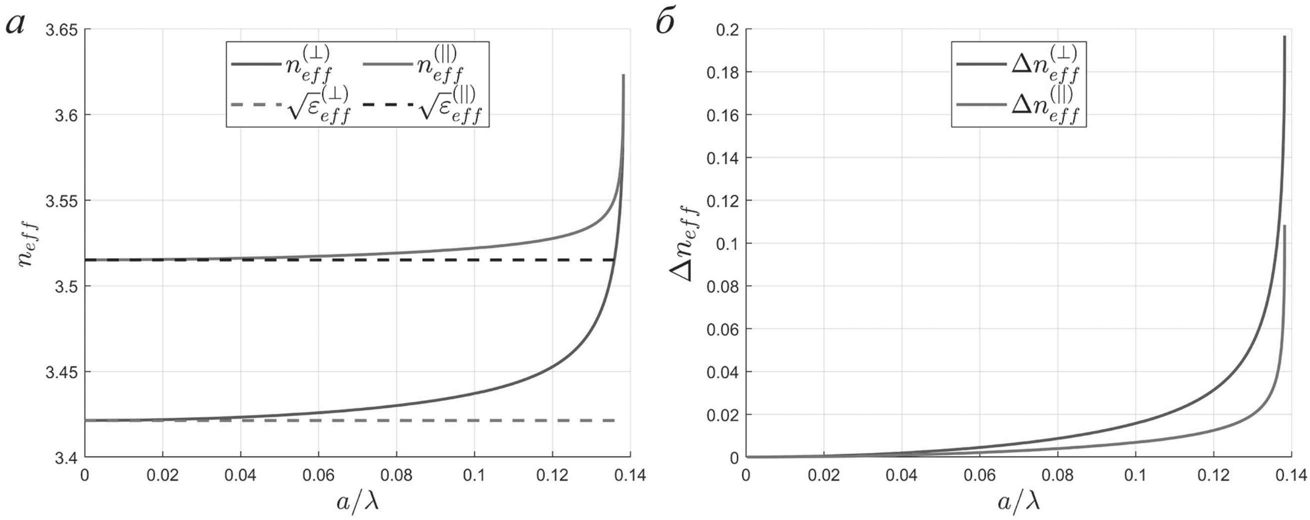

Рис. 6. (В цвете онлайн) *а*) Эффективные показатели преломления при разных a/λ для пористого кремния. Штриховые линии отмечают $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$. *б*) Разности между динамическими и квазистатическими показателями преломления как функции a/λ для пористого кремния

$\sqrt{\varepsilon_{eff}}$, вычисленной при помощи метода асимптотического осреднения в квазистатическом приближении (рис. 5*б* и рис. 6*б*).

Динамические вычисления были выполнены при фиксированной пористости, которая была выбрана достаточно маленькой ($p \approx 0.07$). Чтобы показать, что данный результат справедлив при всех пористостях, мы вычислили зависимости $\Delta n_{eff}^{(\perp)}$ от a/λ для разных пористостей. Вычисления были выполнены для модели пористого кремния, результаты представлены на рис. 7.

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Из рис. 2 и 3 ясно, что компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости могут меняться в очень широких пределах при изменении пористости образца. Также данная структура обладает большой анизотропией даже в случае малой разности между диэлектрическими проницаемостями компонентов композитного материала[5)].

5) В случае кремния разница между компонентами тензора диэлектрической проницаемости порядка 1.

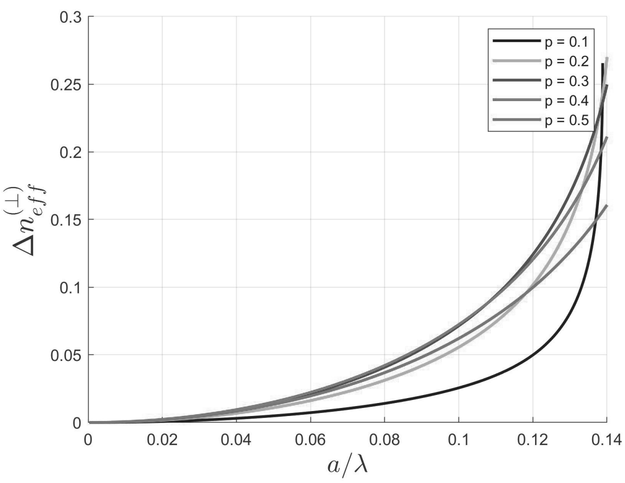

Рис. 7. (В цвете онлайн) Разности между динамическими и квазистатическими эффективными показателями преломления $\Delta n_{eff}^{(\perp)}$ в зависимости от a/λ для разных пористостей для пористого кремния

На рис. 4 показано, что при малой пористости ($p \leq 0.05$) эффективная диэлектрическая проницаемость, вычисленная с использованием приближения Максвелла Гарнетта и с использованием модели Бруггемана, совпадает с эффективной диэлектрической проницаемостью, вычисленной методом асимптотического осреднения. Но выше величины пористости $p \approx 0.05$ эффективная диэлектрическая проницаемость из модели Бруггемана значительно отличается от эффективной диэлектрической проницаемости, вычисленной методом асимптотического осреднения, и становится неприменимой. Эффективная диэлектрическая проницаемость, вычисленная с использованием приближения Максвелла Гарнетта, согласуется с эффективной диэлектрической проницаемостью, вычисленной с использованием метода асимптотического осреднения, вплоть до значений пористости $p \approx 0.4$. Выше данного значения разница между эффективными диэлектрическими проницаемостями из приближения Максвелла Гарнетта и метода асимптотического осреднения становится значительной и быстро растет. Следовательно, при пористостях выше $p \approx 0.4$ приближение Максвелла Гарнетта становится неприменимым.

На рис. 5 и 6 построены зависимости n_{eff} от a/λ вплоть до первого брэгговского резонанса. Как было сказано выше, эффективный показатель преломления композитного материала имеет смысл только вдали от первого брэгговского резонанса. Поэтому в расчетах используется только первая зона Бриллюэна для a/λ. Как видно из рис. 5*а* и 6*а*, n_{eff} стремится к $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$ в пределе больших длин волн ($a/\lambda \to 0$). Данный результат очень важен, так как показывает связь между квазистатическим показателем преломления $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$ и асимптотическим значением динамического показателя преломления n_{eff}, вычисленных разными методами.

На рис. 5*б* и 6*б* видно, что n_{eff} сильно отличается от a/λ только вблизи первого брэгговского резонанса и их разница быстро уменьшается при удалении от него. Следовательно, оказывается возможным использовать эффективный показатель преломления уже при $a/\lambda \leq 1/4n$. Более того, начиная с данного значения a/λ, становится возможным использование квазистатического приближения для вычисления эффективных параметров с достаточно хорошей точностью. В самом деле, для пористого диоксида кремния ошибка оказывается порядка 10^{-4} или меньше, а для кремния — порядка 10^{-3} или меньше.

Из рис. 7 ясно, что сходимость n_{eff} к $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$ в пределе больших длин волн не зависит от пористости. Следовательно, для двумерных пористых структур имеется непрерывный переход от эффективного показателя преломления из теоремы Блоха к квадратному корню из эффективной диэлектрической проницаемости из метода асимптотического осреднения в пределе больших длин волн.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были исследованы эффективные оптические параметры двумерного пористого кремния и диоксида кремния в разных приближениях. В квазистатическом приближении компоненты тензора эффективной диэлектрической проницаемости были вычислены для разных значений пористости p при фиксированных λ и a методом асимптотического осреднения. Было показано, что такие структуры обладают анизотропией ввиду различий свойств среды в направлениях, параллельном и перпендикулярном порам. За счет возможности изменять пористость образца, компоненты тензора диэлектрической проницаемости могут меняться в широких пределах.

Сравнение эффективных диэлектрических проницаемостей, вычисленных при помощи метода асимптотического осреднения, приближения Максвелла Гарнетта и модели Бруггемана, показало, что модель Бруггемана применима только при малых пористостях. Приближение Максвелла Гарнетта может быть использовано для вычисления эффективной диэлектрической проницаемости вплоть до значения пористости $p \approx 0.4$, но после этого значения также становится неприменимым. Из выполненных вычислений было установлено, что приближение Максвелла Гарнетта следует использовать с осторожностью при высоких пористостях, а модель Бруггемана не рекомендуется использовать при любых пористостях для таких структур при количественных вычислениях.

В длинноволновом приближении эффективный показатель преломления был вычислен для разных значений a/λ при фиксированных λ и p с использованием теоремы Блоха. Впервые было показано, что эффективный показатель преломления n_{eff} стремится к квазистатической диэлектрической проницаемости $\sqrt{\varepsilon_{eff}}$, вычисленной с использованием метода асимптотического осреднения при любой пористости в пределе $a/\lambda \to 0$. Данный результат показывает связь между двумя разными вычислительными методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. W. Milton, *The Theory of Composites*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).

2. M. Kadic, G. W. Milton, M. van Hecke, and M. Wegener, Nature Rev. Phys. **1**, 198 (2019).

3. A. Yariv and P. Yeh, *Optical Waves in Crystals*, Wiley, New York (1984).

4. K. Sakoda, *Optical Properties of Photonic Crystals*, Springer (2004).

5. В. Г. Веселаго, УФН **92**, 517 (1967).

6. D. R. Smith and N. Kroll, Phys. Rev. Lett. **85**, 2933 (2000).

7. L. Novotny and B. Hecht, *Principles of Nano-Optics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2012).

8. A. K. Sarychev and V. M. Shalaev, *Electrodynamics of Metamaterials*, World Sci. (2007).

9. A. P. Vinogradov, *Electrodynamics of Composite Materials*, URSS (2001).

10. V. A. Markel, J. Opt. Soc. Amer. A **33**, 1244 (2016).

11. V. A. Markel, J. Opt. Soc. Amer. A **33**, 2237 (2016).

12. A. Chipouline, C. Simovski, and S. Tretyakov, Metamaterials **6**, 77 (2012).

13. A. P. Vinogradov and A. M. Merzlikin, Metamaterials **6**, 121 (2012).

14. R. Landauer, AIP Conf. Proc. **40**, 2 (1978).

15. C. R. Simovski, Opt. Spectrosc. **107**, 726 (2009).

16. S. G. Moiseev, Physica B: Condens. Matter **405**, 3042 (2010).

17. K. Cherednichenko and S. Cooper, Mathematika **61**, 475 (2015).

18. L. D. Landau, J. S. Bell, M. J. Kearsley, L. P. Pitaevskii, E. M. Lifshitz, and J. B. Sykes, *Electrodynamics of Continuous Media*, Elsevier (2013).

19. Y. A. Ryzhov, V. V. Tamoikin, and V. I. Tatarskii, Sov. Phys. JETP **21**, 433 (1965).

20. N. S. Bakhvalov and G. Panasenko, *Homogenisation: Averaging Processes in Periodic Media: Mathematical Problems in the Mechanics of Composite Materials*, Springer (2012).

21. E. Sánchez-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer (1980).

22. D. J. Bergman, Phys. Rep. **43**, 377 (1978).

23. S. Rytov, Sov. Phys. JETP **2**, 466 (1956).

24. M. L. Levin, Zh. Tekh. Fiz. **18**, 1399 (1948).

25. А. П. Виноградов, А. В. Мерзликин, ЖЭТФ **121**, 565 (2002) [A. P. Vinogradov and A. V. Merzlikin, JETP **94**, 482 (2002)].

26. A. P. Vinogradov and A. M. Merzlikin, *Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials*, Springer (2002), pp. 341–361.

27. A. P. Vinogradov and A. M. Merzlikin, SPIE Proc. **4806**, 307 (2002).

28. N. A. Enkin, A. M. Merzlikin, and A. P. Vinogradov, J. Commun. Technol. Electron. **55**, 565 (2010).

29. A. M. Merzlikin and R. S. Puzko, Sci. Rep. **10**, 1 (2020).

30. C. R. Simovski, J. Commun. Technol. Electron. **52**, 953 (2007).

31. A. P. Vinogradov, A. I. Ignatov, A. M. Merzlikin, S. A. Tretyakov, and C. R. Simovski, Opt. Express **19**, 6699 (2011).

32. R. S. Puzko and A. M. Merzlikin, Opt. Commun. **383**, 323 (2017).

33. R. S. Puz'ko and A. M. Merzlikin, J. Commun. Technol. Electron. **61**, 1368 (2016).

34. H. Sohn, *Refractive Index of Porous Silicon*, ed. by L. Canham, *Handbook of Porous Silicon*, Springer (2014).

35. V. B. Novikov, A. I. Maydykovskiy, B. I. Mantsyzov, and T. V. Murzina, Phys. Rev. B **93**, 235420 (2016).

36. S. E. Svyakhovskiy et al., J. Russ. Laser Res. **36**, 588 (2015).

37. V. B. Novikov and T. V. Murzina, Opt. Lett. **42**, 1389 (2017).

38. J. J. Saarinen et al., Opt. Express **13**, 3754 (2005).

39. G. Bouchitté, S. Guenneau, and F. Zolla, Multiscale Modeling and Simulation **8**, 1862 (2010).

40. D. Felbacq and G. Bouchitté, Waves in Random Media **7**, 245 (1997).

41. G. Bouchitté and D. Felbacq, SIAM J. Appl. Math. **66**, 2061 (2006).

42. R. C. McPhedran et al., Proc. Roy. Soc. London, Ser. A: Math. Phys. Eng. Sci. **452**, 2231 (1996).

43. L. V. Rodríguez-de Marcos, J. I. Larruquert, J. A. Méndez, and J. A. Aznárez, Opt. Mater. Express **6**, 3622 (2016).

44. C. Schinke et al., AIP Advances **5**, 67168 (2015).

45. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, and K. T. Ngoan, Russ. Math. Surveys **34** (1979).