

# ЭНТРОПИЯ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

*М. М. Эскандери, С. Я. Килин, Д. Б. Хорошко\**

*Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси  
220072, Минск, Беларусь*

Поступила в редакцию 14 октября 2022 г.,  
после переработки 1 декабря 2022 г.  
Принята к публикации 2 декабря 2022 г.

Рассмотрены статистические смеси двух и трех произвольных когерентных состояний, представляющих собой состояния носителя информации в оптическом канале связи. В аналитическом виде найдены собственные значения и собственные векторы соответствующих операторов плотности. С этой целью введена оригинальная параметризация треугольников на комплексной фазовой плоскости. Найдены аналитические выражения для энтропии фон Неймана смесей двух и трех произвольных когерентных состояний и численно рассчитано ее максимальное значение при заданном среднем числе фотонов. Установлено, что использование трех когерентных состояний при заданном среднем числе фотонов обеспечивает более высокую емкость оптического канала связи, чем использование двух.

DOI: 10.31857/S004445102304003X  
EDN: LFDZSY

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Когерентные состояния оптического поля с хорошей точностью описывают излучение лазера, работающего высоко над порогом, и занимают центральное место в формализме кантовой оптики. Когерентное состояние одной моды оптического поля с безразмерной комплексной амплитудой  $\alpha$  представляется в виде [1]

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (1)$$

где  $|n\rangle$  —  $n$ -фотонное состояние Фока [2]. Когерентные состояния представляют собой переполненный базис в гильбертовом пространстве оптической моды и любое классическое состояние моды представляет собой взвешенную смесь таких состояний.

Оптические поля в когерентных состояниях широко используются в современных системах передачи информации, в которых сигнал передается как по оптическому волокну, так и по открытому пространству. Хотя в ряде случаев светодиоды могут

применяться в качестве источников света, наибольшая емкость оптического канала связи достигается при использовании лазерных источников поля и когерентных оптических приемников. В современной оптической линии связи состояния носителя информации представляют собой несколько когерентных состояний одной моды оптического поля. Перекрытие двух когерентных состояний дается формулой

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = e^{-|\alpha-\beta|^2}.$$

Таким образом, при достаточной близости амплитуд два когерентных состояния являются существенно неортогональными и их различение при измерении связано с возможной ошибкой, обусловленной квантовым шумом. В подобном случае канал передачи информации рассматривают как квантовый канал связи [3] и для определения уровня ошибок привлекают квантовую теорию измерений [4].

В типичной современной системе волоконно-оптической связи состояния носителя информации можно считать практически ортогональными. Действительно, при использовании всего двух когерентных состояний с противоположными фазами, что соответствует популярной схеме фазового манипулирования BSPK [5], величина перекрытия состояний равна  $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \exp(-4N)$ , где  $N = |\alpha|^2$  — среднее число фотонов в одном окне модуляции. Следовательно, в данной схеме квантовое рассмот-

\* E-mail: dhoroshko@yahoo.com

рение становится необходимым только при очень низком уровне сигнала. По мере распространения сигнала в оптическом волокне его мощность уменьшается из-за потерь, и когда она становится сравнимой с пределом чувствительности фотодетектора, используемого в когерентном оптическом приемнике, сигнал подвергается усилению на оптическом повторителе. Типичные величины частоты модуляции и чувствительности приемника в современных волоконно-оптических сетях составляют  $f = 10$  ГГц и  $P = 1$  мкВт соответственно [6]. Таким образом, средняя энергия поля в окне модуляции может быть оценена как  $E = P/f = 10^{-16}$  Дж, в то же время энергия одного фотона на длине волны  $\lambda = 1.5$  мкм составляет  $E_{ph} = 2\pi\hbar c/\lambda \sim 10^{-19}$  Дж. Это означает, что поле на приемнике содержит в среднем  $N = E/E_{ph} = 1000$  фотонов на один передаваемый бит информации. Перекрытие двух когерентных состояний в данном случае ничтожно мало и рассмотрение квантового шума не требуется. Однако быстрый прогресс в области телекоммуникаций приводит к использованию модуляторов с частотой  $f = 25$  ГГц и фотоприемников с чувствительностью  $P = 0.1$  мкВт, что снижает среднее число фотонов до  $N = 40$ . Кроме того, необходимость повышения емкости каналов связи приводит к внедрению прогрессивных форматов фазового и амплитудного манипулирования, в которых в одном окне модуляции может передаваться несколько битов информации [5–7]. При этом перекрытие соседних когерентных состояний уже определяется не только уровнем сигнала, но и геометрией расположения состояний на комплексной плоскости, образующих так называемое «сигнальное созвездие» [8]. Так, в перспективном формате M-PSK используется  $M$  значений фазы [5, 6], причем амплитуды когерентных состояний имеют вид  $\alpha_k = \sqrt{N}e^{i2\pi k/M}$ , и перекрытие соседних состояний дается формулой  $|\langle \alpha_k | \alpha_{k+1} \rangle|^2 = e^{-4N \sin^2(\pi/M)}$ , что равно примерно  $2 \cdot 10^{-3}$  для  $N = 40$ ,  $M = 16$ . Подобное перекрытие приводит к ошибке в дискриминации состояний порядка  $10^{-3}$ , что близко к максимально допустимому уровню ошибок, исправляемых кодами коррекции ошибок [6]. Таким образом, в ближайшем будущем квантовый шум может стать существенным для массовых сетей телекоммуникаций. Кроме того, квантовый шум имеет большое значение для оптической связи через открытое пространство, при которой усиление сигнала невозможно. В частности, для спутниковой оптической связи требуется разработка специальных приемников на основе детекторов одиночных фотонов, в которых квантовый шум играет

ключевую роль [9]. Другим важным приложением, требующим квантового анализа оптического канала связи, является квантовая криптография, в которой состояния поля намеренно создаются неортогональными уже на входе в канал связи с целью сделать незаметный перехват информации невозможным [10–12]. Таким образом, исследование емкости оптического канала связи на основе перекрывающихся когерентных состояний является весьма актуальной современной задачей с широкой областью применения. Помимо этого, исследование ансамблей когерентных состояний важно для таких приложений, как квантовое кодирование [13, 14], оптическая квантовая телепортация [15, 16], квантовые оптические измерения при наличии обратной связи [17–19] и других.

В данной статье исследуется емкость оптического канала связи с использованием двух и трех произвольных когерентных состояний. С этой целью вычисляется энтропия фон Неймана для статистической смеси двух и трех равновероятных когерентных состояний. В литературе имеются вывод энтропии смеси двух когерентных состояний [20] и анализ монотонности энтропии смеси трех произвольных состояний с равными перекрытиями [21]. Случай двух когерентных состояний представлен в разд. 2, где, помимо энтропии как функции перекрытия, совпадающей с результатом работы [20], рассчитана максимальная энтропия при заданном среднем числе фотонов и найдены собственные векторы оператора плотности статистической смеси. Случай трех когерентных состояний рассмотрен в разд. 3, где, в отличие от работы [21], рассматриваются произвольные перекрытия сигнальных состояний. Для этого случая также рассчитывается максимальная энтропия при заданном среднем числе фотонов и проведено ее сравнение со случаем двух когерентных состояний. В этом же разделе в аналитической форме выведены выражения для собственных векторов оператора плотности смеси трех произвольных когерентных состояний. Обсуждение результатов проводится в Заключение.

## 2. ЭНТРОПИЯ СМЕСИ ДВУХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Мы рассматриваем одну моду оптического поля с операторами рождения и уничтожения фотона  $a^\dagger$  и  $a$  соответственно, удовлетворяющими каноническому коммутационному соотношению:  $[a, a^\dagger] = 1$ . Ко-

герентное состояние моды с комплексной амплитудой  $\alpha$  имеет вид (1). Рассмотрим два когерентных состояния с произвольными комплексными амплитудами  $\alpha$  и  $\beta$ . Эти состояния могут быть использованы для передачи информации в оптической линии связи, представляя собой буквы двухбуквенного алфавита [13]. В случае, когда частоты употребления обеих букв совпадают и равны  $1/2$ , состояние случайно выбранной моды задается оператором плотности

$$\rho = \frac{1}{2} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|). \quad (2)$$

Оптимальное декодирование информации на принимающей стороне реализуется посредством коллективного квантового измерения длинных блоков, составленных из оптических мод, несущих одно из указанных состояний. Максимальная доступная информация при таких измерениях ограничена сверху информацией Холево [22], которая для чистых состояний-букв совпадает с энтропией фон Неймана

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho). \quad (3)$$

Для вычисления энтропии фон Неймана найдем собственные значения  $\lambda_n$  и собственные векторы  $|\lambda_n\rangle$  оператора плотности:

$$\rho|\lambda_n\rangle = \lambda_n|\lambda_n\rangle. \quad (4)$$

Оба собственных вектора оператора плотности лежат в линейной оболочке двух когерентных состояний  $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle\}$  и могут быть записаны как

$$|\lambda_n\rangle = C_n^\alpha |\alpha\rangle + C_n^\beta |\beta\rangle, \quad (5)$$

где индекс  $n$  принимает значения 0 и 1, а  $C_n^\alpha$  и  $C_n^\beta$  — комплексные коэффициенты. Подставляя (2) и (5) в (4) и используя линейную независимость когерентных состояний, получаем уравнение для комплексных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\lambda_n & \langle\alpha|\beta\rangle \\ \langle\beta|\alpha\rangle & 1 - 2\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n^\alpha \\ C_n^\beta \end{pmatrix} = 0. \quad (6)$$

Для того чтобы это уравнение имело ненулевое решение, детерминант матрицы должен обращаться в нуль, что приводит к характеристическому уравнению

$$(1 - 2\lambda)^2 - |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = 0, \quad (7)$$

два решения которого имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm |\langle\alpha|\beta\rangle|}{2} = \frac{1 \pm e^{-L^2/2}}{2}, \quad (8)$$

где  $L = |\alpha - \beta|$  — расстояние между числами  $\alpha$  и  $\beta$  на комплексной плоскости, определяющее перекрытие двух когерентных состояний:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = e^{-|\alpha-\beta|^2/2 + i\text{Im}(\alpha^*\beta)}. \quad (9)$$

Помимо этого расстояния, пара комплексных чисел может в общем случае характеризоваться еще тремя действительными параметрами, которые можно назвать «абсолютными» — комплексной координатой центра отрезка, соединяющего эти два числа на комплексной плоскости,  $\kappa = (\alpha + \beta)/2$ , и углом наклона этого отрезка к действительной оси  $\arg(\alpha - \beta)$ . Как следует из уравнения (8), собственные значения матрицы плотности, а значит и энтропия, не зависят от этих трех параметров, что говорит об инвариантности энтропии по отношению к сдвигам и вращениям на комплексной плоскости. Математически вращение состояния на угол  $\psi$  описывается оператором вращения  $U(\psi) = \exp(i\psi a^\dagger a)$ . Этот оператор унитарен и не изменяет скалярные произведения, входящие в уравнение (6), а значит, и не влияет на его решения. Сдвиг состояния на комплексную величину  $\delta$  описывается унитарным оператором сдвига  $D(\delta) = \exp(\delta a^\dagger - \delta^* a)$ , действие которого на когерентное состояние задается уравнением [23]

$$D(\delta)|\alpha\rangle = e^{i\text{Im}(\delta\alpha^*)}|\alpha + \delta\rangle. \quad (10)$$

Замена амплитуды  $\alpha$  на амплитуду  $\alpha + \delta$  соответствует несколько другому оператору  $\tilde{D}(\delta)$ , такому что  $\tilde{D}(\delta)|\alpha\rangle = |\alpha + \delta\rangle$ . Будем называть этот оператор «оператором чистого сдвига». Этот оператор неунитарен и не сохраняет скалярные произведения:  $\langle\alpha|\tilde{D}^\dagger(\delta)\tilde{D}(\delta)|\beta\rangle = \langle\alpha + \delta|\beta + \delta\rangle \neq \langle\alpha|\beta\rangle$ , но сохраняет их модуль, так как отличается от унитарного оператора  $D(\delta)$  только фазовым множителем. Поскольку уравнение (7) включает только модуль скалярного произведения, а уравнение (6) — также и его фазу, то собственные значения оператора плотности инвариантны к чистому сдвигу, а коэффициенты разложения собственных векторов — нет. Таким образом, абсолютные параметры не влияют на собственные значения оператора плотности и, следовательно, на энтропию. В отличие от этих параметров, расстояние  $L$  характеризует относительное расположение двух амплитуд и может быть названо «относительным» параметром, влияющим на энтропию.

Подставляя диагональный вид оператора плотности в уравнение (2) и используя формулу (8), получаем энтропию смеси двух равновероятных коге-

рентных состояний в виде [20]

$$S(\rho) = h_2 \left( \frac{1 - e^{-L^2/2}}{2} \right), \quad (11)$$

где

$$h_2(s) = -s \log_2 s - (1 - s) \log_2(1 - s)$$

— энтропия Шеннона [24]. При  $L$ , возрастающем от 0 до  $\infty$ , аргумент функции в (11) монотонно возрастает от 0 до  $1/2$ . На этом участке энтропия  $h_2(s)$  монотонно возрастает, что можно показать, взяв ее производную  $h'_2(s) = -\log_2[s/(1-s)]$  и убедившись в том, что она положительна при  $s \in (0, 1/2)$ . Отсюда следует, что энтропия смеси двух когерентных состояний (11) является монотонно возрастающей функцией  $L$ , стремящейся к своему асимптотическому значению 1 при  $L \rightarrow \infty$ .

Среднее число фотонов в случайно выбранной моде имеет вид

$$N = \text{Tr} (a^\dagger a \rho) = \frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) = |\kappa|^2 + \frac{L^2}{4}. \quad (12)$$

Следовательно, в отличие от энтропии, среднее число фотонов зависит не только от длины  $L$  отрезка, соединяющего амплитуды состояний на комплексной плоскости, но и от абсолютного значения координаты центра этого отрезка  $|\kappa|$ . Если теперь рассмотреть множество всех отрезков с фиксированным значением  $N$  и задаться вопросом, какова максимальная энтропия  $S_2^{max}$  на этом множестве, то ответ будет очевиден: максимум энтропии достигается на отрезках с  $\kappa = 0$ . Действительно, рост  $|\kappa|$  при фиксированном  $N$  означает уменьшение  $L$  и, в силу установленной выше монотонности энтропии, уменьшение энтропии. Таким образом, максимальная энтропия при заданном среднем числе фотонов имеет вид

$$S_2^{max}(N) = h_2 \left( \frac{1 - e^{-2N}}{2} \right) \quad (13)$$

и достигается при выборе  $\beta = -\alpha$ . Такой выбор букв двоичного алфавита обеспечивает максимальную емкость оптического канала связи при заданной средней энергии (числе фотонов) на фотоприемнике.

Подставляя (8) в (6), получаем собственные векторы в виде

$$|\lambda_{1,2}\rangle = C_{1,2}^\alpha \left( |\alpha\rangle \pm e^{-i \text{Im} \alpha^* \beta} |\beta\rangle \right), \quad (14)$$

где из условия нормировки находим

$$C_{1,2}^\alpha = \left( 2 \pm 2e^{-L^2/2} \right)^{-1/2}.$$

Состояния (14) являются суперпозициями двух когерентных состояний. При оптимальном выборе  $\beta = -\alpha$  они представляют собой четное и нечетное когерентные состояния [25], широко исследуемые в связи с тем, что они являются оптическими реализациями известного состояния «кота Шрёдингера» [26–29].

### 3. ЭНТРОПИЯ СМЕСИ ТРЕХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим три когерентных состояния с произвольными комплексными амплитудами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Эти состояния могут быть использованы для передачи информации в оптической линии связи, представляя собой буквы трехбуквенного алфавита. В случае, когда частоты употребления всех трех букв совпадают и равны  $1/3$ , состояние случайно выбранной моды задается оператором плотности

$$\rho = \frac{1}{3} (|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta| + |\gamma\rangle\langle\gamma|). \quad (15)$$

Как и в случае двух когерентных состояний, рассмотренном в предыдущем разделе, максимальная информация, которую можно передать с помощью таких состояний по оптической линии связи, дается энтропией фон Неймана  $S(\rho)$ , определяемой уравнением (3), вычисленной для оператора (15). Для нахождения этой величины, аналогично предыдущему разделу, найдем собственные значения  $\lambda_n$  и собственные векторы  $|\lambda_n\rangle$  оператора плотности:

$$\rho|\lambda_n\rangle = \lambda_n|\lambda_n\rangle. \quad (16)$$

#### 3.1. Собственные значения оператора плотности

Все три собственных вектора оператора плотности лежат в линейной оболочке трех когерентных состояний  $\{|\alpha\rangle, |\beta\rangle, |\gamma\rangle\}$  и могут быть записаны как

$$|\lambda_n\rangle = C_n^\alpha |\alpha\rangle + C_n^\beta |\beta\rangle + C_n^\gamma |\gamma\rangle, \quad (17)$$

где индекс  $n$  принимает значения 0, 1, 2, а  $C_n^\alpha$ ,  $C_n^\beta$  и  $C_n^\gamma$  — комплексные коэффициенты. Подставляя (15) и (17) в (16) и используя линейную независимость когерентных состояний, получаем уравнение для комплексных коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} 1 - 3\lambda_n & \langle\alpha|\beta\rangle & \langle\alpha|\gamma\rangle \\ \langle\alpha|\beta\rangle^* & 1 - 3\lambda_n & \langle\beta|\gamma\rangle \\ \langle\alpha|\gamma\rangle^* & \langle\beta|\gamma\rangle^* & 1 - 3\lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n^\alpha \\ C_n^\beta \\ C_n^\gamma \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$

Для того чтобы это уравнение имело ненулевое решение, детерминант матрицы должен обращаться в нуль, что приводит нас к характеристическому уравнению

$$(1 - 3\lambda)^3 - (1 - 3\lambda)3T^2 + 2Q = 0. \quad (19)$$

Здесь  $T$  и  $Q$  — два действительных параметра, принимающие значения от 0 до 1, причем первый из них определяется как

$$T = \sqrt{\frac{|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 + |\langle\alpha|\gamma\rangle|^2 + |\langle\beta|\gamma\rangle|^2}{3}} \quad (20)$$

и имеет смысл среднего перекрытия между состояниями-буквами, а второй параметр определяется геометрией взаимного расположения состояний на комплексной плоскости и равен

$$Q = \frac{\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle\langle\gamma|\beta\rangle + \langle\alpha|\beta\rangle\langle\gamma|\alpha\rangle\langle\beta|\gamma\rangle}{2} = |\langle\beta|\alpha\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle\langle\gamma|\beta\rangle| \cos(2S_{\alpha\beta\gamma}), \quad (21)$$

где

$$S_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\text{Im}(\alpha^*\beta + \beta^*\gamma + \gamma^*\alpha)}{2} \quad (22)$$

— площадь ориентированного треугольника, образованного точками  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  на комплексной плоскости, причем знак этой величины положителен при обходе вершин против часовой стрелки и отрицателен при обходе в обратном направлении. Для трех точек, лежащих на прямой, например, для действительных  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , как следует из (22),  $S_{\alpha\beta\gamma} = 0$ . С другой стороны, для треугольника с площадью  $S_{\alpha\beta\gamma} = \pi/4 + m\pi/2$ , где  $m$  — целое число,  $Q$  обращается в нуль.

Для нахождения корней уравнения (19) проведем замену переменной

$$\nu = \frac{1 - 3\lambda}{2T} \quad (23)$$

и перепишем его в виде

$$4\nu^3 - 3\nu + \sin 3\theta = 0, \quad (24)$$

где введен новый параметр  $\theta$ , определяемый из соотношения

$$\sin 3\theta = \frac{Q}{T^3}. \quad (25)$$

Подобная параметризация возможна всегда в силу ограничения  $|Q| \leq T^3$ , которое следует из известного неравенства арифметического и геометрического средних [30]: для любых трех положительных чисел  $x_1, x_2, x_3$  их геометрическое среднее ограничено сверху их арифметическим средним,

$$\sqrt[3]{x_1x_2x_3} \leq (x_1 + x_2 + x_3)/3.$$

В нашем случае

$$x_1 = |\langle\alpha|\beta\rangle|^2, \quad x_2 = |\langle\beta|\gamma\rangle|^2, \quad x_3 = |\langle\gamma|\alpha\rangle|^2,$$

откуда искомое неравенство следует с учетом того, что модуль косинуса не превышает единицу:

$$|Q|^{2/3} \leq \sqrt[3]{x_1x_2x_3} \leq T^2.$$

По определению угол  $3\theta$  принимает значения от  $-\pi/2$  до  $\pi/2$ , а это значит, что угол  $\theta$  лежит в интервале  $[-\pi/6, \pi/6]$ .

Одно решение уравнения (24) находится из формулы для куба синуса

$$\sin^3 \theta = (3 \sin \theta - \sin 3\theta)/4,$$

откуда следует  $u_1 = \sin \theta$ . Два других корня имеют вид

$$u_{2,3} = \sin \left( \theta \pm \frac{2\pi}{3} \right),$$

в чем можно убедиться, подставив их в уравнение (12) и воспользовавшись той же формулой для куба синуса с учетом  $2\pi$ -периодичности синуса. Возвращаясь к исходной переменной, получаем собственные значения оператора плотности в виде

$$\lambda_n = \frac{1}{3} \left[ 1 - 2T \sin \left( \theta + \frac{2\pi n}{3} \right) \right], \quad n = 0, 1, 2. \quad (26)$$

Величины  $Q$ ,  $T$  и  $\theta$  зависят только от расстояний между тремя когерентными состояниями-буквами на комплексной плоскости и от площади треугольника, образуемого ими. Это означает, что собственные значения  $\lambda_n$  инвариантны по отношению к сдвигам и вращению всех трех состояний-букв на комплексной плоскости. Как и в случае двух состояний, такая инвариантность определяется тем, что в уравнение (18) входят только скалярные произведения векторов, которые не изменяются унитарными операторами сдвига  $D(\delta)$  и вращения  $U(\psi)$ . Как и в предыдущем разделе, введем три «абсолютных» параметра для набора состояний-букв: координату центроида треугольника (точки пересечения медиан [31])  $\xi = (\alpha + \beta + \gamma)/3$  и угол наклона медианы, опущенной из точки  $\alpha$ , к действительной оси  $\arg(\alpha - \xi)$ .

Таким образом, хотя три комплексных амплитуды задаются шестью действительными параметрами, собственные значения оператора плотности будут зависеть только от трех «относительных» параметров, в силу инвариантности по отношению к трехпараметрической группе сдвигов и вращений. Как показывает уравнение (26), число параметров может быть даже уменьшено до двух,  $T$  и  $\theta$ , однако эти параметры не являются независимыми в



том смысле, что пределы изменения одного из них зависят от значения другого. Это следует из следующего требования: оператор плотности в квантовой механике всегда положительно определен, а значит его собственные значения  $\lambda_n$  всегда неотрицательны. Полагая  $\theta = -\pi/6$ , имеем  $\sin(\theta + 2\pi/3) = 1$  и из уравнения (26) получаем, что  $\lambda_1$  неотрицательно только при  $T \leq 1/2$ . В общем случае верхняя граница  $T$  будет сложной функцией  $\theta$ , что затрудняет анализ энтропии.

### 3.2. Представление треугольника точкой в трехмерном пространстве

Для удобства вычислений собственных значений и энтропии необходимо правильно ввести три «относительных» параметра, характеризующих взаимное расположение амплитуд  $\alpha, \beta, \gamma$  на комплексной плоскости. В качестве первого шага переходим в систему координат с центром, расположенным в центроиде  $\xi = (\alpha + \beta + \gamma)/3$ . В этой системе координат амплитуды  $\alpha, \beta, \gamma$  преобразуются в амплитуды

$$\alpha_1 = \alpha - \xi, \quad \beta_1 = \beta - \xi, \quad \gamma_1 = \gamma - \xi, \quad (27)$$

представленные на рис. 1а. При этом остается неисключенным еще один «абсолютный» параметр — угол  $\arg(\alpha_1)$  поворота треугольника  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$  на комплексной плоскости амплитуд. Чтобы его исключить, перейдем в трехмерное пространство, координатами точек которого являются стороны треугольника

$$x = |\alpha - \beta|, \quad y = |\gamma - \beta|, \quad z = |\gamma - \alpha|. \quad (28)$$

Очевидно, что построенная таким образом точка в пространстве  $(x, y, z)$ , например, точка 1 на рис. 1b, соответствующая треугольнику  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$  на плоскости рис. 1а, не зависит от угла  $\arg(\alpha_1)$ . Однако при таком отображении геометрически эквивалентные треугольники отображаются в разные точки трехмерного пространства. Так, геометрически эквивалентные треугольники  $\alpha_i\beta_i\gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) на рис. 1а, являющиеся шестью элементами симметрической группы перестановок  $S_3$ <sup>1)</sup> сторон треугольника:

$$1 = (x, y, z), \quad 2 = (y, x, z), \quad 3 = (z, x, y),$$

<sup>1)</sup> Изоморфной диэдральной группе  $D_3$  преобразований треугольника  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ : например, тождественного преобразования, четырех поворотов относительно изоцентра на  $120^\circ$  ( $1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 5, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 6$ ) и отражения относительно мнимой оси  $1 \rightarrow 2$ .

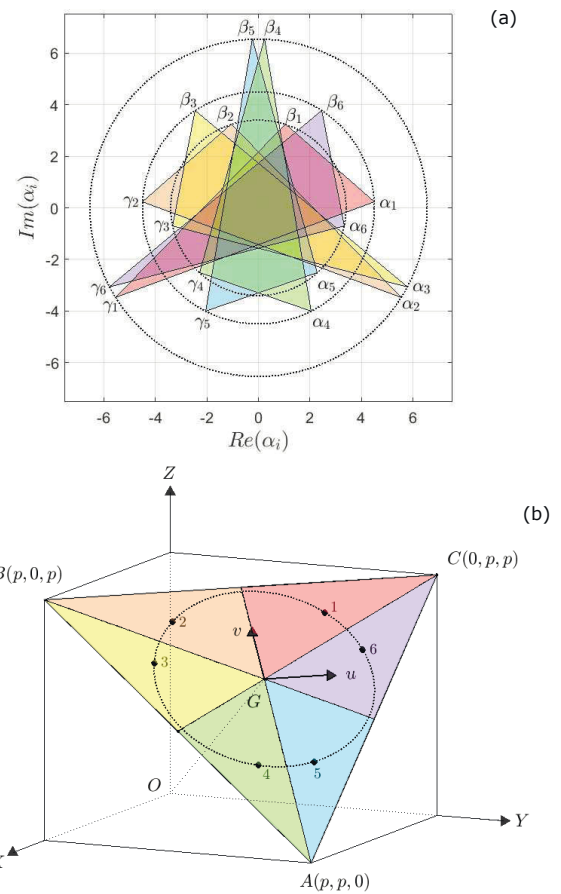


Рис. 1. а) Треугольник  $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ , образуемый амплитудами (27), и треугольники  $\alpha_i\beta_i\gamma_i$  ( $i = 2, \dots, 6$ ), получаемые при перестановке его сторон (28), вместе образующие элементы группы  $S_3$ . б) Отображение треугольников  $\alpha_i\beta_i\gamma_i$  из комплексной плоскости амплитуд в точки трехмерного пространства  $i$ , координаты которых задают стороны треугольников ( $\alpha_i\beta_i\gamma_i \mapsto i$ ). Цвет сектора на рис. б соответствует цвету отображаемого треугольника на рис. а

$$4 = (z, y, x), \quad 5 = (y, z, x), \quad 6 = (x, z, y),$$

и генерирующие одинаковые собственные значения, представлены шестью разными точками в трехмерном представлении на рис. 1b.

Введем параметризацию, позволяющую избежать этой многозначности.  $3D$ -область, в которую отображаются треугольники, ограничивается неравенствами

$$x + y \geq z, \quad x + z \geq y, \quad y + z \geq x,$$

образующими треугольный конус с вершиной в начале координат. Точки, изображающие треугольники с заданным полупериметром  $p$ , расположенные

на плоскости  $x + y + z = 2p$ , ограничены ее сечением с данным конусом рис. 1*b*. Вершинами этой равносторонней треугольной области являются точки  $A = (p, p, 0)$ ,  $B = (p, 0, p)$  и  $C = (0, p, p)$ . Ее центр — точка

$$G = \left(\frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p, \frac{2}{3}p\right)$$

есть  $3D$ -отображение равностороннего треугольника из комплексной плоскости. Введем в плоскости  $ABC$  декартову систему координат  $(u, v)$  с центром в точке  $G$ , с осью  $v$ , лежащей в одной плоскости с осью  $z$ , и с осью  $u$ , перпендикулярной ей (рис. 1*b*). Обозначим единичные векторы вдоль направлений  $u$  и  $v$  через  $\mathbf{e}_u$  и  $\mathbf{e}_v$  соответственно. Эти векторы можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{e}_u = (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)/\sqrt{2}, \tag{29}$$

$$\mathbf{e}_v = (-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + 2\mathbf{e}_z)/\sqrt{6}, \tag{30}$$

где  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$  и  $\mathbf{e}_z$  — единичные векторы вдоль направлений  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно.

В плоскости треугольника  $ABC$  будем пользоваться полярными координатами  $(r, \varphi)$ , которые вводятся стандартным образом:  $u = r \cos \varphi$ ,  $v = r \sin \varphi$ . Вектор

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

расположенный в плоскости  $ABC$  и представляющий треугольник  $(x, y, z)$ , можно записать как

$$2p(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)/3 + r \cos \varphi \mathbf{e}_u + r \sin \varphi \mathbf{e}_v.$$

Приравнивая эти два выражения, с использованием уравнений (29) и (30) получаем после некоторых преобразований

$$x = [2p + \sqrt{6}r \sin(\varphi + 4\pi/3)]/3, \tag{31}$$

$$y = [2p + \sqrt{6}r \sin(\varphi + 2\pi/3)]/3, \tag{32}$$

$$z = [2p + \sqrt{6}r \sin(\varphi)]/3. \tag{33}$$

При  $r = 0$  получаем равносторонний треугольник, а при  $\varphi = (2k+1)\pi/6$ , где  $k$  пробегает значения от 0 до 5 — равнобедренные треугольники, причем в треугольниках с  $k = 0, 2, 4$  основание меньше, чем боковые стороны, а в треугольниках с  $k = 1, 3, 5$  — больше. Так, для  $r \neq 0$ , при изменении  $\varphi$  от  $\pi/6$  до  $\pi/2$  треугольник плавно изменяет свою форму от равнобедренного с  $x < y = z$  до другого равнобедренного с  $x = y < z$ . В остальных пяти секторах, однозначно задаваемых параметром  $\varphi$ , имеем геометрически эквивалентные треугольники с переставленными сторонами, т.е. исследование энтропии

достаточно ограничить одним из этих секторов, например,  $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$ , где  $z \geq y \geq x$ . В этом секторе, для заданного угла  $\varphi$ ,  $r \in [0, p/(\sqrt{6} \sin \varphi)]$  (см. также рис. 2*a*, где этот сектор обозначен штриховкой).

Таким образом, любой треугольник полностью описывается тремя параметрами  $(p, r, \varphi)$ , где полупериметр  $p$  задает его размер, параметр  $r$  характеризует его деформацию — степень удаленности от равностороннего, а  $\varphi$  задает форму треугольника при заданном размере и деформации.

Для известных  $(x, y, z)$  параметры  $(p, r, \varphi)$  можно получить, обращая уравнения (31)–(33). Для полупериметра  $p$  получаем просто его определение, для деформации —

$$r = \sqrt{(x - 2p/3)^2 + (y - 2p/3)^2 + (z - 2p/3)^2}, \tag{34}$$

и, наконец, для угла —

$$\varphi = \arcsin \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{z - 2p/3}{r} \right). \tag{35}$$

В последнем уравнении мы полагаем  $z \geq y \geq x$ , в результате чего  $\varphi$  попадает в интересующий нас сектор  $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$ .

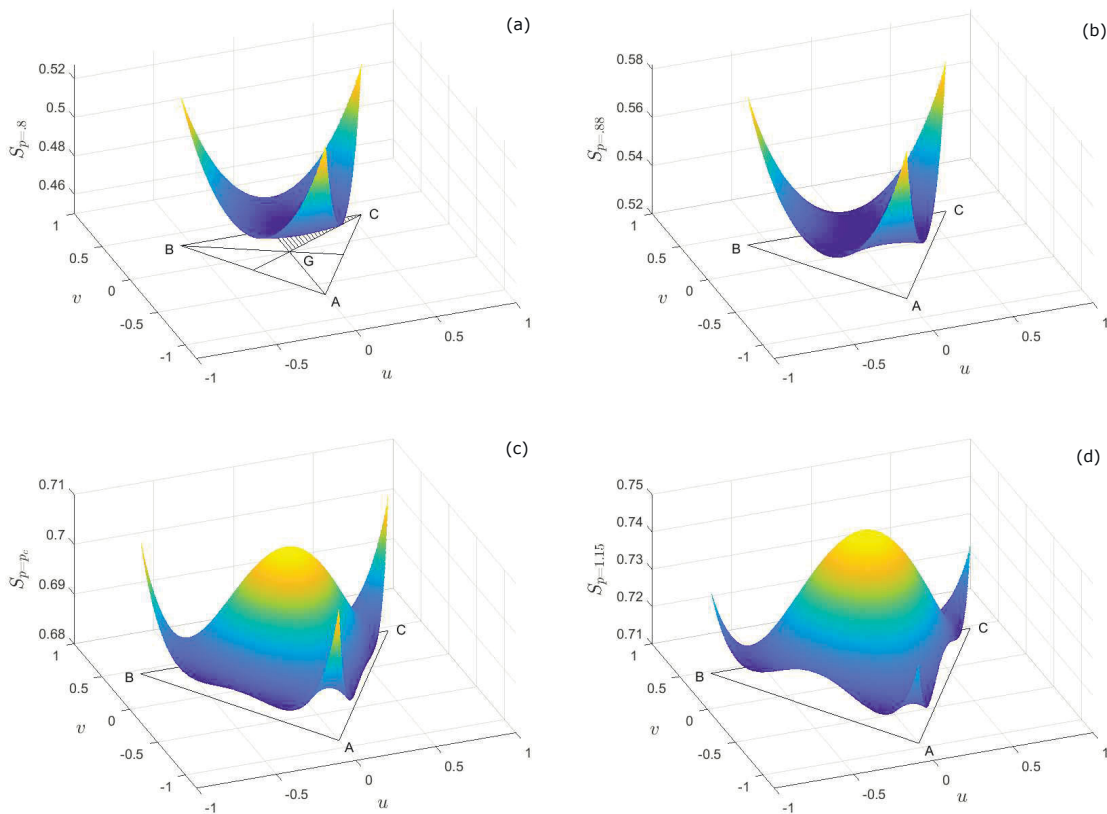
### 3.3. Энтропия фон Неймана

Энтропия фон Неймана для оператора плотности дается энтропией Шеннона его собственных значений:

$$S = - \sum_{n=0}^2 \lambda_n \log_2 \lambda_n. \tag{36}$$

Эта величина стремится к своему максимальному значению  $\log_2 3 = 1.585$  при достаточном взаимном удалении всех трех точек на комплексной плоскости. Для произвольного треугольника с относительными параметрами  $(p, r, \varphi)$  величины  $(x, y, z)$  рассчитываются по формулам (31)–(33). Площадь треугольника дается формулой Герона  $S_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$ , которая вместе с формулой (9) позволяет выразить  $T$  и  $Q$  через  $(x, y, z)$ , а затем найти собственные значения оператора плотности по формуле (26). На рис. 2 показаны результаты такого расчета для различных значений полупериметра  $p$ .

При малых значениях полупериметра  $p$  (малых отличий амплитуд когерентных состояний) максимальной энтропией обладают вырожденные конфигурации А, В и С, когда одна из букв двухбуквенного алфавита когерентных состояний повторяется



**Рис. 2.** Энтропия  $S_p$  равновероятной смеси трех когерентных состояний, образующих треугольник с полупериодом  $p$ , для всевозможных конфигураций треугольников, каждый из которых представлен точкой на плоскости  $\{u = r \cos \varphi, v = r \sin \varphi\}$  из области ABC. Точка G на рис. *a* соответствует равнобедренному треугольнику когерентных состояний. Точки A, B и C обозначают вырожденные равнобедренные треугольники  $\{x = y, z = 0\}$ ,  $\{x = z, y = 0\}$  и  $\{y = z, x = 0\}$  соответственно. Заштрихованная область на рис. *a* выделяет сектор  $\varphi \in [\pi/6, \pi/2]$ , где  $z \geq y \geq x$ . Точки из пяти других секторов соответствуют перестановкам сторон  $x, y, z$  треугольника когерентных состояний из данного сектора.  $p = 0.8$  (a),  $0.88$  (b);  $p_c = 1.097$  (c),  $1.15$  (d)

в два раза чаще другой<sup>2)</sup>. На рис. 2a эта ситуация представлена тремя максимумами в точках A, B, C и минимумом в точке G (равносторонний треугольник когерентных состояний). При увеличении  $p$  в области значений  $p = 1$  происходит изменение структуры зависимости энтропии  $S_p$  от конфигурации треугольника когерентных состояний. Вначале (рис. 2b) появляется локальный максимум в точке G, величина которого быстро растет и при  $p = p_c = 1.097$  его значение становится равным мак-

симумам для вырожденных конфигураций A, B, C (рис. 2c). При  $p > p_c$  энтропия в точке G становится глобальным максимумом для всевозможных конфигураций трех когерентных состояний (рис. 2d).

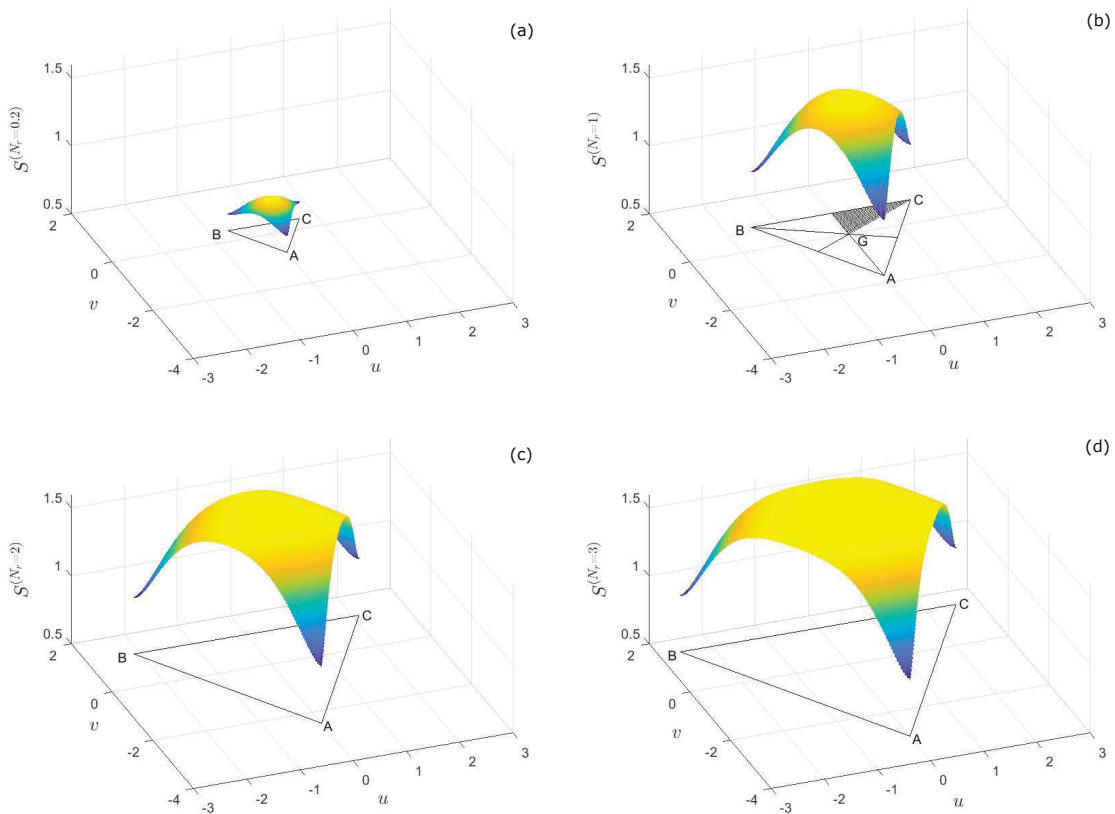
Задачей, важной для практических приложений, является нахождение максимальной энтропии для заданного среднего числа фотонов

$$N = \text{Tr}(a^\dagger a \rho) = \frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2}{3} = |\xi|^2 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{9}, \quad (37)$$

где последнее равенство получено путем перехода к координатам амплитуд относительно центра  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  (27) и использования свойства  $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0$ . Как и в случае двух когерентных состояний, рассмотренном в разд. 2, среднее число фотонов зависит не только от относительных пара-

<sup>2)</sup> В этом случае, например для конфигурации A, матрица плотности (15) трансформируется в матрицу  $\rho = (2|\alpha\rangle\langle\alpha| + |\beta\rangle\langle\beta|)/3$ , имеющую два собственных значения  $\lambda_{\pm} = [3 \pm \sqrt{1 + 8 \exp(-p^2)}]/6$ , которые, как можно показать, совпадают с собственными значениями, вычисляемыми по формуле (26):  $\lambda_+ = \lambda_0, \lambda_- = \lambda_2$ . Третье собственное значение  $\lambda_1 = 0$ .





**Рис. 3.** Энтропия  $S^{(N_r)}$  смеси трех когерентных состояний (15) с заданной относительной энергией  $\hbar\omega N_r$  для всевозможных конфигураций треугольников, каждый из которых представлен точкой на плоскости  $\{u = r \cos \varphi, v = r \sin \varphi\}$  из области ABC (см. обозначения на рис. 2).  $N_r = 0.2$  (a), 1 (b), 2 (c), 3 (d)

метров, но и от абсолютного — модуля координаты центроида  $|\xi|$ . Энтропия как мера различимости состояний (букв), используемых для кодирования сообщений, зависит только от относительной части энергии этих состояний, т.е. от величины

$$N_r = (x^2 + y^2 + z^2)/9.$$

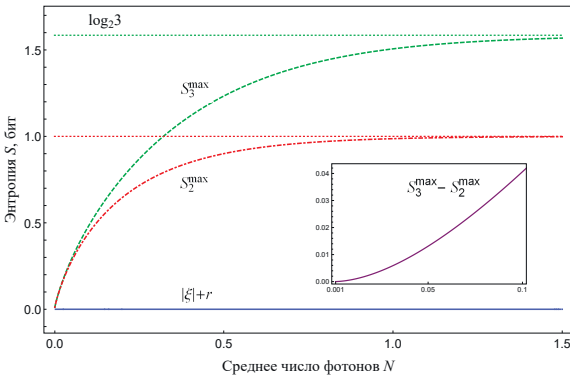
В отличие от энтропии для множества треугольников с заданным полупериметром (рис. 2), энтропия множества треугольников с заданной относительной энергией  $\hbar\omega N_r$  является выпуклой функцией переменных  $\{u = r \cos \varphi, v = r \sin \varphi\}$ , как показывают примеры, приведенные на рис. 3. При этом ее максимум достигается для равностороннего треугольника и этот максимум растет с ростом  $N_r$ .

На рис. 4 показан результат численного поиска максимальной энтропии  $S_3^{max}(N)$  при заданном среднем числе фотонов  $N$ , где оптимизация проводится по всем шести параметрам, как относительным, так и абсолютным. Максимальное значение энтропии при каждом  $N$  соответствует  $|\xi| = 0$  и

$r = 0$ , т.е. равностороннему треугольнику, центрированному в начале координат. Найденная величина сравнивается с зависимостью  $S_2^{max}(N)$ , определяемой уравнением (13). Как для двух, так и для трех когерентных состояний максимальная энтропия стремится к своему максимальному значению с ростом среднего числа фотонов  $N$ . Важно, что не только предельное значение для трех состояний выше предельного значения для двух, но и что кривая  $S_3^{max}(N)$  всегда лежит выше кривой  $S_2^{max}(N)$ , даже при малых  $N$ , что видно на вставке на рис. 4. Это означает, что при сколь угодно высоком уровне потерь в оптической линии связи кодирование на основе трех состояний превосходит по емкости кодирование на основе двух.

### 3.4. Собственные векторы оператора плотности

Для нахождения собственных векторов оператора плотности введем три новых вектора, являю-



**Рис. 4.** Максимальная энтропия при заданном среднем числе фотонов при использовании трех (штриховая зеленая линия) и двух (штрих-пунктирная красная линия) когерентных состояний. Значение  $|\xi| + r$ , при котором достигается максимум  $S_3^{max}$  (сплошная синяя линия), равно нулю. Вставка показывает, что разность энтропий для трех и двух состояний всегда положительна

щихся результатом действия унитарного оператора сдвига (10) на состояния-буквы:

$$|\psi_\mu\rangle = D(-\xi)|\mu\rangle = e^{-i\text{Im}(\xi\mu^*)}|\mu_1\rangle, \quad (38)$$

где  $\mu$  принимает значения  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Если новые состояния моды поля служат буквами алфавита для кодирования сообщений в квантовом канале связи и имеют равные статистические веса, то оператор плотности случайно выбранной моды имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{1}{3}(|\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha| + |\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta| + |\psi_\gamma\rangle\langle\psi_\gamma|) = \\ &= D(-\xi)\rho D^\dagger(-\xi). \end{aligned} \quad (39)$$

Поскольку оператор  $\tilde{\rho}$  получен из оператора  $\rho$  посредством унитарного преобразования, его собственные значения равны  $\lambda_n$ , а собственные векторы имеют вид

$$|\tilde{\lambda}_n\rangle = D(-\xi)|\lambda_n\rangle.$$

Таким образом, найдя собственные векторы  $\tilde{\rho}$ , что проще, чем находить собственные векторы  $\rho$ , мы получим последние в виде

$$|\lambda_n\rangle = D(\xi)|\tilde{\lambda}_n\rangle.$$

Три собственных вектора оператора плотности  $\tilde{\rho}$  лежат в линейной оболочке трех когерентных состояний  $\{|\alpha_1\rangle, |\beta_1\rangle, |\gamma_1\rangle\}$  и могут быть записаны в виде суперпозиции

$$|\tilde{\lambda}_n\rangle = \tilde{C}_n^\alpha|\alpha_1\rangle + \tilde{C}_n^\beta|\beta_1\rangle + \tilde{C}_n^\gamma|\gamma_1\rangle, \quad (40)$$

чьи коэффициенты разложения можно получить, действуя оператором  $D(-\xi)$  на обе части уравнения (17) и воспользовавшись соотношением (38):

$$\tilde{C}_n^\mu = C_n^\mu e^{-i\text{Im}(\xi\mu^*)}.$$

Учитывая, что модули скалярных произведений пар когерентных состояний  $|\langle\mu|\delta\rangle|$  в уравнениях (18) определяются одним параметром — расстоянием между ними (28), равным в рассматриваемом случае стороне треугольника, противоположной третьему когерентному состоянию, не входящему в пару  $\{\mu, \delta\}$  из множества трех амплитуд  $\mathfrak{A} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ :

$$(\mathfrak{A} \setminus \{\alpha, \beta\} = \{\gamma\}), \quad (\mathfrak{A} \setminus \{\beta, \gamma\} = \{\alpha\}), \quad (\mathfrak{A} \setminus \{\alpha, \gamma\} = \{\beta\}),$$

введем функцию

$$s(\gamma) = x, \quad s(\alpha) = y, \quad s(\beta) = z, \quad (41)$$

которая, с учетом полученных собственных значений (26), позволяет представить уравнения (18) для векторов с центроидом в начале координат (40) в виде

$$\begin{pmatrix} \nu_n & q_{s(\gamma)}e^{i\psi_{\alpha\beta}} & q_{s(\beta)}e^{i\psi_{\alpha\gamma}} \\ q_{s(\gamma)}e^{i\psi_{\beta\alpha}} & \nu_n & q_{s(\alpha)}e^{i\psi_{\beta\gamma}} \\ q_{s(\beta)}e^{i\psi_{\gamma\alpha}} & q_{s(\alpha)}e^{i\psi_{\gamma\beta}} & \nu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{C}_n^\alpha \\ \tilde{C}_n^\beta \\ \tilde{C}_n^\gamma \end{pmatrix} = 0. \quad (42)$$

Здесь

$$\nu_n = \sin(\theta + 2\pi n/3),$$

$$q_{s(\mu)} = e^{-(s(\mu))^2/2}/(2T)$$

— набор нормированных скалярных произведений

$$(q_{s(\alpha)}^2 + q_{s(\beta)}^2 + q_{s(\gamma)}^2 = 3/4),$$

а  $\psi_{\mu\delta} = \text{Im}(\mu^*\delta)$  — фазы соответствующих произведений  $\langle\mu_1|\delta_1\rangle$ :

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha\beta} &= \psi_{\beta\gamma} = \psi_{\gamma\alpha} = \\ &= -\psi_{\alpha\gamma} = -\psi_{\beta\alpha} = -\psi_{\gamma\beta} = \psi = 2S_{\alpha\beta\gamma}/3 > 0. \end{aligned}$$

Решение уравнений (42) дает три ортонормированных,  $\langle\tilde{\lambda}_n|\tilde{\lambda}_m\rangle = \delta_{nm}$ , собственных вектора (40), распределение девяти амплитуд вероятностей  $|\tilde{C}_n^\mu|^2$  в которых определяется соотношением

$$|\tilde{C}_n^\mu|^2 = \frac{1}{9\lambda_n} \frac{\nu_n^2 - q_{s(\mu)}^2}{\nu_n^2 - 1/4}, \quad (43)$$

а их фазы задаются с точностью до произвольного слагаемого, например, фаз амплитуд  $\tilde{C}_n^\gamma$  для различных  $n$ ,

$$\tilde{C}_n^\mu = |\tilde{C}_n^\mu| e^{i\Psi_n^\mu}, \quad \mu = \alpha, \beta, \quad (44)$$

посредством выражения

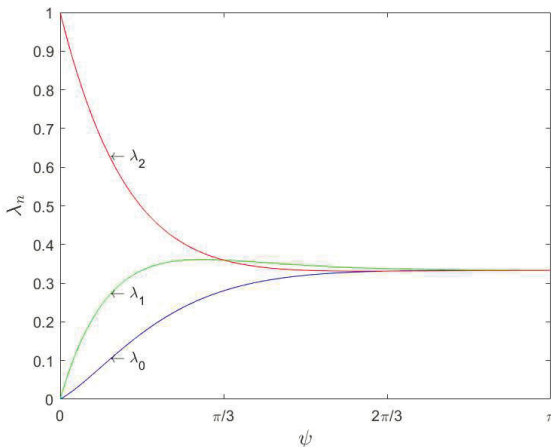
$$e^{i\Psi_n^{\mu\gamma}} = \frac{-\nu_n q_s(\alpha/\{\mu, \gamma\}) e^{i\psi_{\mu\gamma}} + q_s(\mu) q_s(\gamma) e^{-2i\psi_{\mu\gamma}}}{\sqrt{(\nu_n^2 - q_s(\mu)^2)(\nu_n^2 - q_s(\gamma)^2)}}. \quad (45)$$

Наиболее простой вид собственные векторы принимают в случае равностороннего треугольника с центром в начале координат ( $\xi = 0$ ), для которого, как было установлено выше, энтропия максимальна при заданном среднем числе фотонов. Для него  $q_s(\mu) = 1/2$ ,  $\theta = \psi + \pi/6$ ,  $\psi = \sqrt{3}|\gamma|^2/2$ , что, согласно уравнениям (43)–(45), приводит к следующим явным выражениям для собственных векторов:

$$|\tilde{\lambda}_n\rangle = \frac{1}{3\sqrt{\lambda_n}} \left( e^{i\frac{2\pi}{3}(n+1)}|\alpha\rangle + e^{-i\frac{2\pi}{3}(n+1)}|\beta\rangle + |\gamma\rangle \right), \quad n = 0, 1, 2, \quad (46)$$

и собственных значений (26) (рис. 5):

$$\lambda_n = \frac{1}{3} \left[ 1 - 2e^{-\frac{2\pi}{3}|\gamma|^2} \sin\left(\psi + \frac{\pi(1+4n)}{6}\right) \right]. \quad (47)$$



**Рис. 5.** Собственные значения  $\lambda_n$  (47) для случая равностороннего треугольника как функции его площади  $\psi = 2S_{\alpha\beta\gamma}/3 = \sqrt{3}|\alpha|^2/2$

Состояния (46) представляют собой суперпозиции когерентных состояний, лежащих на окружности в фазовой плоскости, и широко изучаются в связи с тем, что являются оптическими реализациями многокомпонентного кота Шрёдингера [26, 32].

В силу соотношений

$$\alpha = e^{i2\pi/3}\gamma, \quad \beta = e^{-i2\pi/3}\gamma,$$

выполненных для равностороннего треугольника, собственные векторы (46) можно также представить, используя три проекционных оператора

$$P_3^{(g)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) = \frac{1}{3} (1 + 2 \cos \frac{2\pi}{3} (\hat{a}^\dagger \hat{a} + g)), \quad g = 0, \pm 1, \quad (48)$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$P_3^{(i)} P_3^{(j)} = \delta_{ij} P_3^{(i)}$$

и образуют полный набор

$$\sum_{g=0,\pm 1} P_3^{(g)} = \hat{I},$$

а именно,

$$|\tilde{\lambda}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} P_3^{(g_n)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |\gamma\rangle, \quad (49)$$

где индексы  $g_n$  однозначно связаны с индексами  $n$ :<sup>3)</sup>

$$g_n = (2 + n) \bmod 3 - 1, \quad (50)$$

т.е.  $g_0 = 1$ ,  $g_1 = -1$ ,  $g_2 = 0$ , при этом

$$\lambda_n = \langle \gamma | P_3^{(g_n)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) | \gamma \rangle.$$

Оператор  $P_3^{(0)}$  осуществляет проецирование на подпространство фоковских состояний  $|n\rangle$ , индекс которых  $n$  кратен 3:

$$P_3^{(0)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle = \delta_{n,3k} |n\rangle, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (51)$$

Если рассматривать целые неотрицательные числа, кратные трем, как неотрицательную часть  $P(H_3)$  подгруппы  $H_3$  аддитивной группы целых чисел, то операторы  $P_3^{(\pm 1)}$  осуществляют проецирование на подпространства фоковских состояний, индексы которых соответствуют неотрицательной части смещенных классов по подгруппе  $H_3$ ,

$$\begin{aligned} P(H_3) &= 0, 3, 6, 9, \dots, \\ P(H_3 + 1) &= 1, 4, 7, 10, \dots, \\ P(H_3 + 2) &= 2, 5, 8, 11, \dots, \end{aligned}$$

так как имеют место соотношения

$$\begin{aligned} P_3^{(-1)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle &= \delta_{n,3k+1} |n\rangle, \\ P_3^{(+1)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) |n\rangle &= \delta_{n,3k+2} |n\rangle, \end{aligned} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (52)$$

<sup>3)</sup> Для доказательства данного равенства удобно представить выражения для проекционных операторов  $P_3^{(g_n)}(\hat{a}^\dagger \hat{a})$  в нормально-упорядоченном виде. Стартуя с соотношения  $e^{iu\hat{a}^\dagger \hat{a}} = :e^{(e^{iu}-1)\hat{a}^\dagger \hat{a}}:$ , получим  $\cos(u(\hat{a}^\dagger \hat{a} + g)) = :e^{(\cos u - 1)\hat{a}^\dagger \hat{a}} \cos(\sin(u)\hat{a}^\dagger \hat{a} + g):$ , что приводит к равенству  $\lambda_n = \langle \gamma | P_3^{(g_n)}(\hat{a}^\dagger \hat{a}) | \gamma \rangle$  с  $\lambda_n$ , определенным выше в (47).

Следовательно, ортогональность состояний  $|\tilde{\lambda}_n\rangle$  проявляется как непересечение подпространств, в которых расположены векторы  $|\tilde{\lambda}_2\rangle, |\tilde{\lambda}_1\rangle, |\tilde{\lambda}_0\rangle$ . Уравнения (51) и (52) также демонстрируют причину соотношения собственных значений  $\lambda_2 > \lambda_1 > \lambda_0$  при  $\psi < \pi/3$  (см. рис. 5), связанную с тем, что при малых амплитудах когерентных состояний будут преобладать состояния из подгруппы, содержащей вакуумные состояния, т.е. состояния  $|\tilde{\lambda}_2\rangle$ , создаваемые проектором  $P_3^{(0)}$  (49). При увеличении амплитуд когерентных состояний веса состояний  $|\tilde{\lambda}_1\rangle$  и  $|\tilde{\lambda}_0\rangle$  поочередно становятся равными  $\lambda_2$ . Сначала, при  $\psi = \pi/3$ , достигается равенство  $\lambda_2 = \lambda_1$ , демонстрируя увеличение веса однофотонных состояний из  $|\tilde{\lambda}_1\rangle$ . Затем, при  $\psi = 2\pi/3$ , становятся значимыми двухфотонные состояния из  $|\tilde{\lambda}_0\rangle$  и достигается равенство  $\lambda_2 = \lambda_0$  (рис. 5). Веса состояний  $|\tilde{\lambda}_1\rangle$  и  $|\tilde{\lambda}_0\rangle$  выравниваются при  $\psi = \pi$ . При дальнейшем увеличении амплитуд данное чередование собственных значений продолжается с периодом  $\pi$  и с одновременным их стремлением к значению  $1/3$ . Отмеченное различие собственных значений в определенном диапазоне амплитуд когерентных состояний является основанием для использования процедуры компрессии квантовых данных [14] при кодировании передаваемых сообщений с помощью когерентных состояний.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье исследована емкость оптического канала связи с использованием сигнальных созвездий в виде двух и трех произвольных когерентных состояний. С этой целью была вычислена энтропия фон Неймана для статистической смеси двух и трех равновероятных когерентных состояний. Для случая трех состояний была введена оригинальная параметризация треугольника, представляющего три когерентных состояния на комплексной плоскости, и на ее основе установлены собственные значения и собственные векторы оператора плотности смеси трех произвольных когерентных состояний.

Для практических применений наибольшее значение имеет следующий основной результат: при заданном среднем числе фотонов энтропия оптимальной смеси трех состояний всегда превосходит энтропию оптимальной смеси двух состояний и оптимальной конфигурацией является равносторонний треугольник с центром в начале координат. Следует отметить, что энтропия определяет верхний предел передаваемой информации, а ее реальный объем опре-

деляется конструкцией ресивера, используемого на принимающей станции. Однако энтропийные соотношения, исследованные в данной статье, определяют фундаментальный предел, достижимый с совершенствованием оптических ресиверов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. С. Я. Килин, *Квантовая оптика. Поля и их детектирование*, Едиториал УРСС, Москва (2003).
2. В. А. Фок, *Начала квантовой механики*, Наука, Москва (1976).
3. С. Я. Килин, УФН **169**, 507 (1999).
4. К. Хелстром, *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания*, Мир, Москва (1979).
5. Дж. Прокис, *Цифровая связь*, Радио и связь, Москва (2000).
6. T. Muciaccia, F. Gargano, and V. M. N. Passaro, *Photonics* **1**, 323 (2014).
7. I. A. Burenkov, O. V. Tikhonova, S. V. Polyakov, *Optica* **5**, 227 (2018).
8. I. B. Djordjevic, *Advanced Coding for Optical Communications*, in *Optical Fiber Telecommunications (Sixth Edition)*, ed. by I. P. Kaminow, T. Li, and A. E. Willner, Academic Press, Boston (2013).
9. I. Khan, D. Elser, T. Dirmeier et al., *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **375**, 20160235 (2017).
10. *Квантовая криптография: идеи и практика*, под ред. С. Я. Килина, Д. Б. Хорошко, А. П. Низовцева, Белорусская наука, Минск (2007).
11. D. Sych and G. Leuchs, *New J. Phys.* **12**, 053019 (2010).
12. Д. Б. Хорошко, Д. И. Пустоход, С. Я. Килин, *Опт. и спектр.* **112**, 373 (2012).
13. B. Schumacher, *Phys. Rev. A* **51**, 2738 (1995).
14. S. Ya. Kilin, *Progr. Opt.* **42**, 3 (2001).
15. A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein et al., *Science* **282**, 706 (1998).
16. D. B. Horoshko and S. Ya. Kilin, *Phys. Rev. A* **61**, 032304 (2000).
17. J. H. Shapiro, G. Saplacoglu, S.-T. Ho et al., *J. Opt. Soc. Amer. B* **4**, 1604 (1987).
18. A. V. Masalov, A. A. Putilin, and M. V. Vasilyev, *J. Mod. Opt.* **41**, 1941 (1994).

19. Д. Б. Хорошко, С. Я. Килин, ЖЭТФ **106**, 1278 (1994).
20. I. V. Dudinets and V.I. Man'ko, J. Russ. Laser. Res. **36**, 251 (2015).
21. K. Brádler and C. Weedbrook, Phys. Rev. A **97**, 022310 (2018).
22. А. С. Холево, Пробл. перед. инф. **9**, 177 (1973).
23. R. J. Glauber, Phys. Rev. **131**, 2766 (1963).
24. C. E. Shannon, Bell System Techn. J. **27**, 379 (1948).
25. V.V. Dodonov, I.A. Malkin and V.I. Man'ko, Physica **72**, 597 (1974).
26. S. Haroche and J.-M. Raimond, *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities and Photons*, Oxford Univ. Press (2006).
27. D. B. Horoshko and S. Ya. Kilin, J. Mod. Opt. **44**, 2043 (1997).
28. D. B. Horoshko, S. Ya. Kilin, Opt. Express **2**, 347 (1998).
29. Д. Б. Хорошко, С. Я. Килин, ЖЭТФ **117**, 844 (2000).
30. R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press (2013).
31. R. Deaux, *Introduction to the Geometry of Complex Numbers*, Dover Publ. (2008).
32. D. B. Horoshko, S. De Bièvre, M. I. Kolobov et al., Phys. Rev. A **93**, 062323 (2016).