

# ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР В НАНОРАЗМЕРНЫХ МАГНИТНЫХ ПЛЕНКАХ

*Е. Б. Магадеев\**, *Р. М. Вахитов*, *Р. Р. Канбеков*

*Башкирский государственный университет,  
450076, Уфа, Россия*

Поступила в редакцию 21 июля 2022 г.,

после переработки 12 августа 2022 г.

Принята к публикации 16 августа 2022 г.

Исследуются условия устойчивости вихреподобных неоднородностей в перфорированных ферромагнитных пленках с сильной одноосной анизотропией типа «легкая плоскость». Показано, что нетривиальные магнитные структуры, характеризующиеся отсутствием выхода вектора намагниченности из плоскости пленки, могут наблюдаться при абсолютных величинах константы анизотропии, превышающих некоторое пороговое значение. Развита возможные способы (аналитический, численный, эмпирический) вычисления данного порогового значения. Получены универсальные оценки минимально допустимой величины константы анизотропии в ряде важнейших случаев. Исследованы допустимые сценарии потери устойчивости магнитной структуры при изменении материальных параметров пленки.

*Статья представлена в рамках публикации материалов VIII Евроазиатского симпозиума  
«Тенденции в магнетизме» (EASTMAG-2022), Казань, август 2022 г.*

DOI: 10.31857/S0044451023010108

EDN: NNVGVV

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в результате бурного развития элементной базы цифровых технологий появились реальные предпосылки для создания вычислительных устройств нового поколения, в которых магнитная память и системы обработки информации будут функционировать на единой основе. Считается, что одним из перспективных типов носителей информации в таких устройствах могут являться вихреподобные магнитные неоднородности (магнитные вихри, скирмионы, цилиндрические магнитные домены [1–3]; классификация таких структур дана в обзоре [4]), возникающие в некоторых классах магнитных пленок. Однако при этом существует ряд ограничений, накладываемых на устойчивость указанных микромагнитных структур в рассматриваемых материалах [5–7], что делает их использование проблематичным. В результате возник

спрос на альтернативные способы записи и обработки информации. Так, в работе [8] был предложен новый вид нанообъектов вихревого типа, которые характеризуются особенно простой текстурой и понятными механизмами формирования, что делает их крайне привлекательными для использования на практике. Эти вихреподобные неоднородности локализуются на парных отверстиях цилиндрической формы (антидоты [6,9]) в перфорированных магнитных пленках при условии, что вектор намагниченности не может выходить из плоскости пленки (магнитные структуры такого типа в дальнейшем будем называть плоскими). Выполнение данного условия обеспечивается наличием сильной одноосной анизотропии типа «легкая плоскость», благодаря чему неплоские структуры наверняка становятся энергетически невыгодными. Поскольку создание такого магнитного материала может представлять собой нетривиальную техническую задачу, требования к его параметрам должны быть полностью конкретизированы. В данной работе мы развиваем инструментарий для вычисления предельных значений константы анизотропии, при которых

\* E-mail: magadeev@yandex.ru

плоские структуры становятся устойчивыми, а также применяем излагаемые подходы к ряду практически важных случаев. Следует отметить, что данная проблема в отношении вихреподобных структур является актуальной и рассматривалась на качественном уровне, например, в работе [9].

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим ферромагнитную пленку, характеризующуюся параметром обменного взаимодействия  $A$  и постоянной малой толщиной  $h$  (в остальной геометрии образца может быть произвольной благодаря, например, наличию перфораций). Тогда с учетом одноосной анизотропии типа «легкая плоскость» полная энергия магнетика может быть записана в следующем виде [10]:

$$E = \int \{A[(\nabla\alpha)^2 + \cos^2\alpha(\nabla\theta)^2] + K\sin^2\alpha\} hdS, \quad (1)$$

где интегрирование ведется по всей площади образца,  $K$  — абсолютная величина константы анизотропии,  $\alpha$  — полярный угол, характеризующий выход вектора намагниченности из плоскости пленки, а  $\theta$  — азимутальный угол, определяющий ориентацию проекции вектора намагниченности на эту плоскость. Влиянием размагничивающих полей мы здесь пренебрегаем [8].

Ясно, что при  $K \rightarrow \infty$  требование минимальности энергии (1) приводит к  $\alpha \equiv 0$ , что соответствует образованию плоской структуры. При этом

$$E = E_0 = \int A(\nabla\theta)^2 hdS, \quad (2)$$

а значит, распределение намагниченности может быть найдено из уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала (2). Несложно видеть, что оно представляет собой уравнение Лапласа с граничным условием, заключающимся в отсутствии нормальной составляющей градиента  $\theta$  на всех границах области, занимаемой образцом:

$$\Delta\theta = 0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0. \quad (3)$$

В [8] показано, что при наличии топологических особенностей пленки (антидотов) уравнение (3) имеет нетривиальные решения, которые отвечают привлекательным с практической точки зрения неоднородным структурам.

С другой стороны, при  $K = 0$  энергию (1), отвечающую какому-либо неоднородному распределению намагниченности с  $\alpha \equiv 0$ , можно монотонно

уменьшить до нулевого значения, непрерывно изменяя  $\alpha$  от 0 до  $\pi/2$  одновременно во всех точках пленки. Конечное распределение намагниченности при этом окажется однородным с  $\alpha = \pi/2$ , и далее оно может быть переведено в однородное состояние с  $\alpha = 0$  без изменения энергии. Очевидно, что близкие к этому сценарию непрерывные преобразования, в ходе которых энергия (1) монотонно уменьшается до своего абсолютного минимума  $E = 0$ , существуют и для малых значений  $K$ , отличных от нуля. Следовательно, при небольших величинах константы анизотропии любые плоские неоднородные структуры будут спонтанно перестраиваться в однородное состояние путем выхода вектора намагниченности из плоскости пленки с его последующим возвратом обратно в плоскость.

Таким образом, соотношения (3) и  $\alpha \equiv 0$ , формально отвечающие условиям экстремума функционала (1), не всегда задают его минимум: при больших значениях  $K$  минимальность действительно гарантируется, однако при малых значениях  $K$  минимуму соответствует только тривиальное решение уравнения Лапласа  $\theta = \text{const}$ . Поэтому для всех нетривиальных решений  $\theta$  имеет смысл следующая задача: отыскать такое значение  $K_{min}$ , что при всяком  $K > K_{min}$  выбранное распределение  $\theta$  минимизирует функционал (1). В более широкой постановке это означает отыскание порогового значения  $K = K_{min}$ , выше которого данная плоская неоднородная структура является устойчивой относительно малых внешних воздействий, а ниже теряет свою устойчивость.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Исследуем поведение функционала (1) при малых значениях функции  $\alpha$ , которые рассматриваются как возмущение. Сохраняя не более чем квадратичные члены по  $\alpha$ , имеем  $E = E_0 + AhF$ , где

$$F[\alpha] = \int \left\{ (\nabla\alpha)^2 + \left[ \frac{K}{A} - (\nabla\theta)^2 \right] \alpha^2 \right\} dS. \quad (4)$$

Ясно, что достаточным условием минимума энергии (1) является положительная определенность квадратичной формы (4). Поскольку умножение  $\alpha$  на постоянную величину не меняет знак (4), ограничимся рассмотрением функций  $\alpha$ , нормированных условием

$$Q[\alpha] = \int \alpha^2 dS = 1. \quad (5)$$

Возможность такой нормировки вытекает из физического смысла  $\alpha$ : функция, соответствующая ре-

ализуемой флуктуации, должна быть ограниченной и локализованной в пространстве. Далее введем неопределенный множитель Лагранжа  $\lambda$  и рассмотрим следующий функционал, значения которого совпадают с (4) для всех функций, нормированных условием (5):  $\tilde{F} = F - (K/A + \lambda)(Q - 1)$ . Уравнение Эйлера–Лагранжа для него имеет следующий вид:

$$-\Delta\alpha + U\alpha = \lambda\alpha, \quad \frac{\partial\theta}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

где введено обозначение  $U = -(\nabla\theta)^2$ . Соотношения (6) представляют собой задачу на собственные значения  $\lambda$  типа стационарного уравнения Шредингера, которая в общем случае имеет смешанный спектр. Тогда, подставляя собственную функцию  $\alpha$ , соответствующую  $\lambda$ , в выражение (4), с учетом (5) получаем  $F[\alpha] = K/A + \lambda$ . Отсюда вытекает, что все экстремумы функционала  $\tilde{F}$  имеют вид  $K/A + \lambda$ , а значит, условие положительной определенности формы (4) выражается соотношением  $K > K_{min} = -A\lambda_{min}$ , где  $\lambda_{min}$  — наименьшее собственное значение (6).

Необходимо отметить, что некоторые оценки в отношении  $K_{min}$  могут быть сделаны и без решения задачи (6). В частности, из (4) следует, что форма  $F[\alpha]$  заведомо является положительно определенной при  $K > K_t = A \max(\nabla\theta)^2$ . Кроме того, значение  $F[\alpha]$  должно быть неотрицательным при  $\alpha = \text{const}$ , что приводит к соотношению  $K > K_b = A \langle (\nabla\theta)^2 \rangle$ , где угловыми скобками обозначено усреднение по площади образца. Отсюда имеем диапазон  $K_b \leq K_{min} \leq K_t$ , знания которого может быть вполне достаточно для прикладных целей. Важное исключение составляет случай уединенных неоднородностей, когда энергия  $E_0$  в (2) имеет фиксированное конечное значение, и величина  $K_b$  при увеличении размеров образца становится близкой к нулю, что делает оценку снизу неинформативной.

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ ПОДХОД

Несмотря на то, что аналитический подход, изложенный выше, достаточно обоснован, его применение на практике ограничивается случаями простейших распределений  $\theta$ , при которых потенциал  $U$  в первом уравнении (6) обладает высокой симметрией. Для более сложных распределений решение этого уравнения уже не может быть получено в явном виде, что приводит к необходимости привлечения численных методов. Тем не менее, численное решение задачи на собственные значения в поста-

новке, соответствующей (6), требует значительных вычислительных ресурсов, а применение вариационных методов [11] для непосредственной оптимизации функционала (4) приводит к весьма приблизительным результатам из-за отсутствия надежных предпосылок к выбору пробных функций. Обойти эти затруднения удается за счет перехода от континуального приближения к решеточной модели магнетика [12]. При этом необходимо подчеркнуть, что такой переход не эквивалентен использованию грубой разностной схемы для решения задачи (6): во-первых, в рамках решеточной модели принципиально иначе описывается обменное взаимодействие, что позволяет избежать эффектов, связанных с некорректным расчетом производных; во-вторых, результаты, полученные на решеточной модели, всегда имеют непосредственный физический смысл, в то время как использование грубых разностных схем иногда может приводить к наблюдению явлений, полностью объясняющихся накопленными в процессе вычислений ошибками.

Рассмотрим систему, состоящую из  $N$  спинов  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N$ , расположенных в узлах плоской квадратной решетки с периодом  $b$ , часть из которых вакантна. Представим энергию этой системы в следующем виде [12]:

$$E = -\frac{1}{2}J \sum_{i,j} G_{ij} \mathbf{s}_i \mathbf{s}_j - J \sum_i \mathbf{s}_i \mathbf{p}_i + K_L \sum_i (\mathbf{s}_i \mathbf{n})^2, \quad (7)$$

где  $J$  — обменный интеграл,  $G_{ij} = 1$ , если спины с номерами  $i$  и  $j$  расположены в соседних узлах решетки, и  $G_{ij} = 0$  в противном случае,  $K_L$  — коэффициент, характеризующий интенсивность анизотропии в решеточной модели,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к плоскости решетки. Второе слагаемое в (7) введено для того, чтобы имитировать (если есть такая необходимость) бесконечную протяженность образца. Для этого будем считать, что за пределами области, занимаемой спинами  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N$ , имеются также и другие спины, направление которых зафиксировано. Тогда  $\mathbf{p}_i$  представляет собой зафиксированный спин, соседний по отношению к  $\mathbf{s}_i$  (при этом  $\mathbf{p}_i \perp \mathbf{n}$ ); если у спина  $\mathbf{s}_i$  нет ближайших соседей вне области рассматриваемой системы, то будем условно полагать  $\mathbf{p}_i = 0$ . Использование такой имитации оказывается крайне эффективным при исследовании уединенных неоднородностей [8], когда все  $\mathbf{p}_i$ , отличные от нуля, равны одному и тому же вектору  $\mathbf{p}$ , характеризующему постоянное направление намагниченности в образце на большом удалении от неоднородности.

При  $K_L \rightarrow \infty$  магнитная структура будет плоской, так что  $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i^{(0)} \perp \mathbf{n}$ . Конкретные направления  $\mathbf{s}_i^{(0)}$  могут быть найдены путем минимизации выражения (7), при этом третье слагаемое в нем автоматически оказывается равным нулю, так что вид плоской структуры не зависит от значений  $J$  и полностью определяется геометрией системы. Такая минимизация легко осуществляется численно вследствие того, что все искомые направления спинов однозначно задаются углами их ориентации на плоскости (например, углами отклонения от  $\mathbf{p}$ ). Как и в случае континуальной модели, при конечных значениях  $K_L$  найденная плоская структура по-прежнему будет соответствовать экстремуму функции (7). Чтобы выяснить, является ли этот экстремум минимумом, предположим, что каждый спин  $\mathbf{s}_i$  отклонился от плоскости на малый угол  $\alpha_i$ , так что  $\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_i^{(0)} \cos \alpha_i + \mathbf{n} \sin \alpha_i$ . Тогда энергия (7) с точностью до квадратичных членов по  $\alpha_i$  примет вид

$$E = E_0 + \sum_{i,j} \left( \frac{1}{2} J B_{ij} + K_L \delta_{ij} \right) \alpha_i \alpha_j, \quad (8)$$

где  $E_0$  — энергия системы при  $\alpha_i = 0$ ,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,

$$B_{ij} = \delta_{ij} \mathbf{s}_i^{(0)} \left( \mathbf{p}_i + \sum_k G_{ik} \mathbf{s}_k^{(0)} \right) - G_{ij}. \quad (9)$$

Для того чтобы плоская структура являлась устойчивой, квадратичная форма в правой части (8) должна быть положительно определенной, а значит, отвечающие ей собственные значения должны быть положительными. Это имеет место при выполнении следующего неравенства:  $K_L > K_{Lmin} = -J\lambda_{Lmin}/2$ , где  $\lambda_{Lmin}$  — наименьшее собственное значение матрицы  $B$ , элементы которой задаются соотношением (9).

Из сравнения выражений (1) и (7) следует, что  $J \approx 2Ah$ ,  $K_L \approx Khb^2$ . Благодаря этому становится возможно использовать результаты, полученные численно в рамках решеточной модели, для определения граничного значения константы анизотропии:  $K_{min} \approx -A\lambda_{Lmin}/b^2$ . Разумеется, такое сопоставление будет тем точнее, чем меньше величина  $b$ , поэтому в тех случаях, когда изначальная постановка задачи является феноменологической, значение периода решетки  $b$ , казалось бы, целесообразно уменьшать, одновременно масштабируя и другие параметры модели. Следует, однако, иметь в виду, что при этом число спинов в системе будет расти по закону  $N \sim b^{-2}$ , а значит, число элементов матрицы  $B$  — по закону  $N^2 \sim b^{-4}$ . По этой причине выбор неоправданно малого  $b$  может существенно снизить производительность численных расчетов, что перечеркнет основные достоинства излагаемого подхода.

#### 4. ЭМПИРИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Развитые выше методы существенно опирались на требование устойчивости плоской структуры относительно малых возмущений произвольной формы. Это требование, однако, можно смягчить, ограничившись устойчивостью относительно возмущений, принадлежащих определенному классу. В частности, вопрос устойчивости может рассматриваться в отношении вполне конкретного изменения, заключающегося, например, в выходе намагниченности из плоскости пленки на один и тот же малый угол либо во всех точках образца, либо в пределах какой-то его области. При этом, конечно, уже недостаточно проверять выполнение условия  $E > E_0$  (в частном случае  $\alpha = \text{const}$ , как было показано ранее, такая проверка позволяет получить лишь грубую оценку снизу  $K_{min} \geq K_b$ ). Вместо этого необходимо рассматривать некий динамический процесс, в результате которого система может либо вернуться в исходное неоднородное состояние, что означало бы его устойчивость, либо перейти в состояние с однородным распределением намагниченности. На первый взгляд, такой подход также не избавлен от методической погрешности, приводящей к занижению оценки  $K_{min}$  из-за выбора конкретного вида начального возмущения. Покажем, тем не менее, что на практике значительное занижение маловероятно.

Для простоты изложения будем пользоваться решеточной моделью, хотя все последующие рассуждения легко переносятся и на континуальную модель. Тогда возмущенное состояние системы в произвольный момент условного времени  $t$  описывается  $N$ -мерным вектором  $\boldsymbol{\alpha}(t)$ , составленным из углов  $\alpha_i$ . Пусть динамический процесс задан следующим уравнением:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\alpha}}. \quad (10)$$

Подставляя сюда (8) и разлагая  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  по ортонормированному базису, порожденному собственными векторами  $\mathbf{u}_i$  матрицы  $B$ , имеем

$$\dot{C}_i = -2\beta_i C_i, \quad \beta_i = \frac{1}{2} J \lambda_i + K_L, \quad (11)$$

где  $C_i(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) \mathbf{u}_i$ , а  $\lambda_i$  — собственное значение, которому соответствует  $\mathbf{u}_i$ . Решая уравнения (11) и подставляя результат в (8), получаем

$$E = E_0 + \sum_i C_i(0)^2 \beta_i \exp(-4\beta_i t). \quad (12)$$

Несложно видеть, что при  $K_L > K_{Lmin}$  все величины  $\beta_i$  являются положительными, вследствие чего

энергия (12) с течением времени  $t$  постепенно приближается к значению  $E_0$ , которое отвечает неоднородному состоянию. Такое же поведение, вообще говоря, может наблюдаться и при  $K_L < K_{Lmin}$ . Для этого необходимо, чтобы все  $C_i(0)$ , соответствующие отрицательным  $\beta_i$ , оказались нулевыми, т. е. начальное возмущение  $\alpha(0)$  должно быть ортогонально одному из векторов  $\mathbf{u}_i$ . Ясно, что хотя такая ситуация теоретически и может возникнуть, на практике она будет наблюдаться крайне редко. При этом наиболее вероятной причиной реализации такого сценария окажется намеренный выбор симметричного в пространстве начального возмущения, вследствие чего какие-то из соотношений  $\alpha(0) \perp \mathbf{u}_i$  будут выполняться автоматически. Чтобы гарантированно избежать этого, достаточно всегда добавлять к  $\alpha(0)$  небольшие случайные составляющие.

Далее будем полагать, что  $C_i(0) \neq 0$ , а значит, при  $K_L < K_{Lmin}$  в правой части выражения (12) обязательно присутствуют отрицательные слагаемые, быстро растущие со временем по абсолютной величине. Наибольшим темпом роста при этом будет обладать слагаемое, отвечающее наименьшему собственному значению  $\lambda_{Lmin}$  (соответствующий ему собственный вектор обозначим  $\mathbf{u}_{min}$ ). Более того, при приближении  $K_L$  к  $K_{Lmin}$  это слагаемое станет единственным, для которого  $\beta_i = \beta_{min} < 0$ , а значит, согласно (11), все коэффициенты  $C_i(t)$  за исключением  $C_{min}(t) = \alpha(t)\mathbf{u}_{min}$  быстро загухнут, и будет иметь место следующее приближенное равенство:

$$\alpha(t) \approx C_{min}(0)\exp(2|\beta_{min}|t)\mathbf{u}_{min}. \quad (13)$$

Полученное соотношение описывает начальный этап процесса перестроения неоднородной структуры, которая утратила устойчивость при уменьшении  $K_L$ , например, вследствие изменения температуры [13]. При этом пространственное распределение угла выхода вектора намагниченности из плоскости пленки носит универсальный характер (практически не зависит ни от  $\alpha(0)$ , ни от  $K_L$ ) и задается компонентами вектора  $\mathbf{u}_{min}$ , который тем самым приобретает физический смысл. Тут следует оговориться, что в действительности динамика магнетика, конечно, не описывается уравнением (10); тем не менее, уравнение (10) является предельным случаем уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта в угловых переменных [10] при больших значениях параметра диссипации, что оправдывает его применение в рамках данного анализа.

Итак, значения энергии  $E$  при больших временах  $t$  позволяют довольно надежно судить об устойчивости неоднородной структуры: если  $E < E_0$ , то струк-

тура разрушилась в соответствии с законом (13), а значит,  $K_L < K_{Lmin}$ ; если же  $E \approx E_0$ , то структура устойчива и  $K_L > K_{Lmin}$ . Проведя серию численных экспериментов при различных  $K_L$ , можно тем самым установить граничное значение  $K_{Lmin}$ , что и решает задачу. Слабое место такого эмпирического подхода заключается в сложности выбора времени наблюдения  $t$ . Дело в том, что хотя формула (13) и предполагает экспоненциальный рост амплитуды возмущения, величины  $C_{min}(0)$  и  $|\beta_{min}|$  могут оказаться столь малыми, что при данном  $t$  этот рост не успеет проявиться и отличие  $E$  от  $E_0$  будет незаметным. На рис. 1 показано, как в типичной ситуации меняется зависимость  $E$  от  $t$  при различных значениях  $K_L$  (в условных единицах) и фиксированных значениях  $C_i(0)$  в соответствии с соотношением (12). Несмотря на то, что в данном случае  $K_{Lmin} = 1.0$ , даже при  $K_L = 0.8$  спад энергии  $E$  все еще остается незаметным на протяжении всего эксперимента, и к его окончанию можно считать, что  $E \approx E_0$ . Таким образом, использование эмпирического подхода все-таки приводит к незначительному занижению получаемых значений  $K_{Lmin}$ , однако лучшей точности всегда можно добиться путем удлинения интервала наблюдения.

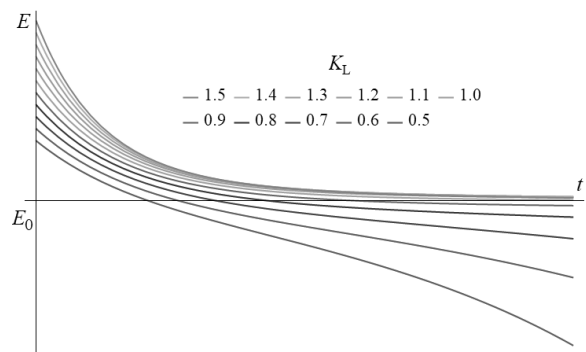


Рис. 1. Характер зависимости энергии системы  $E$  от времени  $t$  при различных значениях параметра  $K_L$

Заметим, что процесс, задаваемый уравнением (10), фактически представляет собой минимизацию энергии  $E$  методом градиентного спуска. Это позволяет использовать для постановки численного эксперимента оптимизатор пакета микромагнитного моделирования OOMMF [14], автоматизируя подбор  $K_{Lmin}$  с использованием инструментов, предоставляемых оболочкой Ubermag [15].

### 5. СЛУЧАЙ ТОНКОЙ МАГНИТНОЙ НИТИ

Переходя к применению разработанных подходов на практике, для начала рассмотрим простейший случай образца, представляющего собой вы-

резанную из пленки тонкую замкнутую нить длины  $L$ . Такой объект можно считать одномерным в том смысле, что направление намагниченности будет зависеть только от одной координаты  $x$ , которая отсчитывается вдоль нити. При этом из уравнения Лапласа (3) следует, что зависимость  $\theta$  от  $x$  должна быть линейной. С другой стороны, для замкнутой нити имеет место условие  $\theta(x + L) = \theta(x) + 2\pi k$ , где произвольное целое число  $k$  играет роль топологического заряда [16]. Следовательно,  $\theta(x) = 2\pi kx/L + \text{const}$ . Данное соотношение задает семейство плоских магнитных структур, которые являются неоднородными при  $k \neq 0$ .

Поскольку  $(\nabla\theta)^2 \equiv (2\pi k/L)^2$ , оценки  $K_b$  и  $K_t$  для граничного значения константы анизотропии совпадают между собой, что сразу приводит к выражению  $K_{min} = A(2\pi k/L)^2$ . Как видим, стабилизация структур, характеризующихся большими значениями топологического заряда  $k$ , требует более сильной анизотропии. Данное обстоятельство является важным аргументом против применения на практике вихреподобных неоднородностей с  $k \neq \pm 1$ .

Частным случаем тонкой нити является тонкое кольцо радиусом  $R = L/(2\pi)$ . Тогда  $K_{min} = A(k/R)^2$ . Из данного выражения можно заключить, что основным фактором, накладывающим ограничения на значения  $K$ , является геометрическая кривизна элементов пленки. В частности, не следует стремиться к уменьшению размеров используемых антидотов (хотя соответствующая модель весьма удобна для аналитических расчетов [8, 16]): именно в окрестности антидотов наименьшего радиуса будет начинаться процесс перестройки структуры магнетика при изменении  $K$ , приводящий к разрушению всей неоднородности.

### 6. СЛУЧАЙ ПРОКОЛОТОГО ДИСКА

Пусть теперь материал пленки заполняет область, ограниченную двумя концентрическими окружностями радиусами  $R$  и  $R_{ex}$ , так что  $R \leq r \leq R_{ex}$ , где введена полярная система координат  $(r, \phi)$ . В отличие от тонкой нити, такой проколотый диск является уже принципиально двухмерным объектом, однако решение уравнения (3) выглядит схожим образом:  $\theta = k\phi + \text{const}$ . Следовательно,  $(\nabla\theta)^2 = (k/r)^2$ , откуда  $K_t = A(k/R)^2$ , а также  $K_b/K_t = 2 \ln \rho / (\rho^2 - 1)$ , где  $\rho = R_{ex}/R$ . Несложно видеть, что при росте  $\rho$  оценка  $K_b$  быстро становится неинформативной, поэтому для определения  $K_{min}$  с приемлемой точностью необходимо решить

задачу на собственные значения (6), принимающую следующий вид:

$$\begin{aligned}
 -\Delta\alpha - (k/r)^2\alpha &= \lambda\alpha, \\
 \frac{\partial\alpha}{\partial r}(r = R) &= 0, \\
 \frac{\partial\alpha}{\partial r}(r = R_{ex}) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Поскольку нас интересует не весь спектр, а только наименьшее собственное значение  $\lambda_{min}$  задачи (14), будем считать, что  $\alpha$  не зависит от  $\phi$ . Тогда общее решение первого уравнения из (14) представляет собой линейную комбинацию модифицированных функций Бесселя  $I_{ik}(\sqrt{-\lambda}r)$  и  $K_{ik}(\sqrt{-\lambda}r)$  ( $i$  — мнимая единица; под  $k$  здесь и далее понимается абсолютная величина топологического заряда, поскольку ясно, что рассуждения не зависят от его знака), подставляя которую в последние два условия (14), получаем

$$\begin{aligned}
 W_k(k\rho\sqrt{c_k(\rho)}) &= W_k(k\sqrt{c_k(\rho)}), \\
 W_k(x) &= \frac{K_{ik-1}(x) + K_{ik+1}(x)}{I_{ik-1}(x) + I_{ik+1}(x)}.
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Здесь введено обозначение  $c_k(\rho) = -\lambda(R/k)^2$ , так что  $K_{min}/K_t = c_k(\rho)$ . Наибольшие корни  $c_k(\rho)$  уравнения (15) при различных значениях  $k$  и  $\rho$  могут быть найдены с помощью численных методов, что приводит к зависимости  $K_{min}/K_t$  от  $\rho$ , показанной на рис. 2.

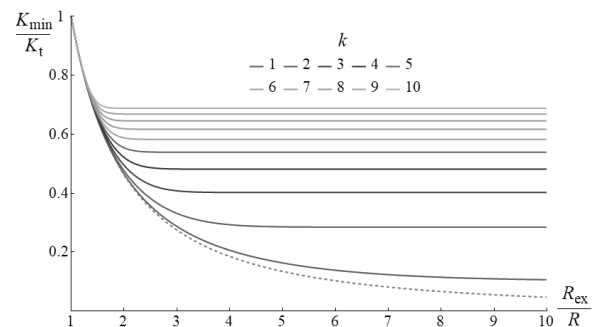


Рис. 2. Зависимость минимально допустимой величины константы анизотропии  $K_{min}$ , нормированной на  $K_t$ , от отношения внешнего  $R_{ex}$  и внутреннего  $R$  радиусов проколотого диска при различных значениях топологического заряда  $k$ . Красной штриховой линией показана оценка снизу  $K_b/K_t$

Несложно видеть, что независимо от величины  $k$  имеет место соотношение  $c_k(1) = 1$ , которое объясняется вырождением проколотого диска в тонкую нить при  $R_{ex} \approx R$ . Кроме того, при больших значениях  $\rho$  все функции  $c_k(\rho)$  выходят на горизонтальные асимптоты  $c_k(\infty)$ . Это связано с тем, что при

$R_{ex} \rightarrow \infty$  образец представляет собой неограниченную пленку с одним антидотом радиуса  $R$ . Для этого случая уравнение (15) можно привести к следующему более простому виду:

$$K_{ik-1}(k\sqrt{c_k(\infty)}) + K_{ik+1}(k\sqrt{c_k(\infty)}) = 0. \quad (16)$$

Выбирая наибольшие корни уравнения (16) для каждого из  $k$ , получаем  $c_1(\infty) = 0.102$ ,  $c_2(\infty) = 0.284$ ,  $c_3(\infty) = 0.402$  и т.д. Таким образом, в рассматриваемом случае оценка  $K_t$  дает наилучшее приближение для  $K_{min}$  при небольших значениях топологического заряда, причем при  $k = 1$  имеет место ошибка на порядок. В то же время важно отметить, что  $K_{min}$  никогда не составляет менее 10% величины  $K_t$ , а поскольку на практике имеет смысл выбирать материалы, которые удовлетворяют соотношению  $K > K_{min}$  с некоторым запасом, то использование величины  $K_t$  вместо точного значения  $K_{min}$  является вполне уместным.

Отдельный интерес представляет ситуация  $R_{ex} \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow 0$ , соответствующая пленке без антидотов, в которой, тем не менее, имеется неоднородная структура. Эта ситуация, разумеется, не может быть описана в рамках континуальной модели, поскольку плотность энергии в (2) оказалась бы сингулярной. Подобные решения, однако, могут появляться в решеточной модели и описывают, например, неоднородности типа квазичастиц, которые возникают в процессах перемагничивания образца, связанных с изменением топологии распределения намагниченности [17]. Применяя в этой ситуации численный подход для сплошных квадратных решеток с  $N$  от  $16^2$  до  $20^2$ , что позволяет убедиться в отсутствии зависимости результата от выбранного размера решетки, имеем  $K_{min} \approx 0.938A/b^2$  при  $k = \pm 1$  и  $K_{min} \approx 3.05A/b^2$  при  $k = \pm 2$ . Как видим, в обоих случаях  $K_{min}$  оказывается меньше  $A(k/b)^2$  и принимает значения, близкие к этой величине. Сравнивая же полученные результаты с выражениями для  $K_{min}$ , полученными в рамках континуальной модели, находим, что эффективные значения  $R$ , отвечающие естественным пустотам внутри решетки, равны  $0.33b$  и  $0.61b$  для  $k = \pm 1$  и  $k = \pm 2$  соответственно.

### 7. СЛУЧАЙ ПЛЕНКИ С ДВУМЯ АНТИДОТАМИ

Рассмотрим далее неограниченную пленку с двумя одинаковыми антидотами радиуса  $R$ , расстояние между центрами  $O_1$  и  $O_2$  которых равно  $a$

(рис. 3). В этом случае решение уравнения (3), отвечающее уединенной неоднородности, имеет вид  $\theta = k(\phi_1 - \phi_2)$ , где введены две независимые системы полярных координат  $(r_1, \phi_1)$  и  $(r_2, \phi_2)$ , направления  $\phi_1 = 0$  и  $\phi_2 = 0$  которых совпадают с лучом  $O_2O_1$ , а центры связаны с точками  $C_1$  и  $C_2$ , принадлежащими отрезку  $O_1O_2$ , причем  $|O_1C_1| = |O_2C_2|$  и  $|C_1C_2| = \sqrt{a^2 - 4R^2}$ . На рис. 3 показано распределение намагниченности, соответствующее данному решению при  $k = 1$ ; другие значения топологического заряда далее не рассматриваются.

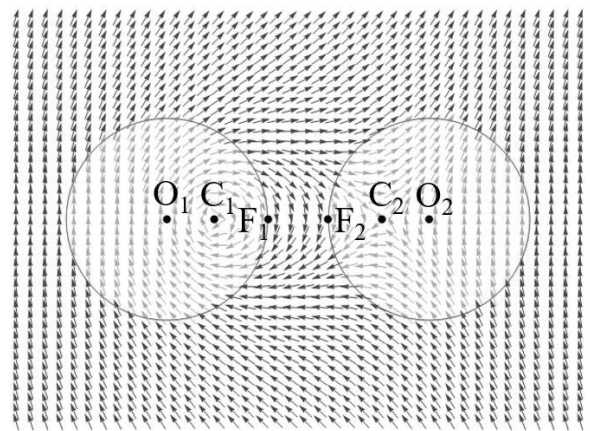


Рис. 3. Вихреподобная структура, локализованная на двух антидотах с центрами в точках  $O_1$  и  $O_2$ . Красными окружностями обозначены границы антидотов. Синие стрелки показывают направление намагниченности в образце, серые стрелки — поведение соответствующих формальных решений в области антидотов

Несложно убедиться, что в изучаемой ситуации  $(\nabla\theta)^2 = (|C_1C_2|/(r_1r_2))^2$ . В области образца это выражение достигает максимума в точках  $F_1$  и  $F_2$  на краях антидотов. Вычисляя этот максимум, найдем

$$K_t = \frac{A}{R^2} \frac{a + 2R}{a - 2R}. \quad (17)$$

Несмотря на то, что полученная оценка, как будет ясно в дальнейшем, дает сильно завышенные значения для  $K_{min}$  (при этом оценка  $K_b$  вообще неинформативна), выражение (17) позволяет выявить важную особенность изучаемой системы. Заметим, что, согласно (17),  $K_t$  неограниченно растет не только при  $R \rightarrow 0$  (это соответствует случаю антидотов малого размера, который уже обсуждался выше), но и при  $R \rightarrow a/2$ , когда становится малым зазор  $|F_1F_2|$  между антидотами. Причина заключается в том, что при  $|F_1F_2| \rightarrow 0$  точки  $C_1$  и  $C_2$  также смещаются к краям антидотов, в пределе совпадая с  $F_1$

и  $F_2$ . Благодаря этому вся неоднородность сосредотачивается в малой области между антидотами, и кривизна, характеризующая магнитную структуру, становится большой, несмотря на конечную кривизну всех элементов самой пленки. Тем самым оценка сверху  $A(k/R)^2$  для  $K_{min}$ , где под  $R$  понимается наименьший радиус кривизны среди всех перфораций, все же носит не универсальный характер: чтобы избежать роста  $K_{min}$ , необходимо выбирать не слишком малые значения как для размеров перфораций, так и для расстояний между ними. Конкретная количественная рекомендация следует при этом из выражения (17), которое при фиксированном  $a$  имеет точку минимума  $R_m = a(\sqrt{5} - 1)/4 \approx 0.31a$ . Отсюда следует, что для формирования наиболее устойчивой неоднородной структуры следует выбирать зазоры между антидотами, примерно равные их радиусу.

В случае распределения, показанного на рис. 3, применение аналитического подхода оказывается затруднительным, поэтому для определения  $K_{min}$  воспользуемся численным и эмпирическим подходами. Первый оказывается эффективным при сравнительно больших значениях  $a$ , когда антидот можно имитировать всего четырьмя вакантными узлами решетки, образующими квадрат; при этом приближенно полагаем  $b = R$ . В свою очередь, эмпирический подход хорошо проявляет себя при небольших зазорах между антидотами, но с ростом  $a$  начинают сказываться ограничения, которые связаны с конечностью размеров образца, используемого при численном моделировании. Значения  $K_{min}$ , рассчитанные на основе обоих подходов, приведены на рис. 4. При этом с целью устранения описанных выше недостатков эмпирического подхода динамический процесс, ограниченный 1000 итераций оптимизатора, был повторен при ограничении в 2000 итераций; полученные результаты находились в пределах незначительной погрешности. Как и ожидалось, при одних и тех же расстояниях  $a$  два подхода привели к немного разным значениям  $K_{min}$ , что объясняется как свойством эмпирического подхода, который немного занижает результат, так и в большей степени тем, что подходы опираются на различные физические модели. Тем не менее, в обоих случаях значения  $K_{min}$  при увеличении  $a$  стремятся к некоторой постоянной величине. Очевидно, положение такой горизонтальной асимптоты должно совпадать с  $c_1(\infty) = 0.102$ : при удалении антидотов друг от друга каждый из них становится уже изолированным антидотом, условия устойчивости для которых были изучены в предыдущем разделе.

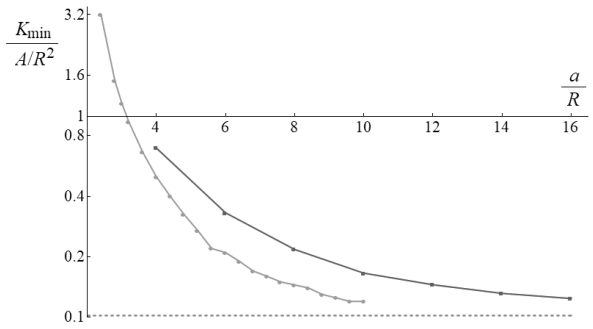


Рис. 4. Зависимость минимально допустимой величины константы анизотропии  $K_{min}$  от расстояния между центрами антидотов. Зеленой линией показаны результаты, полученные с помощью эмпирического подхода, лиловой — с помощью численного. Красной штриховой линией обозначено положение предполагаемой асимптоты обоих графиков. По оси ординат масштаб логарифмический

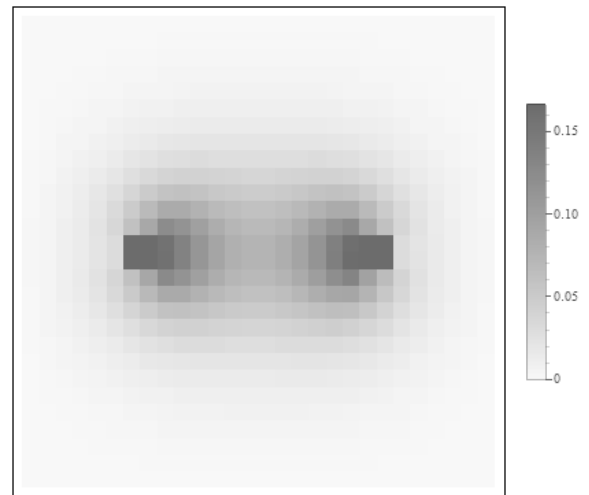


Рис. 5. Амплитуда угла выхода вектора намагниченности из плоскости пленки во всех ее точках в процессе разрушения плоской неоднородной структуры, утратившей устойчивость. Лиловыми квадратами обозначены положения антидотов

Помимо величины  $K_{min}$  численный подход позволяет также найти собственный вектор  $\mathbf{u}_{min}$  матрицы  $B$ . На рис. 5 приведено соответствующее ему типичное пространственное распределение амплитуды угла  $\alpha$ , который определяет выход вектора намагниченности из плоскости пленки в процессе разрушения плоской структуры. Как видим, наибольшая амплитуда наблюдается на краях антидотов в области между ними, т.е. в точках  $F_1$  и  $F_2$ , показанных на рис. 3. Это вполне согласуется с той логикой, что разрушение неоднородной структуры,



утратившей устойчивость, должно начинаться с областей, характеризующихся наибольшей кривизной, однако речь здесь идет опять же не о кривизне элементов самой пленки, а о кривизне наблюдаемой в ней магнитной структуры. Здесь неэквивалентность этих понятий снова оказывается существенной.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, на практике величина константы анизотропии  $K$ , при которой плоская магнитная структура является устойчивой, почти всегда может быть определена из соотношения вида  $K > A(k/R)^2$ , где под  $R$  понимается наименьший радиус кривизны элементов пленки (в случае некруглых элементов следует говорить о средней кривизне элемента). Зачастую это требование может оказаться слишком жестким, однако оценка при этом оказывается завышенной не более чем в 10 раз. В ряде случаев, однако, оценка может оказаться и сильно заниженной, что характерно для пленок, в которых зазоры между антидотами существенно меньше размеров самих антидотов. Очевидно, можно построить и более экзотические примеры, опровергающие приведенное соотношение: например, в образцах, содержащих множество антидотов различного размера, с которыми связаны различные топологические заряды, смысл выражения  $A(k/R)^2$  необходимо соответствующим образом конкретизировать. Тем не менее, оно дает хорошую отправную точку для выбора магнитных материалов, подходящих для реализации тех или иных плоских магнитных структур в пленках с нетривиальной топологией. Кроме того, если простых оценок оказывается недостаточно, то ограничения на величину константы анизотропии всегда можно уточнить, используя один из трех подходов, развитых в данной работе.

В качестве примера материала, который в соответствии с приведенными расчетами представляется перспективным в смысле его практического использования, можно привести  $\text{NdCo}_5$ . Согласно [18], это соединение характеризуется значением  $K = 4 \cdot 10^7$  Дж/м<sup>3</sup>, следовательно, даже при  $A = 10^{-11}$  Дж/м неоднородные структуры изучаемого типа устойчивы при произвольных значениях  $R > 0.5$  нм, что покрывает все возможные случаи их реального применения.

**Финансирование.** Работа проведена в рамках государственного задания по выполнению научных исследований лабораториями (приказ MN-8/1356 от 20.09.2021).

## ЛИТЕРАТУРА

1. K. Everschor-Sitte, J. Masell, R. M. Reeve et al., *J. Appl. Phys.* **124**, 240901 (2018).
2. D. Kumar, T. Jin, R. Sbiaa et al., *Phys. Rep.* **958**, 1 (2022).
3. A. S. Samardak, A. G. Kolesnikov, A. V. Davydenko et al., *Phys. Metals Metallogr.* **123**, 238 (2022).
4. D. Makarov, O. M. Volkov, A. Kakay et al., *Adv. Mater.* **34**, 2101758 (2022).
5. M. V. Sapozhnikov, S. N. Vdovichev, O. L. Ermolaeva et al., *APL*. **109**, 042406 (2016).
6. D. Navas, R. V. Verba, A. Hierro-Rodriguez et al., *APL Mater.* **7**, 0811114 (2019).
7. R. M. Vakhitov, R. V. Solonetskiy, A. A. Akhmetova, *J. Appl. Phys.* **128**, 153904 (2020).
8. Е. Б. Магадеев, Р. М. Вахитов, *Письма в ЖЭТФ* **115**, 123 (2022).
9. A. B. Bogatyrev and K. L. Metlov, *J. Magn. Magn. Mater.* **489**, 165416 (2019).
10. A. Hubert, R. Shafer, *Magnetic domains*, Springer-Verlag, Berlin (2007).
11. R. M. Vakhitov, T. B. Shapayeva, R. V. Solonetskiy et al., *Phys. Metals Metallogr.* **118**, 541 (2017).
12. H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena*, Oxford University Press, New York (1971).
13. К. П. Белов, А. К. Звездин, А. М. Кадомцева, Р. З. Левитин, *Ориентационные переходы в редкоземельных магнетиках*, Наука, Москва (1979).
14. M. J. Donahue, D. G. Porter, *OOMMF User's Guide*, version 2.0a3. National Institute of Standard and Technol.: Gaithersburg, MD, USA (2021).
15. M. Beg, M. Lang and H. Fangohr. *Ubermag: Toward More Effective Micromagnetic Workflows*, in *IEEE Transactions on Magnetics* **58**, 1 (2022). Art no. 7300205.
16. Е. Б. Магадеев, Р. М. Вахитов, Р. Р. Канбеков, *ЖЭТФ* **162**, 3 (2022).
17. E. Magadeev, R. Vakhitov and I. Sharafullin, *Entropy* **24**, 1104 (2022).
18. S. Chikazumi, *Physics of Ferromagnetism, International Series of Monographs on Physics, 94*, 2nd Edition, Oxford University press (1997), p. 668.