

# ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ ОБЛАКОВ СОЛИТОННЫХ ГАЗОВ

А. М. Камчатнов <sup>a\*</sup>, Д. В. Шайкин <sup>b\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Институт спектроскопии Российской академии наук  
108840, Москва, Троицк, Россия*

<sup>b</sup> *Московский физико-технический институт  
141701, Долгопрудный, Московская обл., Россия*

Поступила в редакцию 06 июня 2022 г.,  
после переработки 06 июня 2022 г.  
Принята к публикации 24 июня 2022 г.

На основе связи кинетического уравнения, описывающего взаимодействие двух солитонных облаков в теории уравнения Кортевега–де Фриза, с уравнениями динамики для газа Чаплыгина показано, что фундаментальным свойством нелинейной динамики солитонных газов является существование волн, распространяющихся без изменения формы. Приведены решения нескольких типичных задач динамики солитонных газов и указаны характерные черты такой динамики, позволяющие дать оценку эффектов взаимодействия солитонных газов.

DOI: 10.31857/S0044451022110207  
EDN: BHFAX

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, солитоны получили свое название [1] по аналогии с названиями элементарных частиц (электрон, протон и т.п.) в силу их упругого взаимодействия друг с другом для важного класса нелинейных волновых уравнений. А именно, две уединенные волны, находящиеся до их «столкновения» вдали друг от друга, пройдя через стадию взаимодействия, возвращаются к своей первоначальной форме без образования каких-либо дополнительных волн. Тем не менее акт их взаимодействия не проходит совсем бесследно и в результате него траектории солитонов приобретают дополнительные сдвиги по сравнению с их первоначальными траекториями [2]. Например, в случае уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), являющегося универсальным волновым уравнением для описания волн с учетом малых эффектов нелинейности и дисперсии, которое мы запишем в стандартных безразмерных переменных,

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

солитонное решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{\kappa^2}{2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2[\kappa(x - \kappa^2 t - x_0)/2]}, \quad (2)$$

т.е. скорость солитона  $s = \kappa^2$  пропорциональна его амплитуде  $a = \kappa^2/2$ . Если в начальный момент времени волновое возбуждение может быть представлено с хорошей точностью в виде двух удаленных друг от друга солитонных импульсов (2), причем более быстрый солитон с параметром  $\kappa = \kappa_2$  имеет начальную координату  $x_{02}$  левее координаты  $x_{01}$  более медленного солитона с параметром  $\kappa_1$  ( $\kappa_1 < \kappa_2$ ), то их первоначальные траектории  $x = \kappa_1^2 t + x_{01}$ ,  $x = \kappa_2^2 t + x_{02}$  приобретут после столкновения сдвиги

$$x = \kappa_1^2 t + x_{01} + \Delta x_1, \quad x = \kappa_2^2 t + x_{02} + \Delta x_2,$$

где

$$\Delta x_1 = -\frac{2}{\kappa_1} \ln \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}, \quad \Delta x_2 = \frac{2}{\kappa_2} \ln \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1}. \quad (3)$$

Таким образом, быстрый солитон с большой амплитудой сдвигается вперед, а медленный и низкий — назад, причем по абсолютной величине сдвиг низкого больше, чем сдвиг высокого. Замечательно, что для важного класса интегрируемых уравнений могут быть получены решения с любым числом солитонов. При этом в результате одновременного столкновения трех или большего их числа суммарный

\* E-mail: kamch@isan.troitsk.ru

\*\* E-mail: shaykin.dv@phystech.edu

сдвиг каждого солитона равен сумме сдвигов вида (3) для парных столкновений (см., например, [3, 4]), т.е. множественные столкновения солитонов одновременно в одной области пространства не отличаются в этом смысле от последовательных пространственно разделенных парных столкновений солитонов друг с другом.

Представим теперь, что в нашей волновой системе возбуждено очень большое число солитонов, каждый из которых характеризуется своим параметром  $\kappa$ . Тогда можно говорить о газе солитонов и использовать для его описания представления газовой кинетики. Если обозначить через  $f(\kappa, x, t) dx d\kappa$  число солитонов с координатами в интервале  $(x, x + dx)$ , которые имеют параметр  $\kappa$  в интервале  $(\kappa, \kappa + d\kappa)$  в момент времени  $t$ , то эволюция такого газа характеризуется зависимостью функции распределения  $f(\kappa, x, t)$  по координате и параметру  $\kappa$  от времени. Задача найти кинетические уравнения для такой эволюции была поставлена Захаровым в работе [5] и решена им для разреженного газа солитонов, когда их столкновения друг с другом в среднем мало изменяют скорости  $s = \kappa^2$ . Позже Эль, исследуя специальный предел модуляционных уравнений Уизема для бесконечнофазного решения уравнения КдФ, получил в работе [6] обобщение кинетического уравнения Захарова на плотный солитонный газ. Более простой вывод этого уравнения на основе самосогласованного определения средней скорости солитона, движущегося сквозь газ, был дан в работе [7] и там же было получено простейшее решение этих уравнений, описывающее столкновение двух облаков солитонных газов, в каждом из которых параметры  $\kappa$  близки друг к другу. Формальные решения для любого числа таких облаков изучались в работах [8, 9]. В настоящее время теория кинетических уравнений для солитонов стала частью активно развивающейся так называемой «обобщенной гидродинамики», которая находит приложения к различным интегрируемым моделям систем многих взаимодействующих частиц (см., например, обзоры [10, 11] и имеющиеся там ссылки). Однако, несмотря на такой значительный формальный прогресс, физическое понимание поведения солитонных газов представляется недостаточным, так как до сих пор имеется лишь очень небольшое число решенных задач, дающих представление о характерных чертах динамики взаимодействующих солитонных газов. В то же время в настоящее время начались экспериментальные исследования динамики солитонных газов в различных физических системах, включая волны на воде и холодные атомы (см.,

например, [12–14]), что требует создания ясной картины динамики солитонных газов. В данной статье мы представим несколько примеров такой типичной динамики, которые позволяют понять некоторые существенные свойства газовой динамики солитонов, отличающие ее от динамики обычных газов.

## 2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГАЗА СОЛИТОНОВ

Сначала приведем для полноты краткий вывод кинетического уравнения для солитонного газа КдФ, следуя методу работы [7]. Прежде всего заметим, что в силу интегрируемости уравнения КдФ, открытой в работе [15], эволюция волны  $u(x, t)$  происходит таким образом, что спектр задачи на собственные значения для ассоциированного с уравнением КдФ стационарного уравнения Шрёдингера  $\psi_{xx} = -(u(x, t) + \lambda)\psi$  не зависит от времени  $t$  и каждому солитону отвечает некоторое значение  $\lambda < 0$  дискретного спектра. Более удобный параметр  $\kappa$ , использованный в записи солитонного решения в виде (2), связан с  $\lambda$  соотношением  $\kappa = \sqrt{-\lambda}$ . Следовательно, при эволюции волны согласно уравнению КдФ как спектр, так и набор значений  $\kappa$  при движении солитонов, сопровождаемом их столкновениями, не изменяется. Если бы солитоны при их столкновениях не претерпевали сдвигов (3), то их скорости выражались бы формулой  $s = \kappa^2$  для всех солитонов с параметром  $\kappa$ . Однако столкновения модифицируют эту скорость. При каждом столкновении солитона с более медленными солитонами, имеющими параметр  $\eta < \kappa$ , «пробный»  $\kappa$ -солитон продвигается вперед на дополнительное расстояние

$$\frac{2}{\kappa} \ln \frac{\kappa + \eta}{\kappa - \eta},$$

и число таких столкновений в единицу времени равно относительной скорости  $s(\kappa) - s(\eta)$ , умноженной на плотность  $\eta$ -солитонов. Следовательно, благодаря таким столкновениям  $\kappa$ -солитон приобретает добавку к скорости

$$\int_0^{\kappa} \frac{2}{\kappa} \ln \frac{\kappa + \eta}{\kappa - \eta} [s(\kappa) - s(\eta)] f(\eta) d\eta. \quad (4)$$

Аналогичным образом каждый солитон с параметром  $\eta > \kappa$ , обгоняющий «пробный»  $\kappa$ -солитон, сме-

щает его за единицу времени назад на расстояние

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\kappa}^{\infty} \frac{2}{\kappa} \ln \frac{\eta + \kappa}{\eta - \kappa} [s(\eta) - s(\kappa)] f(\eta) d\eta = \\
 & = \int_{\kappa}^{\infty} \frac{2}{\kappa} \ln \left| \frac{\kappa + \eta}{\kappa - \eta} \right| [s(\kappa) - s(\eta)] f(\eta) d\eta,
 \end{aligned}$$

получаемое умножением сдвига  $-\frac{2}{\kappa} \ln \frac{\eta + \kappa}{\eta - \kappa}$  при единичном столкновении на число таких столкновений  $[s(\eta) - s(\kappa)] f(\eta)$  и интегрированием по значениям  $\eta > \kappa$ . Прибавляя эти добавки к немодифицированному значению скорости  $\kappa^2$ , получаем самосогласованное уравнение

$$s(\kappa) = \kappa^2 + \frac{2}{\kappa} \int_0^{\infty} \ln \left| \frac{\kappa + \eta}{\kappa - \eta} \right| [s(\kappa) - s(\eta)] f(\eta) d\eta. \quad (5)$$

Таким образом, функция распределения солитонов с параметром  $\kappa$  переносится вдоль оси  $x$  со скоростью  $s(\kappa)$ , определяемой интегральным уравнением (5), и условие сохранения спектра при эволюции волны согласно уравнению КдФ записывается в виде закона сохранения:

$$\frac{\partial f(\kappa, x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [s(\kappa) f(\kappa, x, t)]}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение, дополненное интегральным уравнением (5), называется кинетическим уравнением для газа солитонов КдФ, и оно было другим способом получено в работе Эля [6]. Отметим, что учет лишь парных столкновений в уравнении (5) в плотном солитонном газе оправдывается упомянутым выше сложением сдвигов при кратных столкновениях солитонов.

Если газ солитонов разреженный, т.е.  $\int f(\kappa) d\kappa \ll \kappa_0$ , где  $\kappa_0$  — характерное значение параметра  $\kappa$  в распределении  $f(\kappa)$ , то поправочный член в формуле (5) мал и в него можно подставить немодифицированное значение  $s(\kappa) \approx \kappa^2$ :

$$s(\kappa) = \kappa^2 + \frac{2}{\kappa} \int_0^{\infty} \ln \left| \frac{\kappa + \eta}{\kappa - \eta} \right| (\kappa^2 - \eta^2) f(\eta) d\eta. \quad (7)$$

Это выражение определяет функцию  $s(\kappa)$  замкнутой формулой в отличие от интегрального уравнения (5) для плотного газа солитонов. Система (6), (7) была получена Захаровым в работе [5] вместе со сформулированным здесь подходом к кинетике газа солитонов. Ясно, что такого рода кинетические уравнения могут быть получены и для других полностью интегрируемых уравнений с изоспектральной эволюцией нелинейных волн.

### 3. ДВУХПОТОКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ СОЛИТОННЫХ ГАЗОВ

Чтобы получить представление о динамике солитонных газов согласно кинетическому уравнению (5), (6), предположим, что функция распределения имеет два очень узких пика вблизи значений  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , т.е. ее можно представить в виде

$$f(\kappa, x, t) = f_1(x, t) \delta(\kappa - \kappa_1) + f_2(x, t) \delta(\kappa - \kappa_2). \quad (8)$$

Это означает, что мы рассматриваем динамику взаимодействующих газов на временах, когда столкновениями солитонов одного сорта с очень близкими скоростями можно пренебречь и учитывать только столкновения между солитонами разных сортов. Тогда подстановка функции распределения (8) в (6) и (7) дает законы сохранения

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial (s_1 f_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial (s_2 f_2)}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

где скорости  $s_1, s_2$  удовлетворяют уравнениям

$$s_1 = \kappa_1^2 + \alpha_1 f_2 (s_1 - s_2), \quad s_2 = \kappa_2^2 + \alpha_2 f_1 (s_2 - s_1), \quad (10)$$

и мы ввели для удобства обозначения

$$\alpha_1 = \frac{2}{\kappa_1} \ln \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right|, \quad \alpha_2 = \frac{2}{\kappa_2} \ln \left| \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} \right|. \quad (11)$$

Уравнения (10) позволяют выразить перенормированные скорости через плотности солитонных газов:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{\kappa_1^2 (1 - \alpha_2 f_1) - \kappa_2^2 \alpha_1 f_2}{1 - \alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_1}, \\
 s_2 &= \frac{\kappa_2^2 (1 - \alpha_1 f_2) - \kappa_1^2 \alpha_2 f_1}{1 - \alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_1}.
 \end{aligned} \quad (12)$$

Если же выразить из (10) плотности  $f_{1,2}$  через скорости  $s_{1,2}$ ,

$$f_1 = \frac{s_2 - \kappa_2^2}{\alpha_2 (s_2 - s_1)}, \quad f_2 = \frac{\kappa_1^2 - s_1}{\alpha_1 (s_2 - s_1)}, \quad (13)$$

и подставить эти выражения в (9), то эта система приводится к замечательно простому диагональному виду:

$$\frac{\partial s_1}{\partial t} + s_2 \frac{\partial s_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial s_2}{\partial t} + s_1 \frac{\partial s_2}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

где перенормированные скорости  $s_1, s_2$  являются римановыми инвариантами этой системы уравнений гидродинамического типа.

Формально уравнения (14) похожи на уравнения газовой динамики в римановой форме, но физические свойства солитонного газа весьма отличны от

свойств обычного газа. Прежде всего заметим, что, хотя скорости солитонов перенормируются в области перекрытия солитонных облаков, такое изменение скорости нельзя интерпретировать как ускорение солитонов под действием давления: после выхода из области перекрытия их скорости восстанавливают свои первоначальные значения. Далее, газы свободно протекают сквозь друг друга с перенормированными скоростями, не испытывая никаких диссипативных процессов. При этом динамические уравнения (9) имеют форму законов сохранения и, как и в теории вязких ударных волн, допускают разрывные решения. Наконец, в нашем случае можно считать, что солитонные газы имеют нулевую температуру, так что переход через разрыв не связан с увеличением энтропии, т.е. теорема Жуге–Цемплена (см., например, [16]) неприменима и разрыв может иметь любой знак. Из этого же следует, что существование таких формально разрывных течений не связано с опрокидыванием солитонного импульса и последующим формированием узкого переходного слоя, связывающего два течения с разными параметрами, как это происходит в теории вязких ударных волн. Прояснить этот вопрос помогает связь уравнений (14) с теорией газа Чаплыгина. В работе [17] Чаплыгин указал, что уравнение состояния газа

$$p = A - \frac{B}{\rho} \tag{15}$$

( $p$  — давление газа,  $\rho$  — его плотность,  $A, B$  — постоянные параметры) может служить удобным приближением на отдельных участках адиабаты Пуассона, когда формулы теории значительно упрощаются. (Обратим внимание, что им также была отмечена связь уравнений газовой динамики для этого случая с теорией минимальных поверхностей). Мы, однако, подойдем к теории газа Чаплыгина с другой стороны.

Еще на первоначальном этапе создания теории ударных волн в работах Стокса и Кельвина обсуждался вопрос, допускают ли уравнения газовой динамики

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho} \rho_x = 0 \tag{16}$$

( $c^2 = dp/d\rho$ ,  $c$  — скорость звука) решения в виде стационарной распространяющейся волны. При такой постановке вопроса ясно, что в стационарном решении как плотность  $\rho$ , так и скорость течения  $u$  являются функциями только координаты,  $\xi = x - Vt$ , т.е. они связаны друг с другом однозначной зависимостью. Следовательно, такое решение должно быть

простой волной и выражаться формулой Пуассона (см. [16])

$$\rho = \rho_0[x - (c + u)t], \tag{17}$$

$\rho_0(x)$  — профиль плотности в такой волне, распространяющейся со скоростью  $c + u$ . При этом связь между  $\rho$  и  $u$  выражается условием постоянства риманова инварианта:

$$u - \int c d\rho / \rho = r_- = \text{const.}$$

Для существования волны со стационарным профилем необходимо, чтобы выполнялось условие  $c + u = \text{const.}$  Подставляя сюда соотношения

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}, \quad u = \int_0^\rho \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \frac{d\rho}{\rho} + \text{const.},$$

получаем после дифференцирования по  $\rho$  уравнение для допускающих стационарную волну уравнений состояния газа  $p = p(\rho)$ :

$$\frac{d^2 p}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dp}{d\rho} = 0.$$

Это уравнение легко решается и дает как раз указанную выше зависимость (15). Приняв для простоты  $B = 1$ , мы тогда имеем  $c^2 = dp/d\rho = 1/\rho^2$ ,  $c = 1/\rho$  и римановы инварианты (см. [16]) оказываются равными

$$\begin{aligned} s_1 &= u + \int \frac{cd\rho}{\rho} = u - \frac{1}{\rho}, \\ s_2 &= u - \int \frac{cd\rho}{\rho} = u + \frac{1}{\rho}, \end{aligned} \tag{18}$$

где  $u$  и  $\rho$  подчиняются уравнениям Эйлера для газа Чаплыгина

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad u_t + uu_x + \frac{\rho_x}{\rho^3} = 0 \tag{19}$$

и выражаются через римановы инварианты как

$$\rho = \frac{2}{s_2 - s_1}, \quad u = \frac{1}{2}(s_2 + s_1). \tag{20}$$

Если переписать уравнения (19) через римановы инварианты (18), то простые вычисления приводят к уравнениям для динамики газа Чаплыгина в диагональной римановой форме, совпадающей с уравнениями (14), описывающими динамику двух взаимодействующих солитонных газов.

Если теперь мы будем искать решение уравнений (19) в виде бегущей с постоянной скоростью  $V$  волны  $\rho = \rho(\xi)$ ,  $u = u(\xi)$ ,  $\xi = x - Vt$ , то легко найдем, что эти уравнения удовлетворяются при любой

функции  $\rho(\xi)$ , если скорость течения газа Чаплыгина выражается через  $\rho(\xi)$  формулой

$$u(\xi) = V + \frac{1}{\rho(\xi)}. \tag{21}$$

В этом случае инварианты Римана равны

$$s_1 = V, \quad s_2 = V + \frac{2}{\rho(\xi)}. \tag{22}$$

Очевидно, что эти формулы дают решение уравнений (14) в виде простой волны: если положить, например,  $s_1 = V = \text{const}$ , то второе уравнение превращается в  $s_{2,t} + Vs_{2,x} = 0$  с общим решением  $s_2 = F(x - Vt)$ , что совпадает с (22), если записать функцию  $F(\xi)$  в виде  $F(\xi) = V + 2/\rho(\xi)$ . В частности, функция  $F(\xi)$  может включать в себя разрыв, распространяющийся без изменения формы в области перекрытия двух газов.

Связь между уравнениями для газа Чаплыгина и кинетическим уравнением, описывающим динамику двух взаимодействующих солитонных облаков, позволяет строить поучительные примеры решений кинетического уравнения.

#### 4. СТОЛКНОВЕНИЕ ДВУХ СОЛИТОННЫХ ГАЗОВ

Уравнения (14) имеют очевидное вырожденное решение, в котором  $s_1$  и  $s_2$  являются постоянными, не зависящими ни от  $x$ , ни от  $t$ . Несмотря на тривиальность этого решения, оно имеет ясное физическое содержание: оно может служить «плато», соединяющим два указанных выше решения в виде простых волн. В частности, при столкновении двух проникающих друг в друга газов с постоянными плотностями  $f_1, f_2$  и, значит, значениями римановых инвариантов  $s_1, s_2$ , образуется область двухпоточкового течения, в которой скорости солитонов одного сорта перенормируются вследствие их взаимодействия с солитонами другого сорта. Таким образом, задача о столкновении двух газов заключается в нахождении плотностей и скоростей солитонов в области их «перемешивания», а также скоростей краев этой области. Хотя эта задача уже обсуждалась в работах [7, 18], мы кратко остановимся на ней, так как соответствующие результаты будут использованы в дальнейшем. Предположим, что в начальный момент времени в распределениях плотностей двух сортов солитонов имеется разрыв:

$$\begin{aligned} f_2(x, 0) = f_{20}, \quad f_1(x, 0) = 0, \quad x < 0, \\ f_2(x, 0) = 0, \quad f_1(x, 0) = f_{10}, \quad x > 0, \end{aligned} \tag{23}$$

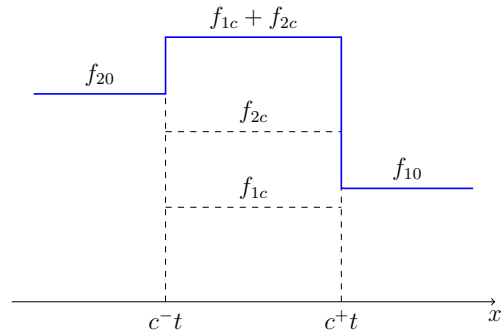


Рис. 1. Зависимость плотностей солитонных газов от координаты при их взаимопроникновении после столкновения солитонных облаков с постоянными начальными плотностями и скоростями.

причем мы считаем, что  $\kappa_2 > \kappa_1$ , так что более быстрое облако солитонов с плотностью  $f_{20}$  в момент времени  $t = 0$  настигает в точке  $x = 0$  более медленное облако с плотностью  $f_{10}$  и начинается процесс их взаимопроникновения. Как обычно в случае начального разрыва, решение должно зависеть только от автомодельной переменной  $\zeta = x/t$ . Поэтому начальный разрыв ведет к образованию плато между двумя простыми волнами, каждая из которых представляет собой разрыв с постоянным значением одного из римановых инвариантов — существование таких решений обусловлено указанными выше свойствами газа Чаплыгина. В целом же решение представляет собой последовательность трех течений с постоянными плотностями, которые разделяются разрывами:

$$f(x, t) = \begin{cases} f_{20}, & x < c^-t, \\ f_{1c} + f_{2c}, & c^-t < x < c^+t, \\ f_{10}, & x > c^+t. \end{cases} \tag{24}$$

Из рис. 1 ясно, что передний край плато движется с перенормированной скоростью  $s_{2c}$  быстрого газа, а задний край плато — с перенормированной скоростью  $s_{1c}$  медленного газа, так как на этих краях плотности соответствующих газов обращаются скачком в нуль:

$$c^- = s_{1c}, \quad c^+ = s_{2c}. \tag{25}$$

В двухпоточковой области плато  $c^-t < x < c^+t$  скорости солитонов перенормированы их взаимодействии

ем и согласно (12) мы имеем

$$\begin{aligned} s_{1c} &= \frac{\kappa_1^2(1 - \alpha_2 f_{1c}) - \kappa_2^2 \alpha_1 f_{2c}}{1 - \alpha_1 f_{2c} - \alpha_2 f_{1c}}, \\ s_{2c} &= \frac{\kappa_2^2(1 - \alpha_1 f_{2c}) - \kappa_1^2 \alpha_2 f_{1c}}{1 - \alpha_1 f_{2c} - \alpha_2 f_{1c}}. \end{aligned} \quad (26)$$

Медленный газ втекает через правый разрыв в область плато и приравнивание выражений для его потока по разные стороны от разрыва в системе отсчета, где он покоится, дает  $f_{1c}(s_{1c} - c^+) = f_{10}(\kappa_1^2 - c^+)$ . Через левый разрыв в область плато втекает быстрый газ и аналогичный подсчет дает  $f_{20}(\kappa_2^2 - c^-) = f_{2c}(s_{2c} - c^-)$ . С учетом (25) и (26) полученные равенства приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} f_{1c} &= f_{10} \frac{s_{2c} - \kappa_1^2}{s_{2c} - s_{1c}} = f_{10}(1 - \alpha_1 f_{2c}), \\ f_{2c} &= f_{20} \frac{\kappa_2^2 - s_{1c}}{s_{2c} - s_{1c}} = f_{20}(1 - \alpha_2 f_{1c}), \end{aligned} \quad (27)$$

откуда находим выражения

$$\begin{aligned} f_{1c} &= \frac{f_{10}(1 - \alpha_1 f_{20})}{1 - \alpha_1 \alpha_2 f_{10} f_{20}}, \\ f_{2c} &= \frac{f_{20}(1 - \alpha_2 f_{10})}{1 - \alpha_1 \alpha_2 f_{10} f_{20}} \end{aligned} \quad (28)$$

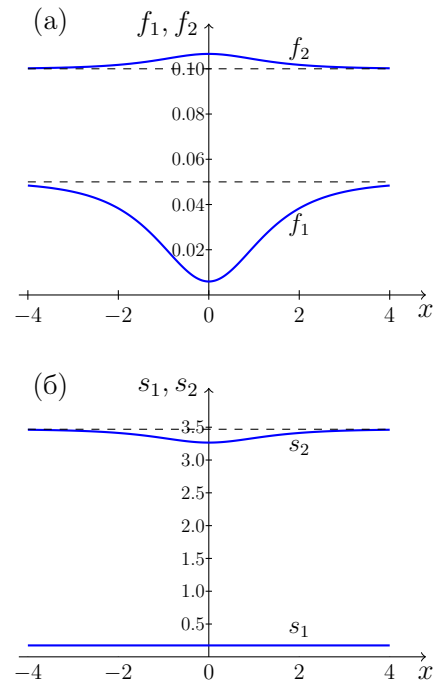
для плотностей солитонных газов в двухпотоковой области плато. Ясно, что полученные формулы имеют смысл лишь при выполнении неравенства

$$\alpha_1 f_{1c} + \alpha_2 f_{2c} < 1, \quad (29)$$

когда перенормированные скорости (26) положительны, т.е. плотности солитонных газов не могут быть слишком большими. Фактически еще более сильные ограничения на плотность солитонов налагает условие, что вариация флуктуирующего волнового поля  $\overline{u^2} - \bar{u}^2$  в солитонном газе должна быть положительной (см. [19]). Полученные соотношения хорошо согласуются с результатами численного решения уравнения КдФ с начальными данными в виде большого числа солитонов двух разных типов, находящихся по разные стороны от начала координат (см. [18]).

### 5. ТЕЧЕНИЕ ДВУХ СОЛИТОННЫХ ГАЗОВ В ВИДЕ ПРОСТОЙ ВОЛНЫ

Формулы (22) дают более общую форму решения для течения двух солитонных газов в виде простой



**Рис. 2.** Распределения плотностей солитонных газов (а) и их перенормированных скоростей (б) в зависимости от координаты для профиля волны, задаваемого формулой (36). Параметры солитонных газов равны  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 1.8$ ,  $f_{10} = 0.05$ ,  $f_{20} = 0.1$ . Скорость волны, совпадающая со скоростью течения медленных солитонов, равна  $V = s_1 = 0.174$ , а скорость течения газа быстрых солитонов на бесконечности равна  $s_{20} = 3.469$ , что больше, чем перенормированная скорость  $\kappa_2^2 = 3.24$ .

волны. Пусть плотности солитонных газов на бесконечности стремятся к постоянным значениям:

$$f_1 \rightarrow f_{10}, \quad f_2 \rightarrow f_{20} \quad \text{при} \quad x \rightarrow \pm\infty. \quad (30)$$

Тогда постоянное значение риманова инварианта  $s_1$  равно скорости волны солитонного газа (см. (26))

$$V = s_1 = \frac{\kappa_1^2(1 - \alpha_2 f_{10}) - \kappa_2^2 \alpha_1 f_{20}}{1 - \alpha_1 f_{20} - \alpha_2 f_{10}}, \quad (31)$$

совпадающей с перенормированной скоростью медленного газа, а формулы (13) дают выражения для плотностей солитонных газов:

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= \frac{1}{\alpha_2} \left[ 1 + \frac{1}{2}(V - \kappa_2^2)\rho(\xi) \right], \\ f_2(\xi) &= \frac{1}{2\alpha_1} (\kappa_1^2 - V)\rho(\xi). \end{aligned} \quad (32)$$

Легко видеть, что они связаны соотношением

$$1 - \alpha_1 f_2 - \alpha_2 f_1 = \frac{1}{2}(\kappa_2^2 - \kappa_1^2)\rho, \quad (33)$$

из которого следует, в частности, формула

$$\rho_0 = \frac{2(1 - \alpha_1 f_{20} - \alpha_2 f_{10})}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2}. \quad (34)$$

Распределения плотности (32) содержат произвольную функцию  $\rho(\xi)$  и через нее же выражается распределение перенормированной скорости быстрого солитонного газа согласно второй формуле (22). На бесконечности  $s_2$  стремится к значению (см. (26))

$$s_{20} = \frac{\kappa_2^2(1 - \alpha_1 f_{20}) - \kappa_1^2 \alpha_2 f_{10}}{1 - \alpha_1 f_{20} - \alpha_2 f_{10}}. \quad (35)$$

Полученное решение имеет физический смысл при таких значениях параметров  $\kappa_1, \kappa_2, f_{10}, f_{20}$ , что и распределения плотностей  $f_1, f_2$  солитонных газов, и их перенормированные скорости  $s_1, s_2$  повсюду положительны.

Найденное нами течение двух солитонных газов проиллюстрировано на рис. 2 для функции  $\rho(\xi)$ , равной

$$\rho(\xi) = \rho_0 + \frac{a}{\text{ch } \xi}. \quad (36)$$

В этом случае профиль плотности  $f_1$  медленного газа движется вместе с этой компонентой со скоростью  $V = s_1$ . Быстрый же газ течет сквозь медленный с локальной скоростью  $s_2$ , которая уменьшается в области «ямы» в распределении  $f_1$ , вследствие чего плотность  $f_2$  в этой области увеличивается.

## 6. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ДВУХ СОЛИТОННЫХ ГАЗОВ

Известный из газовой динамики метод годографа (см., например, [16]) позволяет легко получить общее решение уравнений (14), когда обе скорости  $s_1$  и  $s_2$  изменяются в пространстве и со временем. Делая стандартное преобразование годографа  $t = t(s_1, s_2)$ ,  $x = x(s_1, s_2)$ , мы приводим эти уравнения к виду

$$\frac{\partial x}{\partial s_1} - s_1 \frac{\partial t}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial s_2} - s_2 \frac{\partial t}{\partial s_2} = 0. \quad (37)$$

Исключение  $x$  дает

$$\frac{\partial^2 t}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{1}{s_1} \frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{1}{s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} \left( s_2 \frac{\partial t}{\partial s_2} \right) = \frac{s_2}{s_1} \frac{\partial^2 t}{\partial s_1 \partial s_2}.$$

Поскольку  $s_1 \neq s_2$ , приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2 t}{\partial s_1 \partial s_2} = 0, \quad (38)$$

общее решение которого запишем через две произвольные функции, которые удобно обозначить как  $F''(s_1)$  и  $G''(s_2)$ , в виде

$$t(s_1, s_2) = F''(s_1) + G''(s_2). \quad (39)$$

Из уравнений (37) легко находим

$$x(s_1, s_2) = s_1 F''(s_1) + s_2 G''(s_2) - F'(s_1) - G'(s_2). \quad (40)$$

Это решение можно преобразовать к форме

$$\begin{aligned} x - s_1 t &= (s_2 - s_1)G''(s_2) - F'(s_1) - G'(s_2), \\ x - s_2 t &= -(s_2 - s_1)F''(s_1) - F'(s_1) - G'(s_2), \end{aligned} \quad (41)$$

в которой оно было получено другим способом в работе [20].

Приведем для полноты другие представления общего решения, которые могут оказаться более удобными при решении конкретных задач. Если обратиться к методу годографа в форме Царева [21], то общее решение можно записать в форме

$$x - s_2 t = \frac{\partial W}{\partial s_1}, \quad x - s_1 t = \frac{\partial W}{\partial s_2}, \quad (42)$$

где функция  $W = W(s_1, s_2)$  должна удовлетворять уравнению Эйлера–Пуассона:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{\partial W}{\partial s_1} - \frac{\partial W}{\partial s_2} \right) = 0. \quad (43)$$

Легко убедиться, что решения уравнения (43) выражаются через две произвольные функции  $F(s_1)$  и  $G(s_2)$  следующим образом:

$$W(s_1, s_2) = (s_1 - s_2)[F'(s_1) - G'(s_2)] - 2[F(s_1) + G(s_2)]. \quad (44)$$

Подстановка (44) в (42) дает решение в форме (41). Функции  $F(s_1)$  и  $G(s_2)$  должны находиться из начальных условий задачи.

Как было показано Риманом (см., например, [22]), вместо использования этого общего решения, выраженного через произвольные функции, часто бывает удобно использовать метод, выражающий решение задачи непосредственно через начальные условия с помощью так называемой функции Римана. В нашем случае функция Римана может быть получена из общей формулы для динамики политропного газа при показателе адиабаты  $\gamma = -1$ . Входящая в это выражение гипергеометрическая функ-

ция сводится к  $F(-1, 2; 1; z) = 1 - 2z$  и функция Римана для уравнений (14) принимает особенно простой вид:

$$R(r_1, r_2; s_1, s_2) = \frac{(r_1 + r_2)(s_1 + s_2) - 2(r_1 r_2 - s_1 s_2)}{(r_1 - r_2)^2}, \tag{45}$$

где  $(r_1, r_2)$  — текущие координаты на плоскости годографа, а  $(s_1, s_2)$  — координаты точки  $P$ , в которой ищется значение функции  $W = W(P) = W(s_1, s_2)$ . Мы не будем приводить здесь весьма громоздкие общие формулы, которые мало что добавляют к пониманию динамики взаимодействующих солитонных газов, а обратимся вместо этого к решению одной из типичных задач газовой динамики — задаче о расширении слоя газа. Решение может быть легко получено в элементарной форме и его отличие от решений этой же задачи для других физических систем хорошо демонстрирует существенное различие между обычной газовой динамикой и динамикой солитонных газов.

### 7. РАСШИРЕНИЕ СЛОЯ ИЗ СМЕСИ ДВУХ СОЛИТОННЫХ ГАЗОВ

Одной из типичных задач, в которой возникает область общего решения, является задача о расширении газового слоя. Она была рассмотрена в [23] для классического одноатомного газа, в [24] для бозе-эйнштейновского конденсата, в [25] для двухтемпературной плазмы и в [26–28] для ультрарелятивистского газа. Во всех этих случаях от краев слоя вглубь него распространялись волны разрежения и после их столкновения в центре образовывалась область общего решения, граничащая по краям с волнами разрежения. Однако в случае солитонного газа решения в виде волн разрежения отсутствуют, а вместо них возникают разрывные решения, между которыми образуется плато с постоянными значениями римановых инвариантов. Построенное таким способом решение позволяет сделать некоторые заключения общего характера об эволюции перекрывающихся облаков солитонных газов.

Если допустить, что в начальный момент времени единственный солитонный газ с параметром  $\kappa_1$  имеет распределение плотности в виде столика со значением  $f_{10}$  при  $-l/2 \leq x \leq l/2$ , то его движение в последующие моменты времени очевидно: это распределение будет переноситься вдоль оси  $x$  со скоростью  $\kappa_1^2$  без изменения формы. Однако если в начальный момент времени в области  $-l/2 \leq x \leq l/2$

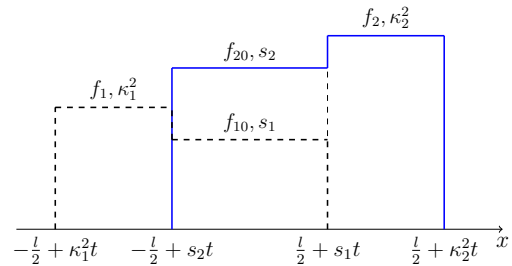


Рис. 3. Зависимость плотностей облаков двух солитонных газов от координаты при эволюции начального слоя из двух таких газов до момента их разделения. Жирной штриховой линией изображен график плотности медленного газа, а сплошной линией — график плотности быстрого газа.

имеется смесь двух солитонных газов с параметрами  $\kappa_1, \kappa_2$  ( $\kappa_1 < \kappa_2$ ) и плотностями  $f_{10}$  и  $f_{20}$ , то эволюция этих газов будет более сложной: в процессе разделения этих газов на два облака, движущихся со скоростями  $\kappa_1^2$  и  $\kappa_2^2$ , возникнет двухпотоковое плато. Нашей целью является описание процесса пространственного разделения солитонных облаков, а также определение их параметров после разделения.

Ясно, что в возникшем в процессе разделения плато газы будут двигаться с перенормированными скоростями  $s_1, s_2$ , сохраняя начальные плотности  $f_{10}, f_{20}$ . Впереди этого слоя из смеси газов возникнет слой быстрого газа с плотностью  $f_2$ , а позади — слой медленного газа с плотностью  $f_1$ . Левый край области перекрытия движется со скоростью  $s_2$ , а ее правый край — со скоростью  $s_1$ . Следовательно, область перекрытия существует в течение времени

$$T = \frac{l}{s_2 - s_1} \tag{46}$$

и при  $t > T$  газы разделяются. Из рис. 3 легко увидеть, что длины облаков медленного и быстрого газов в момент разделения соответственно равны

$$\begin{aligned} l_1 &= l \frac{s_2 - \kappa_1^2}{s_2 - s_1}, \\ l_2 &= l \frac{\kappa_2^2 - s_1}{s_2 - s_1}, \end{aligned} \tag{47}$$

причем обе они меньше первоначальной длины  $l$ , так как  $s_1 < \kappa_1^2$  и  $s_2 > \kappa_2^2$ . Из сохранения числа солитонов в каждой компоненте находим амплитуды:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_{10} \frac{s_2 - s_1}{s_2 - \kappa_1^2}, \\ f_2 &= f_{20} \frac{s_2 - s_1}{\kappa_2^2 - s_2}. \end{aligned} \tag{48}$$



В момент разделения облаков центры тяжести облака медленных солитонов и облака быстрых солитонов находятся соответственно в точках

$$\begin{aligned} x_1(T) &= \frac{l}{2} \frac{s_1 + \kappa_1^2}{s_2 - s_1}, \\ x_2(T) &= \frac{l}{2} \frac{s_2 + \kappa_2^2}{s_2 - s_1}. \end{aligned} \tag{49}$$

Если бы солитоны не взаимодействовали друг с другом, то эти облака двигались бы с неперенормированными скоростями и находились бы в этот момент в точках

$$\begin{aligned} x_{10}(T) &= \frac{\kappa_1^2 l}{s_2 - s_1}, \\ x_{20}(T) &= \frac{\kappa_2^2 l}{s_2 - s_1}, \end{aligned}$$

т.е. из-за взаимодействия они сдвигаются соответственно на расстояния

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1(T) - x_{10}(T) = \frac{l}{2} \frac{s_1 - \kappa_1^2}{s_2 - s_1} < 0, \\ \Delta x_2 &= x_2(T) - x_{20}(T) = \frac{l}{2} \frac{s_2 - \kappa_2^2}{s_2 - s_1} > 0. \end{aligned} \tag{50}$$

Таким образом, вследствие взаимодействия облака сужаются, плотности солитонов в обоих увеличиваются и медленное облако сдвигается назад, а быстрое — вперед. Переход к этим значениям сдвигов иллюстрируется на рис. 4, полученном согласно численному решению уравнений для газа Чаплыгина. В начальный момент времени центры тяжести обоих газов находились в начале координат и по мере разделения облаков центр тяжести быстрого газа опережал движение, которое он совершал бы со своей неперенормированной скоростью, а центр тяжести медленного газа отставал от аналогичного движения со своей неперенормированной скоростью. После момента разделения центры тяжести обоих газов продолжают движение со своими неперенормированными скоростями, приобретая дополнительные сдвиги вследствие взаимодействия с солитонами другого сорта. Хорошее согласие предсказываемых теорией значений сдвигов (50) с численным решением показывает, что наша картина формирования из начальных разрывов простых волн с разрывами соответствует реальной динамике взаимодействующих солитонных облаков согласно кинетическому уравнению.

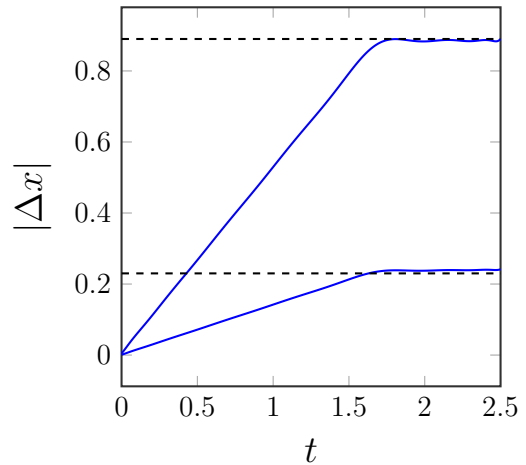


Рис. 4. Сдвиги центров тяжести облаков от их положений в отсутствие взаимодействия, полученные численным решением уравнений для газа Чаплыгина при начальных значениях параметров  $f_{10} = 0.05$ ,  $f_{20} = 0.1$ ,  $\kappa_1 = 1.3$ ,  $\kappa_2 = 2.5$ ,  $l = 10$ . В момент  $T = 1.6$  разделения они принимают теоретические значения, даваемые формулами (50).

### 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе показано, что фундаментальным свойством динамики двух взаимодействующих солитонных газов является существование простых волн, распространяющихся без изменения формы. В частности, такие простые волны могут иметь разрывы, так что в задачах типа «разрушения плотины» вместо волн разрежения динамики обычных газов возникают простые волны с разрывами, соединяемые вместо общего решения, в котором в обычной теории изменяются оба римановых инварианта, областью плато с постоянными римановыми инвариантами. Это свойство динамики солитонных газов резко контрастирует со свойствами газовой динамики обычных газов. В то же время на основе указанной картины могут быть построены простые аналитические решения типичных задач, подтверждаемые точными численными решениями кинетического уравнения, приведенного к эквивалентной форме уравнений для динамики газа Чаплыгина. Из построенных решений следует интуитивно понятная картина поведения облаков солитонных газов: в результате взаимодействия облако быстрых солитонов сдвигается вперед, а облако медленных солитонов сдвигается назад, причем оба облака сужаются, а плотность солитонов в них возрастает. Полученные формулы позволяют дать оценку этих эффектов в ведущихся в настоящее время экспериментальных

исследованиях солитонных газов в волнах на воде, нелинейной оптике и физике холодных атомов (см., например, [12–14]).

**Благодарности.** Выражаем благодарность Г. А. Элю за полезное обсуждение.

**Финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00063).

## ЛИТЕРАТУРА

1. N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. **15**, 240 (1965).
2. P. D. Lax, Comm. Pure Appl. Math. **21**, 467 (1968).
3. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
4. А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, Москва (1989).
5. В. Е. Захаров, ЖЭТФ **60**, 993 (1971).
6. G. A. El, Phys. Lett. A, **311**, 374 (2003).
7. G. A. El and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. Lett., **95**, 204101 (2005).
8. G. A. El, A. M. Kamchatnov, M. V. Pavlov, and S. A. Zykov, J. Nonlinear Sci., **21**, 151 (2011).
9. E. V. Ferapontov and M. V. Pavlov, J. Nonlinear Sci., **32**, 26 (2022).
10. B. Doyon, Lecture notes on Generalised Hydrodynamics, SciPost Phys. Lect. Notes **18** (2020).
11. G. A. El, J. Stat. Mech. **2021** 114001 (2021).
12. I. Redor, E. Barthélemy, H. Michallet, M. Onorato, and N. Mordant, Phys. Rev. Lett. **122**, 214502 (2019).
13. P. Suret, A. Tikan, F. Bonnefoy, F. Copie, G. Ducrozet, A. Gelash, G. Prabhudesai, G. Michel, A. Cazaubiel, E. Falcon, G. El, and S. Randoux, Phys. Rev. Lett. **125**, 264101 (2020).
14. I. Bouchoule and J. Dubail, J. Stat. Mech. **2022**, 014003 (2022).
15. S. C. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, and R. M. Miura, Phys. Rev. Lett. **19**, 1095 (1967).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Физматлит, Москва (2001).
17. С. А. Чаплыгин, *О газовых струях*, Унив. тип., Москва (1902); С. А. Чаплыгин, *Собрание сочинений*, т. II, ОГИЗ–ГИТТЛ, Москва (1948), с. 19–137.
18. F. Carbone, D. Dutykh, and G. A. El, Europhys. Lett. **113**, 30003 (2016).
19. G. A. El, Chaos **26**, 023105 (2016).
20. М. В. Павлов, ТМФ **73**, 316 (1987).
21. С. П. Царев, Изв. АН СССР, сер. матем. **54**, 1048 (1990).
22. А. Зоммерфельд, *Дифференциальные уравнения в частных производных физики*, Изд-во иностр. лит., Москва (1950).
23. В. Г. Носов, А. М. Камчатнов, ЖЭТФ **70**, 768 (1976).
24. S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, Phys. Rev. A **99**, 013609 (2019).
25. S. K. Ivanov and A. M. Kamchatnov, Phys. Fluids **32**, 126115 (2020).
26. Л. Д. Ландау, Изв. АН СССР, сер. физ. **17**, 51 (1953).
27. И. М. Халатников, ЖЭТФ, **27**, 529 (1954).
28. А. М. Камчатнов, ЖЭТФ **156**, 689 (2019).