

# МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ, ИНДУЦИРУЕМЫЕ ФЕРРОЖИДКОСТЬЮ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

*А. Ю. Зубарев, А. Ю. Мусихин\**

*Уральский Федеральный университет им. Б. Н. Ельцина  
620002, Екатеринбург, Россия*

Поступила в редакцию 19 августа 2022 г.,  
после переработки 21 ноября 2022 г.  
Принята к публикации 21 ноября 2022 г.

Рассмотрена задача о возбуждении стационарных циркуляционных течений в канале, заполненном немагнитной жидкостью с внедренным облаком феррожидкости под действием однородного вращающегося магнитного поля. Исследование проводится с целью развития метода интенсификации транспорта лекарств в кровеносных сосудах. Показано, что при реалистических значениях параметров системы, в канале шириной несколько миллиметров могут развиваться течения со скоростью порядка нескольких миллиметров в секунду, что может обеспечить существенную интенсификацию транспорта в тромбированных сосудах с остановившимся кровотоком.

**DOI:** 10.31857/S004445102304017X  
**EDN:** MTGLYJ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема интенсификации и адресного транспорта лекарств в организме при помощи внешних электрических и магнитных полей является перспективным направлением развития современной медицины (см., например, обзор в [1]). Одной из основных сложностей терапии тромбозов кровеносных сосудов, и, в частности, провоцируемых ими инсультов, является слишком медленный диффузионный транспорт тромболитиков при остановке кровотока в сосуде. Перспективный метод решения задачи интенсификации транспорта лекарств в таких условиях был предложен и запатентован в [2, 3]. Ключевая идея этого метода состоит во введении (инъектировании) в тромбированный сосуд капли нанодисперсной феррожидкости на основе воды или других биосовместимых растворимых жидкостей. Далее к этому сосуду прикладывается осциллирующее магнитное поле, вовлекающее магнитные наночастицы во вращательное и поступательное движение. Эти движения частиц передаются содержащей жидкости и

генерируют в ней циркуляционные течения, интенсифицирующие распространение лекарства в сосуде и, за счет этого, его доставку к тромбу. Несмотря на то, что исследованию этих течений и интенсификации ими транспорта лекарств посвящено несколько исследований [3–6], ясного физического понимания природы этих течений и их оптимальной, с практической точки зрения, организации не достигнуто.

Теоретический анализ таких течений в системах со сферическими частицами под действием вращающегося сильно неоднородного поля был нами выполнен в недавней работе [6]. В частности, было показано, что эти течения возникают в системах с пространственно неоднородным распределением частиц, если градиент напряженности поля достаточно велик. Однако на практике создать поле с необходимым градиентом напряженности не просто. Поэтому представляет интерес исследование ситуаций, когда желаемые течения в несущей жидкости генерируются в слабо-градиентном или вообще в однородном поле. Отметим, что проблема генерирования макроскопических течений в однородной феррожидкости, под действием однородного вращающегося поля, обсуждается довольно давно (см., например, [7, 8] и ссылки в этих работах). Теория вращательного движения феррожидкости с пространственно однородным распределением частиц, поме-

\* E-mail: antoniusmagna@yandex.ru

щенной в цилиндрический сосуд под действием однородного поля, вращающегося в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, была предложена в [7]. В [8] показано, что эта теория приводит к расхождению с экспериментами, примерно, на четыре десятичных порядков величины.

В этой работе мы предлагаем теоретическую модель циркуляционного течения, генерируемого в несущей немагнитной жидкости пространственно неоднородным облаком феррожидкости под действием однородного вращающегося поля в тонком канале, моделирующем кровеносный сосуд. Для максимального упрощения вычислений и чтобы получить физически ясные результаты в обозримой математической форме, мы рассматриваем модельную задачу, в которой канал представляет собой плоскую щель с бесконечными размерами в ее плоскости. Полученные результаты показывают, что пространственно неоднородное распределение частиц в канале может приводить к достаточно интенсивным макроскопическим течениям среды, способным, в частности, существенно интенсифицировать транспорт лекарств в сосудах.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ОСНОВНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Рассмотрим бесконечную плоскую щель толщины  $l$ , заполненную немагнитной жидкостью. В эту жидкость внедрена капля феррожидкости, состоящей из одинаковых эллипсоидальных магнитных наночастиц. К каналу приложено вращающееся однородное магнитное поле с компонентами  $H_x = H_0 \sin \omega t$ ;  $H_z = H_0 \cos \omega t$ . Эта модельная ситуация с выбранной системой координат показана на рис. 1.

Необходимо отметить, что в кровеносный сосуд должна инжектироваться феррожидкость на основе среды, растворимой в плазме крови — иначе са-

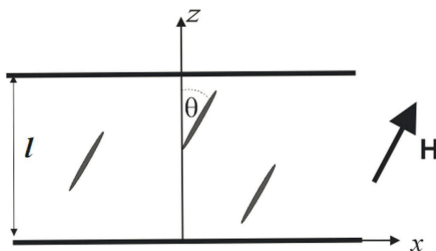


Рис. 1. Иллюстрация рассматриваемой модели и выбранной системы координат. Эллипсоиды — магнитные наночастицы. Масштаб не соблюден

ма инжектированная капля может тромбировать сосуд. При введении в сосуд растворимой феррожидкости эта капля, за счет диффузии, должна довольно быстро «расползтись» в подобие «облака» с более или менее плавным пространственным распределением частиц. Поэтому в дальнейшем мы будем вместо термина «капля» использовать термин «облако».

Обозначим локальную объемную концентрацию частиц  $\Phi(x, z, t)$  и, для максимального упрощения анализа, рассмотрим двумерное приближение, предполагая, что все физические события происходят в плоскости  $(x, z)$ , показанной на рис. 1. Другими словами, мы пренебрегаем зависимостью всех величин от третьей координаты  $y$ . Мы будем предполагать, что концентрация  $\Phi(x, z, t)$  мала, не превосходит нескольких процентов. Поэтому можно пренебречь ее влиянием на локальную эффективную вязкость  $\eta$  феррожидкости и изменением локального магнитного поля  $\mathbf{H}$  за счет размагничивающих эффектов. Соответственно, будем пренебрегать вызванным этим эффектом слабым деформированием капли в направлении поля. Отметим, что приближение малых концентраций  $\Phi$  соответствует ограничениям, диктуемым биологической безопасностью применения магнитных наночастиц в медицинских технологиях.

Уравнения течения намагничивающейся жидкости в пространственно однородном магнитном поле при малых числах Рейнольдса могут быть представлены в виде [8, 9]

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (\Phi \Gamma), \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi \Gamma), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0.$$

Здесь  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа,  $\Gamma$  — статистически среднее значение магнитного момента сил, действующих на единицу объема частицы, т. е. величина момента сил, действующих на частицу, отнесенная к ее объему. Величина  $\frac{1}{2} \Phi \Gamma$  является антисимметричным напряжением, действующим в жидкости, благодаря моменту сил  $\Gamma$  [8, 9]. Условие применимости приближения малых чисел Рейнольдса к рассматриваемой ситуации мы обсудим в конце работы.

Явный вид момента сил  $\Gamma$  определяется магнитными свойствами частиц феррожидкости. Здесь рассмотрим случай одинаковых однодоменных наночастиц с постоянным магнитным моментом

$m = MV$  каждая, где  $M$  — намагниченность насыщения частицы,  $V$  — ее объем. Считаем, что магнитный момент частицы направлен вдоль оси симметрии частицы, что типично для вытянутых феррочастиц. Пренебрегая межчастичными взаимодействиями, что оправдано, если объемная концентрация  $\Phi$  находится в пределах нескольких процентов, имеем [9, 10]

$$\Gamma = \mu_0 H M (\langle e_x \rangle h_z - \langle e_z \rangle h_x).$$

Здесь  $\langle e_x \rangle$  и  $\langle e_z \rangle$  — статистически средние компоненты единичного вектора  $\mathbf{e}$ , направленного вдоль магнитного момента частиц, т. е. вдоль ее оси симметрии,  $h_z = \cos \omega t$ ,  $h_x = \sin \omega t$  — компоненты единичного вектора  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ , где  $\mathbf{H}$  — магнитное поле внутри щели с жидкостью.

Обозначим  $w(\mathbf{e})$  функцию распределения (плотность вероятности) по ориентациям единичного вектора  $\mathbf{e}$ , и выбираем условие ее нормировки в стандартном виде:

$$\int w \, d\mathbf{e} = 1.$$

Функция  $w$  может быть найдена как решение соответствующего уравнения Фоккера—Планка, которое удобно записать в системе координат, вращающейся вместе с полем  $\mathbf{H}$ . В этой системе координат поле неподвижно, несущая жидкость вращается с угловой скоростью  $-\omega$ , а стационарное уравнение Фоккера—Планка имеет вид [9]

$$\omega e_{x'} e_{z'} \frac{\partial w}{\partial e_{x'}} - D_r \kappa \left[ (e_i e_{z'} - h_i) \frac{\partial w}{\partial e_i} + 2w e_{z'} \right] = D_r \left( \frac{\partial^2}{\partial e_i^2} - 2e_i \frac{\partial}{\partial e_i} - e_i e_j \frac{\partial}{\partial e_i \partial e_j} \right) w, \quad (2)$$

$$\kappa = \mu_0 \frac{mH}{kT}, \quad D_r = \frac{kT}{6\eta V \delta(r)},$$

$$\delta(r) = \frac{2}{3} \frac{r^2 + 1}{1 + 2Nr^2 - N}.$$

Здесь  $i, j = x', y', z'$  — вращающиеся с полем  $\mathbf{H}$  декартовы координаты; ось  $z'$  направлена вдоль поля; ось  $x'$  находится в плоскости  $(x, z)$  (см. рис. 2),  $h_{z'} = 1$ ,  $h_{x'} = h_{y'} = 0$ ;  $D_r$  — коэффициент вращательной диффузии частицы;  $\eta$  — вязкость несущей жидкости;  $kT$  — абсолютная температура в энергетических единицах;  $r$  — аспектное отношение эллипсоида (отношение его оси симметрии к диаметру);  $N(r)$  — размагничивающий фактор эллипсоида вдоль его главной оси. Явный вид функции  $N(r)$

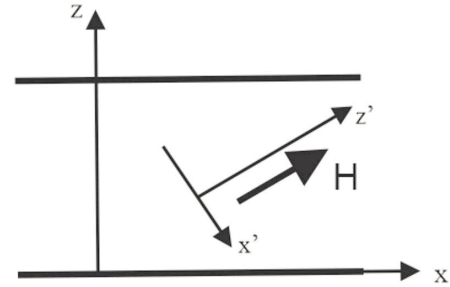


Рис. 2. Иллюстрация вращающейся системы координат  $x', y', z'$ . Ось  $y'$  не показана

можно найти, например, в [10]. В случае вытянутого эллипсоида с аспектным отношением  $r$

$$N = \frac{1}{r^2 - 1} \left[ \frac{r}{\sqrt{r^2 - 1}} \ln \left( r + \sqrt{r^2 - 1} \right) - 1 \right].$$

Отметим, что в (2) и далее используются обозначения Эйнштейна суммирования по повторяющимся индексам  $i, j$ .

В общем случае точное аналитическое решение уравнения (2) не известно. К хорошим приближениям приводит математически простой метод эффективного поля, предложенный в работе [11]; его обсуждение можно найти в книгах [9, 12]. Следуя основной идее этого метода, умножим обе части уравнения (2) на компоненты  $e_{z'}$  и  $e_{x'}$  и проинтегрируем результат по всем направлениям вектора  $\mathbf{e}$ . После вычислений приходим к соотношениям (детали см. в [9])

$$-\frac{1}{2} \langle e_{z'} \rangle + \omega \langle e_{x'} \rangle + \kappa (1 - \langle e_{z'}^2 \rangle) h_{z'} = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \langle e_{x'} \rangle - \omega \langle e_{z'} \rangle - \kappa \langle e_{x'} e_{z'} \rangle h_{z'} = 0,$$

$$\langle \dots \rangle = \int \dots w \, d\mathbf{e}.$$

Для того чтобы определить вторые статистические моменты  $\langle e_{z'}^2 \rangle$  и  $\langle e_{x'} e_{z'} \rangle$ , следуя [11], мы представим неизвестную неравновесную функцию  $w$  в виде равновесной функции, но не в истинном поле  $\mathbf{H}$ , а в некотором эффективном поле  $\mathbf{H}_{ef}$ , компоненты которого предстоит найти:

$$w = \frac{\kappa_{ef}}{\text{sh } \kappa_{ef}} \exp(\kappa_{ef} \cdot \mathbf{e}) \kappa_{ef} = \mu_0 \frac{m \mathbf{H}_{ef}}{kT}. \quad (4)$$

Простые оценки показывают, что для типичных феррожидкостей на водной основе, состоящих из частиц диаметром 10–20 нм, коэффициент вращательной диффузии  $D_r$  по порядку величины равен  $10^5$ – $10^6$  с<sup>-1</sup>. Это намного больше, чем угловая

скорость  $\omega$  поля в типичных экспериментах. Следовательно, можно рассматривать функцию  $w$  как почти равновесную в поле  $\mathbf{H}$ . Математически это означает, что эффективное поле  $\mathbf{H}_{ef}$  должно быть очень близко к истинному полю  $\mathbf{H}$ . Поэтому положим  $\mathbf{H}_{ef} = \mathbf{H} + \delta\mathbf{H}$  или  $\kappa_{ef} = \kappa + \delta\kappa$  и примем, что выполняется сильное неравенство  $\delta H \ll H$ .

Используя форму (4) в уравнении (3), вычисляя статистические моменты  $\langle \dots \rangle$  в линейном приближении по параметру  $\delta\kappa$  и отношению  $\omega/D_r$ , мы приходим к линейному алгебраическому уравнению относительно компонент  $\delta\kappa$  и, как следствие, к уравнениям относительно статистических моментов  $\langle e_{x'} \rangle$  и  $\langle e_{z'} \rangle$ . Опуская подробности, которые могут быть найдены в работах [9, 11, 12], приведем результат:

$$\langle e_{z'} \rangle = L(\kappa), \quad \langle e_{x'} \rangle = -\frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)},$$

$$L(\kappa) = \text{cth } \kappa - \frac{1}{\kappa}.$$

Отметим, что функция  $L(\kappa)$  называется функцией Ланжевена. Используя вращающуюся систему координат  $x', y', z'$ , можно найти величину момента сил  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \mu_0 H M \langle e_{x'} \rangle = -\mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)}. \quad (5)$$

Используя соотношение (5) в уравнениях (1), получаем

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x - \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \frac{\partial}{\partial z} \Phi, \quad (6)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z + \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \frac{\partial}{\partial x} \Phi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial z} v_z = 0.$$

По порядку величины характерное время инерционной релаксации жидкости в щели шириной  $l$  может быть оценено как  $l^2 \rho / \eta$ . Для феррожидкостей на основе воды, заполняющих щели шириной  $l \sim 1$  мм, это время порядка 1 с. Поэтому здесь мы пренебрежем коротким периодом инерционного перехода от состояния покоя жидкости к ее течению, пренебрегая в (1) производной  $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ .

Введем функцию потока  $\Psi$  по стандартному соотношению,

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (7)$$

автоматически обеспечивающему выполнение условия несжимаемости жидкости. Подставляя (7) в уравнения (6), пренебрегая производной  $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ , после простых преобразований приходим к уравнению

$$\Delta^2 \Psi = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 H M}{\eta} \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \Delta \Phi. \quad (8)$$

Граничные условия (8) соответствуют непроницаемости границ щели и отсутствию скольжения жидкости на них. Учитывая, что на бесконечном расстоянии вдоль оси  $x$  от облака феррожидкости несущая жидкость должна быть неподвижной, эти условия могут быть записаны в виде

$$\Psi = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad z = l, \quad (9)$$

$$\Psi \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Отметим, что координата  $z = 0$  расположена на нижней пластине щели на рис. 1, 2.

В пространственно однородном магнитном поле уравнение для объемной концентрации частиц  $\Phi$  имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi + (v \cdot \nabla) \Phi = D \Delta \Phi.$$

Здесь  $D$  — коэффициент трансляционной диффузии частиц. Граничные условия к этому уравнению имеют вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{при } z = 0, l; \quad \Phi \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$\Phi = \Phi_0(x, z), \quad \text{при } t = 0,$$

где  $\Phi_0$  — начальный профиль концентрации.

В общем случае задача (8)–(10) может быть решена только численно. Здесь мы рассмотрим начальную стадию генерации течения, предполагая, что концентрация  $\Phi$  совпадает со своим начальным профилем  $\Phi_0(x, z)$ . Для определенности мы выбираем гауссово распределение концентрации:

$$\Phi_0 = \Phi^0 \exp \left( - \left( \frac{(z - Z)^2}{\sigma_z^2} + \frac{x^2}{\sigma_x^2} \right) \right). \quad (11)$$

Здесь точки  $x = 0, z = Z$  соответствуют центру «облака» феррочастиц,  $\sigma_{x,z}$  — дисперсии распределения концентрации частиц в соответствующих направлениях; они задают характерный размер обла-

ка. Отметим, что распределение (11) вполне соответствует ситуации инжектирования в канал феррожидкости, растворимой в несущей среде, с некоторым ее диффузионным размыванием к моменту включения вращающегося поля.

Даже при использовании приближения с начальной концентрацией  $\Phi \equiv \Phi_0(x, z)$  общее решение уравнения (8) очень сложно, так как оно содержит производные четвертой степени функции  $\Psi$  по координатам. Приведенный ниже анализ показывает, что наиболее интенсивное генерирование течения, следовательно, наиболее интересный, с точки зрения практического применения, случай соответствует сильному неравенству  $\sigma_x \gg \sigma_z$ , означающему, что размер облака в направлении продольной оси  $x$  намного больше размера вдоль поперечной оси  $z$ . Физически добиться этого можно, например, использованием, при инжектировании феррожидкости, стационарного магнитного поля соответствующей конфигурации, которое может быть выключено при включении вращающегося поля, чтобы не затруднять движение частиц. В этом случае сильные неравенства  $\frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^4}{\partial z^4} \gg \frac{\partial^4}{\partial x^4}$  должны выполняться для всех физических величин задачи. В рамках этого приближения уравнение (8) может быть переписано как

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} \Psi = \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Phi_0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\Psi = C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \int_0^z \int_0^\xi \Phi_0(x, \varsigma) d\varsigma d\xi$$

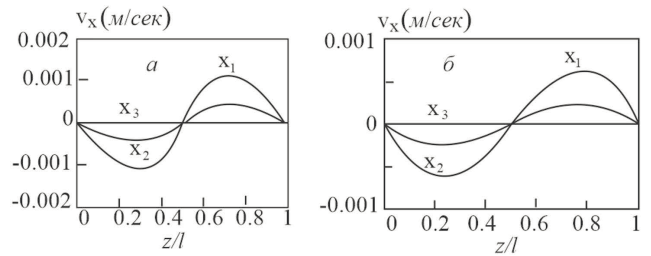
Здесь  $C_i$  — постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий (9):

$$C_0 = 0; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = 3 \frac{G}{l^2} - \frac{G'}{l}; \quad C_3 = \frac{G'}{l^2} - 2 \frac{G}{l^3},$$

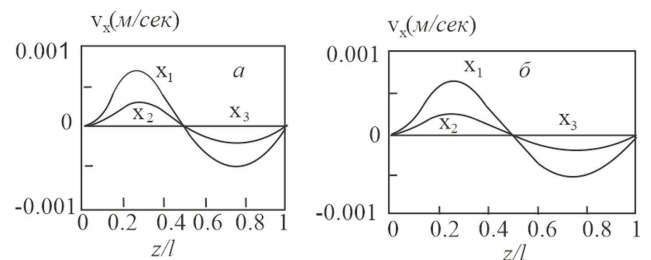
$$G = -\frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \int_0^l \int_0^\xi \Phi_0(x, \varsigma) d\varsigma d\xi,$$

$$G' = -\frac{1}{2} \mu_0 H M \frac{\omega}{D_r} \frac{L(\kappa)}{\kappa - L(\kappa)} \int_0^l \Phi_0(x, \varsigma) d\varsigma.$$

Отметим, что функция потока  $\Psi$ , и следовательно, компоненты скорости течения  $v$ , не зависят от времени. Это означает, что однородное вращающееся



**Рис. 3.** Продольная  $v_x$  компонента скорости генерируемого течения для суспензии сферических частиц ( $r = 1$ ). Параметры системы: намагниченность насыщения материала частиц  $M = 450$  кА/м (магнетит); ширина щели  $l = 2$  мм; напряженность поля  $H = 50$  кА/м; диаметр частиц  $d = 15$  нм; объемная концентрация в центре облака  $\Phi^0 = 0.05$ ; характерный размер облака в продольном направлении  $\sigma_x = 1$  см; в поперечном направлении  $\sigma_z = l/5$  (а) и  $\sigma_z = l/2$  (б). Центр капли находится на уровне  $Z = l/2$  (середина щели). Символы у кривых — продольные координаты, для которых определяется скорость течения  $x_1 = \sigma_x/4$ ;  $x_2 = \sigma_x$ ;  $x_3 = 2\sigma_x$ . Расчеты выполнены при комнатной температуре ( $kT \approx 4 \cdot 10^{-21}$  Дж); угловая частота вращения поля  $\omega = 10$  с $^{-1}$ , что соответствует экспериментам [2, 3]



**Рис. 4.** То же, что на рис. 3 при  $Z = \sigma_z/2$  ( $\sigma_z = l/2$ )

поле порождает стационарные потоки в рассматриваемом канале. Подчеркнем, что для генерирования этих потоков необходимо, чтобы концентрация частиц  $\Phi$  зависела от пространственных координат.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Некоторые результаты расчетов продольной компоненты скорости  $v_x$ , представляющей наибольший интерес с точки зрения транспорта лекарства или другой нейтральной примеси вдоль оси  $x$  канала, приведены на рис. 3–5. Отметим, что ширина канала  $l$  выбиралась так, чтобы она соответствовала характерному диаметру кровеносного сосуда, тромбирование которого может вызывать опасность для здоровья и жизни человека.

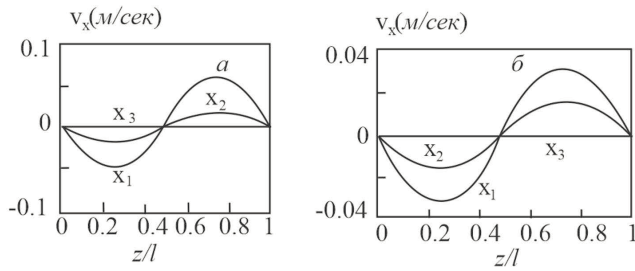


Рис. 5. То же, что на рис. 3 для вытянутых эллипсоидов с аспектным отношением  $r = 20$

Эти результаты показывают, что при вполне реалистических параметрах системы можно генерировать течения с продольной скоростью выше нескольких миллиметров в секунду. Отметим, что в работе [3] темп диффузионного транспорта тромболитиков в тромбированных сосудах был оценен как 0.8 мкм/с. Следовательно, конвективные течения с характерной скоростью порядка миллиметра в секунду, действительно, могут существенно интенсифицировать транспорт лекарства в таких сосудах.

Уменьшение поперечного размера капли  $\sigma_z$  по сравнению с продольным  $\sigma_x$ , при прочих равных условиях, приводит к заметному увеличению скорости генерируемого течения. Изменение центрального уровня поперечного размера  $Z$  капли слабо влияет на величину скорости течения. Эффект же формы частиц весьма силен — вытянутые эллипсоидальные частицы генерируют существенно более сильные течения, чем сферические. По мере удаления, вдоль оси  $x$ , от внедренного облака феррожидкости, скорость генерируемых течений быстро затухает. Это значит, что феррожидкость нужно инжектировать по возможности близко к тромбу.

Оценим правомерность применения приближения малого числа Рейнольдса  $Re$  для рассматриваемой ситуации. Пусть плотность и вязкость жидкости равны таковым для воды ( $\rho \sim 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и  $\eta \sim 10^{-3}$  Па·с), а ширина щели соответствует диаметру кровеносного сосуда, тромбирование которого опасно для здоровья человека ( $l \sim 10^{-3}$  м). Тогда  $Re \sim 1$  при  $v_x \sim 10^{-3}$  м/с. Это значит, что результаты, представленные на рис. 3 и 4 соответствуют верхней границе, когда линейные уравнения (1) могут быть использованы, результаты же, представленные на рис. 5 — вне области применимости этих уравнений. Однако результаты, представленные на рис. 5 качественно указывают на то, что при использовании длинных стержнеобразных частиц вместо сферических вращающееся поле может генериро-

вать течения с гораздо большей скоростью. Количественный же расчет требует численного исследования уравнения Навье—Стокса с учетом нелинейного инерционного члена.

Оценим характерное время периода, при котором можно пренебречь изменением концентрации  $\Phi$  за счет конвективного переноса частиц генерируемыми течениями. По порядку величины это время может быть оценено как  $\sigma_x/v_x$ . Если выбрать  $\sigma_x \sim 10^{-2}$  м и  $v_x \sim 10^{-3}$  м/с, то, по порядку величины, это время около 10 с, что вполне достаточно для экспериментального наблюдения описанной здесь начальной стадии генерации течений, соответствующей рис. 3 и 4. После этого существенным становится изменение концентрации  $\Phi$  за счет конвективных явлений. Учет этого обстоятельства делает задачу (1) существенно нелинейной, допускающей только численные решения. Мы планируем в ближайшее время провести исследование полной нелинейной задачи, включающей в себя уравнение Навье—Стокса с квадратичным по скорости членом и учет изменения концентрации  $\Phi$  со временем. Полученные здесь результаты свидетельствуют о перспективности таких исследований и будут служить основой для них.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследована модельная задача о генерации циркуляционных течений в канале с немагнитной жидкостью и инжектированной в нее каплей (облаком) нанодисперсной феррожидкости под действием однородного вращающегося магнитного поля. Расчеты показывают, что, при вполне реалистических параметрах системы, частоты и напряженности магнитного поля, в канале могут быть генерированы течения со скоростью с амплитудой порядка 1 мм/с. Эти течения могут существенно интенсифицировать транспорт нейтральной молекулярной примеси (лекарства) в несущей жидкости, что подтверждает идею, высказанную в работах [2, 3] о перспективности метода генерирования магнитоиндуцированных течений в тромбированных кровеносных сосудах для интенсификации в них транспорта тромболитиков. Наши результаты показывают, что использование феррожидкости с длинными стержнеобразными частицами, с точки зрения генерирования течений, может быть гораздо более эффективным, чем использование традиционных феррожидкостей со сферическими частицами.

Представленные аналитические результаты получены в предположении о выполнении довольно сильных упрощений (малые числа Рейнольдса; сохранение профиля концентрации внедренных магнитных наночастиц в неизменном начальном виде). Выход за рамки этих приближений требует численного исследования нелинейных уравнений феррогидродинамики и переноса примеси, что должно быть предметом отдельной работы.

Представленные результаты могут быть основой для таких исследований. Необходимо отметить, что в этой работе мы не учитывали влияние тромба на генерируемые течения. Такая задача, в силу существенного изменения граничных условий, требует отдельного исследования.

Следует также отметить, что, в принципе, движение магнитных частиц во вращающемся поле может вызывать нагрев содержащей их жидкости. Этот эффект (магнитная гипертермия) активно исследуется в литературе в связи с перспективами его применения для лечения онкологических заболеваний (см., например, [13, 14]). Из многочисленных теоретических и экспериментальных работ известно, что заметный нагрев жидкости с вязкостью воды происходит при частотах поля порядка десятков и сотен кГц. Поэтому при рассмотренных частотах порядка 10 Гц сколько-нибудь ощутимых термических эффектов не будет.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 21-52-12013) и Министерства науки и образования РФ (проект FEUZ-2023-0020).

## ЛИТЕРАТУРА

1. L. Thrums, *Biomedical applications of magnetic nanoparticles in colloidal magnetic fluids. Basics, Development and application of ferrofluids*, Springer, Berlin (2009).
2. F. M. Creighton, *Magnetic-based systems for treating occluded vessels*, U.S. Patent No. 8.308.628 (2012).
3. M. J. Clements, A mathematical model for magnetically-assisted delivery of thrombolytics in occluded blood vessels for ischemic stroke treatment: Doctoral dissertation, Texas University (2016).
4. J. L. F. Gabayno, D. W. Liu, M. Chang, and Y. H. Lin, *Nanoscale* **7**, 9 (2015).
5. Q. Li, X. Liu, M. Chang, and Z. Lu, *Materials* **11**, 11 (2018).
6. A. Musikhin, A. Zubarev, M. Raboisson-Michel, G. Verger-Dubois, and P. Kuzhir, *Phil. Trans. R. Soc. A* **378**, (2020).
7. В. М. Зайцев, М. И. Шлиомис, *Журнал прикладной механики и технической физики*, 5 (1969).
8. R. Rosensweig, *Ferrohydrodynamics*, Cambridge, New York (1985).
9. В. Покровский, *Статистическая механика разбавленных суспензий*, Наука, Москва (1978).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, Москва (1982).
11. М. А. Марценюк, Ю. Л. Райхер, М. И. Шлиомис, *ЖЭТФ* **65**, 1 (1973).
12. E. Blums, A. Cebers, M. Maiorov, *Magnetic Fluids*, Walter de Gruyter, Berlin (1997).
13. L. Trahms, *Biomedical applications of magnetic nanoparticle. Colloidal magnetic fluids. Basics, development and applications of ferrofluids*, Springer, Berlin (2009).
14. L. Chang, X. L. Liu, D. D. Fan, Y. Q. Miao, H. Zhang, H. P. Ma, Q. Y. Liu, P. Ma, W. M. Xue, Y. E. Luo, and H. M. Fan, *Int. J. Nanomedicine* **11**, (2016).