ЖЭТФ, 2022, том 162, вып. 3 (9), стр. 307–312

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФАЗА КАК ОСНОВА КВАНТОВОЙ ГИРОСКОПИИ

А. М. Ростом, В. А. Томилин, Л. В. Ильичёв*

Институт автоматики и электрометрии Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 8 апреля 2022 г.,
после переработки 8 апреля 2022 г.
Принята к публикации 24 мая 2022 г.

Перспективные подходы квантовой метрологии должны найти применение в новых типах гироскопов. В волновых схемах гироскопии, оптические реализации которых уже известны, в ближайшем будущем могут быть использованы макроскопические когерентные структуры атомарного конденсата Бозе–Эйнштейна. В предлагаемой в настоящей работе схеме, как и в ряде других, чувствительными к вращению элементами служат кольцевые конфигурации конденсата, нарушенные на некотором своем участке дополнительным потенциалом — «дефектом». Показано, что варьирование формы этого «дефекта» генерирует геометрическую фазу системы атомов кольцевой конфигурации. В двух таких конфигурациях единого конденсата можно получить противоположные геометрические фазы, разность которых обращается в нуль в отсутствие вращения и которая может быть обнаружена при последующем наблюдении интерференции атомов из разных конфигураций. Приведены результаты расчета геометрической фазы для модели «дефекта» в кольце диаметром 0.5 см, детектирующего вращение Земли вокруг своей оси.

DOI: 10.31857/S0044451022090024
EDN: EJLDRH

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптические гироскопы (и классические, и квантовые) основаны на эффекте Саньяка [1] — на измерении индуцированного им фазового сдвига интерференционной картины. Основная идея такого рода схем гироскопии может быть перенесена на системы с атомарным конденсатом Бозе–Эйнштейна (BEC), т. е. можно использовать в интерференции вместо оптических волн волны материи. При этом точность измерения увеличивается с увеличением числа атомов в конденсате. Прогресс в технологии создания когерентных пространственных конфигураций BEC позволяет в перспективе извлекать значение фазы Саньяка из картины интерференции конденсата.

Эффект Саньяка можно наблюдать в системе отсчета устройства с конденсатом при его вращении относительно инерциальной системы отсчета. Примером могут служить классические эксперименты по наблюдению интерференции волн материи [2–4]. Буквальное воспроизведение конструкции оптического интерферометра Саньяка при использовании атомарного конденсата является непростой задачей. В литературе в качестве одного из возможных решений предлагается использование интерференции конденсатов в нетривиальных пространственных конфигурациях, в частности, в оптических решетках [5,6]. Целесообразно рассмотреть схемы BEC-гироскопов, где возникновение фазы Саньяка и наблюдение интерференции связаны через некоторый дополнительный физический процесс, модифицирующий картину интерференции, например, сдвигающий ее. Если этот сдвиг чувствителен к вращению, из его величины можно извлечь значение угловой скорости вращения. В настоящей работе в качестве такого процесса предлагается использовать генерацию геометрической фазы в BEC. Геометрическая фаза является кинематической величиной, определяемой формой пути в пространстве параметров, по которому эволюционирует состояние системы, и не зависит от скорости этой эволюции [7].

Основную идею такого рода гироскопа можно представить следующим образом. Конденсат предполагается двухмодовым, и ориентация пространственных конфигураций мод по отношению к угловой скорости вращения $\mathbf{\Omega}$ системы отсчета конден-

* E-mail: 8342tomilin@mail.ru

сата относительно инерциальной системы такова, что вращение в разной степени сказывается на состояниях мод. Во всех остальных отношениях моды 1 и 2 эквивалентны. Предполагается, что одинаковым образом организованы и процессы генерации геометрических фаз в модах[1]. Однако различная восприимчивость мод к вращению приводит к различию возникающих геометрических фаз: $\vartheta_1 \neq \vartheta_2$. Состояние конденсата претерпевает изменение:

$$\sum_{n=0}^{N} f_n|n\rangle_1 \otimes |N-n\rangle_2 \mapsto \mapsto \sum_{n=0}^{N} f_n \exp(in\vartheta_1)|n\rangle_1 \otimes \otimes \exp\bigl(i(N-n)\vartheta_2\bigr)|N-n\rangle_2. \quad (1)$$

Здесь для простоты предполагается фиксированным полное число N частиц в конденсате, f_n — амплитуды вероятности распределений атомов по модам. Физически значимым является изменение относительных фаз этих амплитуд:

$$f_n \mapsto f_n \exp\bigl(in(\vartheta_1 - \vartheta_2)\bigr), \quad (2)$$

что модифицирует картину последующей интерференции атомов из мод 1 и 2. Существенно, что эта модификация обусловлена вращением устройства и обращается в нуль при $\mathbf{\Omega} = 0$.

В следующем разделе рассмотрена модель кольцевой пространственной конфигурации атомарного конденсата, чувствительной к вращению. Далее приведен пример генерации геометрической фазы в моде конденсата такой конфигурации. Как иллюстрация обрисованной выше гироскопической схемы сделаны численные расчеты с прицелом на регистрацию угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси.

2. КОЛЬЦЕВАЯ СТРУКТУРА ВЕС ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

В настоящей работе, как и в [8], элементом ВЕС-гироскопа, чувствительным к вращению относительно инерциальной системы отсчета, служит кольцевая конфигурация конденсата, нарушенная на некотором участке дополнительным потенциалом — «дефектом» (рис. 1). Структура дефекта в общем случае задает ориентацию на кольце. Это отражено на рис. 1 и крайне важно для предмета настоящей работы. Квазиодномерные бозе-газы являются популярной моделью в теории сверхтекучести и достаточно хорошо изучены [9–12]. Также в данный момент совершенствуются технологии их экспериментальной реализации [13]. В частности, в эксперименте уже возможно создание тороидальных оптических ловушек с хорошей пространственной локализацией в поперечном направлении [14]. Наличие «дефекта» обусловливает зависимость состояния конденсата от вращения, и эта зависимость максимальна, когда вектор угловой скорости вращения $\mathbf{\Omega}$ нормален плоскости кольца. В работе [8] при рассмотрении модели с «дефектом» в виде прямоугольного барьера или ямы была показана возможность сведения его к эффективному сингулярному потенциалу, что существенно упрощает рассмотрение.

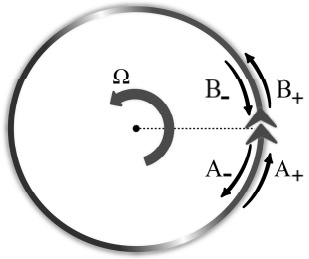

Рис. 1. Кольцевая конфигурация атомарного конденсата во вращающейся системе отсчёта. Показаны «дефект» конфигурации, задающий ориентацию, и амплитуды волн

В общем случае «дефект» может быть комбинацией нескольких барьеров и ям разной формы. В теоретической модели гироскопа очень удобным свойством явилась бы возможность конструировать «дефект» из отдельных базовых элементов с сохранением его эффективного локализованного характера (по крайней мере на первоначальном этапе рассмотрения). Этим условиям вполне удовлетворяет подход на основе трансфер-матриц [15]. Конструирование «дефекта» из отдельных элементов сводится к перемножению соответствующих трансфер-матриц, а эффективный точечный характер при этом сохраняется, если он имел место для используемых элементов.

Формализм трансфер-матриц, изначально созданный для задач оптики, вполне применим и в физике волн материи. Трансфер-матрица связывает амплитуды стационарных волн конденсата по разные стороны «дефекта». Описание этих волн необходимо осуществлять, находясь во вращающейся системе отсчета. Стационарная волновая функция $\Psi(\varphi)$ атома на кольце описывается урав-

[1] Имеются в виду геометрические фазы волновых функций одночастичных состояний мод. Для простоты исключаем взаимодействие между атомами конденсата.

нением Шредингера, содержащим в присутствии вращения добавочный член с первой производной по координате [8]:

$$\Psi''(\varphi) - 2i\xi\Psi'(\varphi) + \varepsilon\Psi(\varphi) = 0. \tag{3}$$

Это уравнение предполагается справедливым при $\varphi \neq 0 \pmod{2\pi}$, т. е. везде, кроме точки, где расположен «дефект»; $\varepsilon = 2mR^2E/\hbar^2$ — безразмерная энергия (m — масса атома, R — радиус кольца); $\xi = mR^2\Omega/\hbar$ — параметр, отражающий вращение системы отсчета кольца с BEC. При $\varepsilon \geqslant -\xi^2$ решением уравнения (3) является пара встречных волн $\propto \exp(i\kappa_\pm\varphi)$, где

$$\kappa_\pm \equiv \kappa_\pm(\xi) = \xi \pm \sqrt{\xi^2 + \varepsilon}. \tag{4}$$

На рис. 1 введены амплитуды $A_\pm$ и $B_\pm$ соответствующих волн по обе стороны «дефекта»:

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\mathcal{M}$ — трансфер-матрица «дефекта». Как известно [15], она принадлежит группе $SU(1,1)$ псевдоунитарных унимодулярных матриц:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} u & v \\ \overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $|u|^2 - |v|^2 = 1$ (черта над символом обозначает комплексное сопряжение). Предполагаем, что зависимость параметров u и v от ε известна. Вид матрицы $\mathcal{M}$ одинаков и в инерциальной, и во вращающейся системах отсчета[2)].

Величины $A_\pm$ и $B_\pm$ связаны также условием цикличности на кольце:

$$A_\pm = B_\pm \exp(2\pi i\kappa_\pm). \tag{7}$$

Далее будут использоваться обозначения $\psi_+ = B_+$ и $\psi_- = B_-$. Условие цикличности с участием трансфер-матрицы:

$$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \psi_+ \exp(2\pi i\kappa_+) \\ \psi_- \exp(2\pi i\kappa_-) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

[2)] Можно было бы предположить, что во вращающейся системе отсчета трансфер-матрица имеет иной вид: $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\xi) \neq \mathcal{M}(0)$. Вывод ее зависимости от угловой скорости опирается на факт инвариантности свойств дефекта относительно обращения времени (что эквивалентно замене $\xi \to -\xi$) и закон сохранения потока, выполняющийся в любой системе отсчета. Из уравнения (3) следует, что во вращающейся системе отсчета этот закон имеет вид $\kappa_+|A_+|^2 + \kappa_-|A_-|^2 - \xi(|A_+|^2 + |A_-|^2) = \kappa_+|B_+|^2 + \kappa_-|B_-|^2 - \xi(|B_+|^2 + |B_-|^2)$, что с учетом (4) сводится к обычному соотношению $|A_+|^2 - |A_-|^2 = |B_+|^2 - |B_-|^2$, справедливому в инерциальной системе отсчета. Следовательно, вид трансфер-матрицы в обеих системах отсчета одинаков.

Требование разрешимости этого соотношения приводит к уравнению для уровней энергии атома:

$$\cos(2\pi\xi) = \mathrm{Re}\big[u \exp(2\pi i\sqrt{\xi^2 + \varepsilon})\big]. \tag{9}$$

Это уравнение обобщает соотношение из работы [8], полученное для «дефекта» в виде δ-образного потенциала.

3. ГЕНЕРАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФАЗЫ

Амплитуды $\psi_\pm$ зависят не только от ε и ξ, но и от совокупности $\mathbf{p}$ остальных параметров трансфер-матрицы. От $\mathbf{p}$ зависит также и само значение ε как решение уравнения (9).

Предполагаем, что некоторый замкнутый путь в пространстве параметров $\mathbf{p}$ обходится достаточно медленно (адиабатически) так, что изначально выбранное решение $\Psi_{\mathbf{p}_0}(\varphi)$ уравнения (3) с энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}_0}$ остается решением $\Psi_{\mathbf{p}}(\varphi)$ уравнения (3) с энергией $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ в любой точке пути. Обход порождает геометрическую фазу [16]

$$\vartheta = \frac{i}{2} \oint \frac{\langle \Psi_{\mathbf{p}} | \nabla_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}} \rangle - \langle \nabla_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}} | \Psi_{\mathbf{p}} \rangle}{\langle \Psi_{\mathbf{p}} | \Psi_{\mathbf{p}} \rangle} \, d\mathbf{p}. \tag{10}$$

В общем случае эта фаза чувствительна к вращению: $\vartheta = \vartheta(\xi)$ и $\vartheta(\xi)\,|_{\xi\neq 0} \neq \vartheta(0)$.

Для иллюстрации данной схемы будут использованы две из трех канонических трансфер-матриц [15], к произведению которых может быть сведена любая матрица $\mathcal{M} \in SU(1,1)$:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\eta) & i\,\mathrm{sh}(\eta) \\ -i\,\mathrm{sh}(\eta) & \mathrm{ch}(\eta) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\eta)e^{i\alpha} & i\,\mathrm{sh}(\eta)e^{i\alpha} \\ -i\,\mathrm{sh}(\eta)e^{-i\alpha} & \mathrm{ch}(\eta)e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Уравнение (9) в данном случае принимает вид

$$\cos(2\pi\xi) = \mathrm{ch}(\eta)\cos\big(2\pi\sqrt{\xi^2 + \varepsilon} + \alpha\big). \tag{12}$$

Пространство параметров является бесконечным цилиндром: $-\infty < \eta < \infty$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Окружность α выбрана в качестве пути обхода. Нетрудно убедиться, что при таком выборе пути обхода в принятой нами модели одномерного кольца $\vartheta(0) \equiv 0$, а $\vartheta(-\xi) = -\vartheta(\xi)$. Необходимые соотношения представлены в Приложении.

На рис. 2 воспроизведена возможная схема регистрирующей части двухмодового BEC-гироскопа (схема последующего наблюдения интерференции

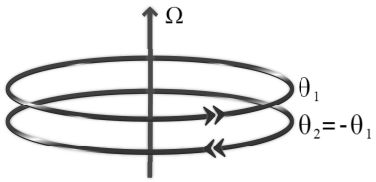

Рис. 2. Комбинация двух противоположно ориентированных кольцевых конфигураций атомарного конденсата. Возникающие геометрические фазы различаются знаком

атомов разных мод не рассматривается). Обе моды имеют конфигурацию кольца с «дефектом». Противоположная ориентация второго кольца задается изменением порядка матричных сомножителей в средней части выражения (11). Расположив оба кольца перпендикулярно вектору $\mathbf{\Omega}$ угловой скорости вращения и реализовав эволюцию α по единому замкнутому контуру, мы получим преобразования (1) состояния конденсата с $\vartheta_1 = \vartheta(\xi)$, $\vartheta_2 = -\vartheta(\xi)$. Данный выбор конфигурации мод обладает еще одним важным преимуществом — динамические фазы, пропорциональные $\int \varepsilon_{\mathbf{p}(t)}\, dt$ и приобретаемые ими в результате эволюции, оказываются одинаковыми и компенсируют друг друга в разности $\vartheta_1 - \vartheta_2$. Итоговая регистрируемая разность фаз $\vartheta_1 - \vartheta_2$ не будет содержать в себе следов динамической фазы, а сведется к удвоенной фазе $\vartheta(\xi)$. Подобный прием ранее использовался в работе [17], посвященной переносу геометрической фазы с оптической моды на состояние двухмодового атомарного конденсата через канал квантовой запутанности.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Оставшимся свободным параметром при определении контура эволюции потенциального дефекта является η. На рис. 3*a* приведена зависимость разности геометрических фаз, приобретаемых модами конденсата, от значения угловой скорости вращения и параметра η. Видно, что наибольшее по величине значение этой разности наблюдается при малых η. С учетом цикличности фазы значение $\vartheta_1 - \vartheta_2 = \pi$ должно отвечать наиболее резкой модификации состояния конденсата[3)]. На рис. 3*a* выделена кривая, соответствующая этому значению.

При решении реальной задачи об определении угловой скорости необходимо знать зависимость от нее регистрируемой фазы при известном значении параметров потенциала. Эта зависимость приведена на рис. 3*b*. Видно, что при малых значениях η фаза мало чувствительна к изменению связанного с угловой скоростью безразмерного параметра ξ. Следовательно, существует некоторое оптимальное значение параметра η, обеспечивающее одновременно значительную величину геометрической фазы и ее чувствительность к угловой скорости. В частности, для рассматриваемого примера определения угловой скорости вращения Земли (см. Приложение) оптимальным для точности измерения оказывается значение $\eta \simeq 1$. Точность измерения вдвое меньшего значения угловой скорости ($\xi \simeq 0.2$) при $\eta = 1$ оказывается низкой, но снова возрастает при дальнейшем уменьшении ξ.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена модель квантового гироскопа, основанного на использовании геометрической фазы атомарного бозе-конденсата. Измерение угловой скорости вращения осуществляется парой пространственных мод единого когерентного конденсата, имеющих вид кольцеобразных конфигураций, нарушенных дополнительными потенциалами — «дефектами». Последние обеспечивают чувствительность состояния конденсата к вращению системы отсчета всего устройства. Варьирование параметров «дефектов» приводит к возникновению геометрической фазы в каждой моде. Разность этих фаз оказывается зависящей от вращения и может быть обнаружена в интерференционном эксперименте. В основе отмеченной чувствительности состояния конденсата к вращению лежит прямой (нерелятивистский) аналог эффекта возникновения фазы Саньяка в оптических гироскопах. Получается, что процесс генерации геометрической фазы опосредует эффект изначального влияния вращения на состояние конденсата и процесс регистрации сдвига картины интерференции конденсата. Развит формализм описания «дефекта» на основе трансфер-матриц. Показано, что существует оптимальный для измерения фазы диапазон параметров, характеризующих «дефект».

В работе использована модельная форма трансфер-матрицы дефекта. Более интересной с практической точки зрения может оказаться комбинация потенциального барьера и ямы. Такой «дефект» также обладает необходимым свойством — задает ориентацию кольца. Геометрическая

[3)] Заметим, что при симметрии между модами, т. е. в случае $f_n = \sqrt{N!/(n!(N-n)!)}$ в выражении (1), модификация $f_n \mapsto \exp(i\pi n) f_n$ переводит состояние конденсата в ортогональное.

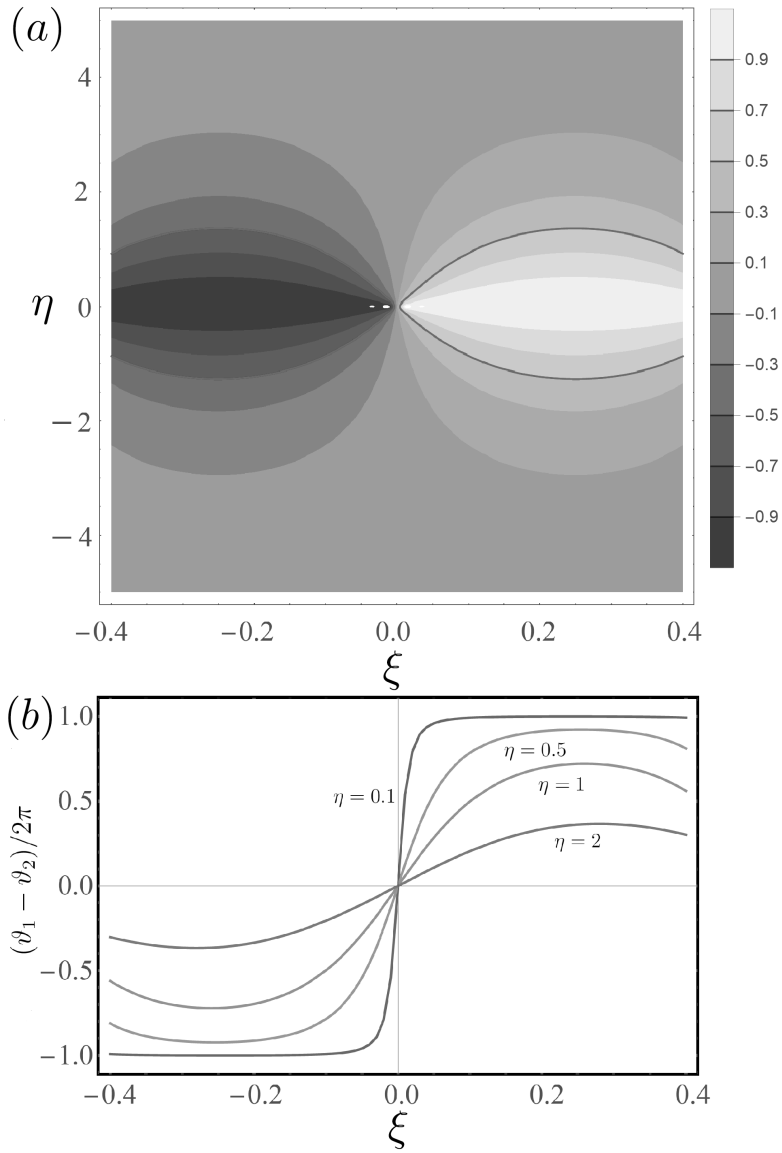

Рис. 3. (В цвете онлайн) (*a*) Разность геометрических фаз, приобретаемых модами конденсата, в зависимости от безразмерной угловой скорости ξ и от характеристики потенциального дефекта η (в единицах 2π). Красная жирная линия соответствует уровню π. (*b*) Профили разности геометрических фаз, приобретаемых модами конденсата, в зависимости от безразмерной угловой скорости ξ (в единицах 2π) при различных значениях параметра потенциального дефекта η. Параметры задачи: радиус кольца $R = 0.25$ см, $m = m(^{37}\mathrm{Rb})$

фаза может генерироваться при обходе контура в двумерном пространстве параметров «глубина ямы–высота барьера».

Финансирование. Работа выполнена в рамках Государственного задания (проект АААА-А21-121021800168-4) в Институте автоматики и электрометрии СО РАН. Участие одного из авторов (И. Л. В.) поддержано Российским научным фондом (грант 20-12-00081).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Уравнение (12) для уровней энергии имеет две ветви решений:

$$\begin{aligned} 2\pi\sqrt{\xi^2+\varepsilon_n^{(+)}} &= \arccos\Big(\frac{\cos(2\pi\xi)}{\mathrm{ch}(\eta)}\Big) - \alpha + 2\pi n, \\ 2\pi\sqrt{\xi^2+\varepsilon_n^{(-)}} &= -\arccos\Big(\frac{\cos(2\pi\xi)}{\mathrm{ch}(\eta)}\Big) - \alpha + 2\pi n. \end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку нет необходимости заботиться о нормировке волновой функции, можно положить $\psi_- = 1$, тогда

$$\psi_+(\alpha) = \frac{i\,\mathrm{sh}(\eta)\exp(i\alpha + 2\pi i\kappa_-)}{1 - \mathrm{ch}(\eta)\exp(i\alpha + 2\pi i\kappa_+)}. \qquad (14)$$

Используя вспомогательное равенство $\dot{\kappa}_\pm = \mp 1/2\pi$, можно получить следующие соотношения для функций, входящих в выражение для геометрической фазы:

$$\begin{aligned}\langle\Psi_\alpha|\Psi_\alpha\rangle = 2\pi\big(1 + |\psi_+(\alpha)|^2\big) + \\ + \frac{i\overline{\psi}_+(\alpha)}{2\sqrt{\xi^2+\varepsilon}}\big(\exp(-4\pi i\sqrt{\xi^2+\varepsilon}) - 1\big) - \\ - \frac{i\psi_+(\alpha)}{2\sqrt{\xi^2+\varepsilon}}\big(\exp(4\pi i\sqrt{\xi^2+\varepsilon}) - 1\big), \qquad (15)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\Psi_\alpha|\dot{\Psi}_\alpha\rangle - \langle\dot{\Psi}_\alpha|\Psi_\alpha\rangle = 2\pi i + 6\pi i|\psi_+(\alpha)|^2 - \\ - \frac{1}{\sqrt{\xi^2+\varepsilon}}\big[\overline{\psi}_+(\alpha)\big(\exp(-4\pi i\sqrt{\xi^2+\varepsilon}) - 1\big) - \\ - \psi_+(\alpha)\big(\exp(4\pi i\sqrt{\xi^2+\varepsilon}) - 1\big)\big].\end{aligned}$$

Значение $\sqrt{\xi^2+\varepsilon}$ определяется выбором ветви и номера решения (13). В их записи неявно полагается, что подкоренное выражение принимает действительные значения. Для конденсата атомов ^{37}Rb в кольце радиуса $R = 0.25$ см, вращающегося с угловой скоростью Ω порядка угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси, безразмерный параметр ξ оказывается равным 0.392. Если $\alpha \in [0, 2\pi)$, то вышеуказанному требованию в диапазоне параметров $-0.392 \leqslant \xi \leqslant 0.392$ удовлетворяет решение $\varepsilon_1^{(+)}$. Именно оно и было выбрано для вычисления геометрической фазы.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Sagnac, C. R. Acad. Sci. **157**, 708 (1913); **157**, 1410 (1913); J. de Phys. **4**, 177 (1914).
2. T. L. Gustavson, P. Bouyer, and T. L. Kasevich, Phys. Rev. Lett. **78**, 2046 (1997).
3. A. Lenef T. D. Hammond, E. T. Smith, M. S. Chapman, R. A. Rubenstein, and D. E. Pritchard, Phys. Rev. Lett. **78**, 760 (1997).
4. D. S. Durfee, Y. K. Shaham, and M. A. Kasevich, Phys. Rev. Lett. **97**, 240801 (2006).
5. M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch, and T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **87**, 160405 (2001).
6. Z. Hadzibabic, S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. **93**, 180403 (2004).
7. M.V. Berry, Proc. Roy. Soc. London A **392**, 45 (1984).
8. В. А. Томилин, Л. В. Ильичёв, Письма в ЖЭТФ **113**, 212-217 (2021).
9. D. W. Hallwood, T. Ernt, and J. Brand, Phys. Rev. A **82**, 063623 (2010).
10. M. Cazalilla, J. Phys. B **37**, 1 (2004).
11. D. Hellweg, S. Dettmer, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, and M. Lewenstein, Appl. Phys. B **73**, 781 (2001).
12. S. Richard, F. Gerbier, J. H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect, Phys. Rev. Lett. **91**, 010405 (2003).
13. C. Ryu, P. W. Blackburn, A. A. Blinova, and M. G. Boshier, Phys. Rev. Lett. **111**, 205301 (2013).
14. A. Görlitz, J. M. Vogels, A. E. Leanhardt, C. Raman, T. L. Gustavson, J. R. Abo-Shaeer, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, T. Rosenband, and W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001).
15. L. L. Sanchez-Soto, J. J. Monzón, A. G. Barriuso, and J. F. Cari nena, Phys. Rep. **513**, 191 (2012).
16. D. Chruscinski and A. Jamiolkowski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Springer, Berlin (2004).
17. T. S. Yakovleva, A. M. Rostom, V. A. Tomilin, and L. V. Il'ichov, Opt. Comm. **436**, 52 (2019).