

# «ИДЕАЛЬНОСТЬ» «НЕИДЕАЛЬНОЙ» ПЛАЗМЫ

**А. Л. Хомкин**, **А. С. Шумихин**\*

*Объединённый институт высоких температур Российской академии наук  
125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 17 сентября 2022 г.,  
после переработки 12 декабря 2022 г.  
Принята к публикации 26 декабря 2022 г.

На основе уравнения состояния «физической» модели плазмы, в которой рассматривается взаимодействующая смесь электронов и ядер (протонов), выведены путем тождественных преобразований две химические модели плазмы, описывающие смесь свободных электронов, ионов и атомов. Полученные химические модели удовлетворяют правилу «книжной закладки» Онзагера — уравнение состояния не зависит от положения закладки — границы, разделяющей свободные и связанные состояния. Выполнено исследование влияния возбужденных состояний атома на уравнение состояния и ионизационного равновесия. Сделан вывод о завышенном вкладе дебаевского притяжения в традиционных «химических» моделях. Полученные соотношения для снижения потенциала ионизации и уравнения состояния существенно отличаются от общепринятых выражений и качественно объясняют наблюдаемый в экспериментах эффект «идеальности» неидеальной плазмы.

DOI: 10.31857/S0044451023040181  
EDN: MZDYNW

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию уравнения состояния плотной плазмы в условиях, когда заметную роль играют межчастичные, особенно кулоновское, взаимодействия, в последнее время было уделено большое внимание [1]. Были исследованы плазма инертных газов и плазма щелочных металлов, в основном цезия. Уравнение состояния плазмы инертных газов исследовалось ударно-волновыми методами [2], уравнение состояния плазмы цезия — на подогреваемой ударной трубе [3, 4], на установке адиабатического сжатия [5], а также с использованием электровзрыва цезиевой проволоочки в плотном инертном газе [6, 7].

Вместо ожидаемого плазменного фазового перехода [8] или каких-либо следов его существования был обнаружен неожиданный эффект — «идеальность» поведения «неидеальной» плазмы. Этот эффект был замечен и в плазме инертных газов [2], но особенно в плазме паров цезия [3–7]. При обработке результатов экспериментов [3–7] отмечалось, что

расчеты уравнения состояния по «химической» модели идеальной плазмы весьма удовлетворительно описывают данные эксперимента в условиях развитой кулоновской неидеальности по сравнению с расчетами в рамках традиционных «химических» моделей, в которых использовалась дебаевская модель для энергии заряда, помещенного в плазму. По результатам работы [6] была даже высказана рекомендация использовать «химическую» модель идеальной смеси для практических расчетов уравнения состояния плотных паров цезия, включая область двукратной ионизации.

В то время мало кто решался посягнуть на авторитет Дебая и его модель, использованную к тому же для предсказания плазменного фазового перехода. В такой ситуации, применительно к плазме инертных газов, были предложены подходы, которые не затрагивали результатов дебаевской модели, но вносили дополнительное отталкивание в расчеты и тем самым компенсировали влияние поправки Дебая, носящей характер притяжения. Среди таких моделей отметим модель «ограниченного атома», предложенную в работе [9]. В этой модели для нахождения спектра связанных состояний атома вместо традиционного граничного условия — обращения волновой функции в нуль на бесконечности, предлагалось использовать иное — обраще-

\* E-mail: shum\_ac@mail.ru

ние волновой функции в нуль на некотором конечном расстоянии. Такое граничное условие, по мнению авторов работы [9], качественно моделировало влияние среды на атом. Действительно, взаимодействие электронов с атомами инертных газов носит характер отталкивания, поэтому «эффект твердой стенки» в принципе возможен, но все зависит от того, как эта стенка возникает и где она находится. А вот применительно к парам щелочных металлов, где взаимодействие электронов с атомами носит характер притяжения и приводит к образованию отрицательных ионов, модель «ограниченного атома» совершенно не применима, хотя эффект «идеальности» там был зафиксирован [3–7] даже с большей определенностью, чем в плазме инертных газов. В итоге модель «ограниченного атома» в большинстве «химических» моделей не закрепились, а обнаруженный эффект «идеальности» в плазме паров цезия, да и в плазме инертных газов так и остался без объяснения. Неплохое согласие давала дебаевская модель в большом каноническом ансамбле. Ниже мы ее рассмотрим более подробно.

Главный эффект «неидеальности» в плазме возникает при внесении в нее пробного заряда, который поляризует ее, отталкивая одноименные заряды и притягивая разноименные. В результате возникает эффект притяжения пробного заряда к плазме. Энергию, которую приобретает заряд, помещенный в классическую плазму за счет ее поляризации, будем называть дебаевской. Впервые эта энергия была рассчитана Дебаем и Хюккелем [10] применительно к растворам электролитов. Вклад дебаевской энергии в уравнение состояния плазмы и снижение потенциала ионизации атома традиционно считались главными проявлениями взаимодействия между зарядами; иногда говорят об эффектах неидеальности в плазме [11].

Параллельно с поляризацией кулоновское взаимодействие ведет к образованию связанных состояний — атомов. Это чисто квантовый эффект, по крайней мере для низколежащих уровней. Для изолированного атома число связанных состояний бесконечно велико, и формально вычисленная статистическая сумма атома расходится. Необходимо обрезать статистическую сумму на том или ином уровне, что приводит к зависимости результатов расчета от положения границы обрезания. Наличие такой зависимости противоречит правилу «книжной закладки» Онзагера, сформулированному им устно на конференции [12] (в дальнейшем правило Онзагера): как итоговый результат бухгалтерской книги не зависит от положения закладки, так и рас-

чет уравнения состояния плазмы не должен зависеть от места расположения границы, разделяющей связанные и свободные состояния. Правилу Онзагера полностью соответствуют результаты расчета уравнения состояния атомарной плазмы в большом каноническом ансамбле для ее «физической» модели — модели, в которой рассматривается взаимодействующая смесь электронов и ядер (протонов). В работах [13–16] строго получены первые члены разложения большого термодинамического потенциала (давления) по степеням активности. Учтены коллективные эффекты поляризации и парные эффекты во взаимодействии зарядов обоих знаков, в том числе приводящие к образованию атомов. Понятие «закладки» в физической модели просто отсутствует, и в этом смысле ее результаты полностью удовлетворяют правилу Онзагера. Именно такую реализацию правила Онзагера мы и используем в данной работе. К сожалению, область применимости «физической» модели ограничена только атомарной плазмой и не допускает строгого учета молекулярных ионов, молекул и так далее.

В практических расчетах доминируют «химические» модели плазмы, в которых для атомарной плазмы рассматривается смесь свободных электронов, ионов и атомов (возможно рассмотрение и более сложной номенклатуры частиц). Для конкретных расчетов, учитывающих кулоновское взаимодействие, необходимо задать две величины: статистическую сумму  $\Sigma_a$  атома и поправку к свободной энергии Гельмгольца  $\Delta f$  идеальной смеси, описывающую эффект взаимодействия между свободными электронами и ионами. Выбором этих величин и отличаются «химические» модели. В работе [17] рассмотрены более десятка вариантов «химических» моделей, используемых для расчета термодинамических функций и состава плазмы паров цезия. Вопрос о соблюдении правила Онзагера в то время вообще не ставился. И статистическая сумма, и поправка на взаимодействие свободных зарядов выбирались достаточно произвольно, исходя из вариантов, предложенных в литературе и пристрастий авторов. Естественно, результаты расчетов различались довольно существенно, а ведь ответ, в соответствии с правилом Онзагера, должен быть единственным.

В серии работ Эбелинга с сотрудниками [18, 19] впервые проанализированы некоторые «химические» модели плазмы и электролитов с использованием правила Онзагера, который рассматривается в виде принципа «стационарности». Решения для варьируемых параметров выбираются в области минимума свободной энергии Гельмгольца.

В настоящей работе сделана попытка объяснить эффект «идеальности» в «неидеальной» плазме с использованием результатов разложения уравнения состояния по степеням активностей в большом каноническом ансамбле — «физической» модели плазмы [13–16]. «Химические» модели плазмы строго выводятся из этих разложений и, следовательно, удовлетворяют правилу Онзагера, т.е. приводят к уравнению состояния, не зависящему от положения «закладки». Задавая то или иное выражение для статистической суммы атома (положение «закладки»), мы получаем «химические» модели, которые, хотя и различаются поправками к давлению, снижению потенциала ионизации, приводят к единому уравнению состояния (например, зависимости давления от плотности ядер), от положения «закладки» не зависящего. Статистическая сумма атома от положения «закладки» зависит. Передвигаясь по шкале энергий, она («закладка») меняет число связанных и свободных частиц в плазме, не меняя суммарного количества ядер. Меняются статистическая сумма атома (незначительно) и идеальный вклад в давление (существенно): если электрон-ионная пара связанная, то ее вклад в давление соответствует вкладу одной частицы, а если это пара не связанных частиц, то этот вклад соответствует вкладу двух частиц. Доля таких частиц невелика, но разность вклада в давление — это температура, умноженная на их концентрацию. Показано, что эти новые поправки в давление оказываются порядка дебаевской поправки, но с обратным знаком. На возможность такого эффекта было обращено внимание в работах [20, 21]. При этом зависимость давления от полной плотности не меняется, меняется соответствующая модель смеси — «химическая» модель. Если коротко, то цель работы состоит в том, чтобы продемонстрировать, что максимально «идеальная химическая» модель, удовлетворяющая правилу Онзагера, может быть выведена из точных разложений «физической» модели неидеальной плазмы.

## 2. ТРАДИЦИОННАЯ «ХИМИЧЕСКАЯ» МОДЕЛЬ АТОМАРНОЙ ПЛАЗМЫ. КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ

Рассмотрим в каноническом ансамбле реагирующую смесь, состоящую из  $N_e$  электронов,  $N_i$  ионов и  $N_a$  атомов (в дальнейшем атомарная плазма), находящуюся в объеме  $V$  при температуре  $k_B T \equiv 1/\beta$ . Свободная энергия Гельмгольца  $F$  в предположении, что газ атомов является идеальным, а свобод-

ные заряды слабо взаимодействуют друг с другом, имеет следующий вид [22]:

$$\beta F = -N_e \ln\left(\frac{2eV}{N_e \lambda_e^3}\right) - N_i \ln\left(\frac{eV}{N_i \lambda_i^3}\right) - N_a \ln\left(\frac{eV \Sigma_a}{N_a \lambda_a^3}\right) - (N_e + N_i) \Delta f, \quad (1)$$

где  $\lambda_l = (2\pi\hbar^2\beta/m_l)^{1/2}$  и  $m_l$  — тепловая длина волны и масса частицы сорта  $l = e, i, a$ ;  $\Sigma_a$  — внутренняя статистическая сумма атома;  $e$  — основание натурального логарифма;  $\Delta f$  — поправка к свободной энергии идеальноегазовой смеси в температурных единицах на одну частицу, обусловленная взаимодействием свободных электронов и ионов между собой. Соотношение (1) описывает систему зарядов в достаточно широкой области давлений и температур от идеального газа атомов до полностью ионизованной слабонеидеальной плазмы.

Для поправки  $\Delta f$ , учитывающей взаимодействие свободных зарядов, воспользуемся результатом дебаевской теории для энергии заряда в плазме:

$$E_D = \frac{q^2}{2R_D}, \quad (2)$$

где  $R_D = 1/\sqrt{4\pi\beta q^2(n_e + n_i)}$  — дебаевский радиус, через который определяется плазменный параметр

$$\Gamma = \frac{\beta q^2}{R_D}. \quad (3)$$

Используя соотношение, связывающее  $\Delta f$  и  $E_D$ , получим

$$\Delta f = \int_T^\infty \frac{\Gamma/2}{T} dT = \frac{\Gamma}{3}. \quad (4)$$

В результате из определения  $P = -\partial F/\partial V$  имеем

$$\beta P = (n_e + n_i) \left(1 - \frac{\Gamma}{6}\right) + n_a. \quad (5)$$

Концентрации электронов  $n_e$ , ионов  $n_i$  и атомов  $n_a$  связаны между собой формулой Саха, учитывающей снижение потенциала ионизации  $\beta\Delta I = -\Gamma$ :

$$n_a = n_i n_e \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_a e^{-\Gamma}. \quad (6)$$

Соотношения (5), (6) соответствуют широко распространенной в литературе и учебниках [11] простейшей модели неидеальной плазмы. Мы назовем ее традиционной химической моделью (ТХМ).

Проблему расходимости статистической суммы атома мы обсудим ниже.

### 3. ОБРАЗОВАНИЕ АТОМОВ В БОЛЬШОМ КАНОНИЧЕСКОМ АНСАМБЛЕ. «ФИЗИЧЕСКАЯ» МОДЕЛЬ ПЛАЗМЫ

В большом каноническом ансамбле рассматривается система электронов и ядер (протонов), для которых заданы химические потенциалы  $\mu_e, \mu_i$  или активности  $z_e = \exp(\beta\mu_e)/\lambda_e^3, z_i = \exp(\beta\mu_i)/\lambda_i^3$ . Иногда говорят о «физической» модели плазмы, в которой предположение о наличии атомов не делается. Атомы и поправки на взаимодействие в непрерывном спектре возникают из квантовых групповых разложений для большого термодинамического потенциала (давления) в большом каноническом ансамбле. Разложение идет по степеням активностей  $z_{e,i}$  — эффективных плотностей, которые затем выводятся из уравнений материального баланса.

Усилиями многих авторов [13–16] были получены первые члены разложения по степеням активностей электронов  $z_e$  и ионов  $z_i$  для давления  $P$  и полной концентрации частиц  $n$ . Для классической в непрерывном спектре плазмы с точностью до членов  $z^2$  для  $P$  и  $n$  имеем

$$\beta P = (z_e + z_i) \left(1 + \frac{\alpha}{3}\right) + z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL}, \quad (7)$$

$$n = z_e \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) + z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL}, \quad (8)$$

где  $\alpha = \beta q^2 \sqrt{4\pi\beta q^2(z_e + z_i)}$  — плазменный параметр, выраженный через активности  $z_{e,i}$  (это важно), а

$$\Sigma_{PL} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \left( \exp\left(\frac{\beta Ry}{k^2}\right) - 1 - \frac{\beta Ry}{k^2} \right), \quad (9)$$

где  $k$  — главное квантовое число. Возникающая в разложениях сходящаяся величина  $\Sigma_{PL}$  хорошо известна и носит название (не совсем корректное) статистической суммы Планка–Ларкина (PL). Она отличается от действительной статистической суммы атома наличием двух последних слагаемых в скобках. Эти слагаемые нарушают требование о больцмановском характере заселенностей связанных уровней в атомах. Такая структура  $\Sigma_{PL}$  возникла как результат взаимной компенсации вкладов от электрон-электронных, электрон-ионных и ион-ионных взаимодействий во второй групповой коэффициент. Как будет показано ниже, наличие именно этих двух слагаемых в конечных результатах (7), (8) и приводит к необычным, даже парадоксальным результатам для атомарной плазмы.

Соотношения (7), (8) носят название «физическая» модель плазмы и описывают состояния плаз-

мы от полностью ионизованной неидеальной плазмы до атомарного газа, т.е. фактически те же состояния, что и «химическая» модель (1). В «физической» модели при расчете уравнения состояния не требуется решать вопросы об ограничении статистической суммы и о снижении потенциала ионизации, поскольку не требуется решать задачу о расчете состава. Это обстоятельство и позволяет утверждать, что «физическая» модель (7), (8) полностью удовлетворяет правилу Онзагера.

### 4. «ХИМИЧЕСКАЯ» МОДЕЛЬ ЭБЕЛИНГА – ЛИКАЛЬТЕРА (EL)

Выполним простейший переход к «химической» модели плазмы, исходя из соотношений (7), (8) и действуя аналогично работам [23–25].

Начнем с определения концентрации связанных состояний атомов  $n_a$ :

$$n_a = z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL}. \quad (10)$$

Из выражения (8) находим концентрацию свободных зарядов  $n_e$  и  $n_i$ :

$$n_{e,i} = n - n_a = z_{e,i} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (11)$$

Подставляя  $z_{e,i} = n_{e,i}/(1 + \alpha/2)$  в (7), (8), получим

$$\begin{aligned} \beta P &= (n_e + n_i) \frac{1 + \alpha/3}{1 + \alpha/2} + n_a = \\ &= (n_e + n_i)(1 - \Delta p_{PL}) + n_a, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} n_a &= n_e n_i \frac{\lambda_e^3}{2(1 + \alpha/2)^2} \Sigma_{PL} = \\ &= n_e n_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL} \exp(-\beta \Delta I_{PL}), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Delta p_{PL} = \frac{\alpha/6}{1 + \alpha/2}, \quad (14)$$

$$\beta \Delta I_{PL} = 2 \ln(1 + \alpha/2). \quad (15)$$

Полученная нами связь давления с полной концентрацией (уравнение состояния) является параметрическим. Чтобы завершить переход к «химической» модели, необходимо дополнить уравнения (12)–(15) соотношением, связывающим концентрации свободных частиц  $n_e, n_i$  с активностями  $z_e, z_i$ . Эту связь можно определить из уравнения (11). Сложим эти уравнения для электронных и ионных концентраций и умножим полученную сумму на ве-

личину  $4\pi(\beta q^2)^3$ . В результате получим уравнение, предложенное Ликальтером [26]:

$$\Gamma^2 = \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (16)$$

Будучи дополнена уравнениями электронейтральности  $n_e = n_i$  и баланса  $n = n_e + n_a$ , «химическая» модель EL, определяемая соотношениями (12)–(16), полностью соответствует результатам «физической» модели (7), (8) и тем самым удовлетворяет правилу Онзагера.

### 5. «ХИМИЧЕСКАЯ» МОДЕЛЬ ВОРОБЬЕВА – ХОМКИНА – ШУМИХИНА (VKS). РОЛЬ ВОЗБУЖДЕННЫХ СОСТОЯНИЙ АТОМА В ПЛАЗМЕ

В литературе [1] обсуждаются десятки вариантов расчета статистической суммы атома, связанных с различными моделями реализации последнего уровня. Отметим характерные: последний уровень в дебаевском потенциале; штарковское слияние уровней; оценки предельных размеров орбиты связанного электрона (от длины Ландау до радиуса ячейки Вигнера – Зейтца) и т. д. Мы не будем обсуждать достоинства и недостатки этих моделей, а ограничимся в своих выкладках рассмотрением двух из них: статистической суммой Планка – Ларкина, в которой эффективно учитывается минимальное количество связанных состояний, и статистической суммой в приближении ближайшего соседа (nearest neighbor approximation, NNA), в которой их число предельно возможно:

$$\Sigma_a = \Sigma_{NNA} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \exp\left(\frac{\beta Ry}{k^2}\right) \omega_k(z_e, z_i). \quad (17)$$

В литературе, особенно астрофизической, это выражение для  $\Sigma_{NNA}$  весьма популярно [27]. Предполагается, что связанные состояния атома реализуются с вероятностью  $\omega_k(z_e, z_i)$ , т. е. до тех пор, пока размер их орбиты не превосходит размера ячейки Вигнера – Зейтца для зарядов  $R_i = (3/4\pi(z_e + z_i))^{1/3}$ .

Формально нет никаких запретов повторить выкладки (12)–(16), но при этом использовать иное выражение для определения концентрации атомов:

$$n_a = z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA}. \quad (18)$$

Заметим, что при таком подходе можно использовать и иные приближения для статистической суммы атома, меняя выражение для  $\omega_k(z_e, z_i)$ .

Из (8) однозначно следует выражение для  $n_e = n - n_a$ , так что соотношение (8) выполняется:

$$n_e = n_i = z_e \left(1 + \frac{\alpha}{2} + z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{PL} - z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA}\right). \quad (19)$$

Необходимо вычислить разность двух величин: статистических сумм в приближениях PL и NNA.

Способ расчета этой разности предложен в работе [28]. Рассмотрим статистическую сумму атома в приближении ближайшего соседа:

$$\Sigma_{NNA} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \exp\left(\frac{\beta Ry}{k^2}\right) \omega_k, \quad (20)$$

где

$$\omega_k = \exp\left(-\frac{4\pi}{3} r_k^3 (z_e + z_i)\right). \quad (21)$$

В (21)  $r_k = \delta a_0 k^2$  – радиус орбиты связанного электрона с главным квантовым числом  $k$ . Величина  $\delta = 1, 2$  соответствует квантовому и классическому определению размера орбиты. Нам представляется разумным использовать для возбужденных состояний классическое определение радиуса орбиты (по Ликальтеру [29]). Экспонента в (21) описывает пуассоновскую вероятность отсутствия свободных зарядов с концентрациями  $z_e, z_i$  внутри сферы радиуса  $r_k$ . Мы не акцентируем внимание на некоторых различиях концентраций свободных зарядов и активностей, поскольку, как будет видно из дальнейшего, для слабонеидеальной плазмы они практически совпадают. Выполним тождественное преобразование:

$$\Sigma_{NNA} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k^2 \left[ \left( \exp\left(\frac{\beta Ry}{k^2}\right) - 1 - \frac{\beta Ry}{k^2} \right) \omega_k + \left( 1 + \frac{\beta Ry}{k^2} \right) \omega_k \right]. \quad (22)$$

В первом слагаемом в квадратных скобках действуют два обрезających фактора. В круглых скобках первый соответствует радиусу орбиты  $r \sim \beta q^2$  – длине Ландау, а второй определяется величиной  $\omega_k$  и соответствует радиусу орбиты  $r \sim (z_e + z_i)^{-1/3}$ . Поскольку длина Ландау в слабонеидеальной плазме всегда меньше среднего межчастичного расстояния, то первый фактор ( $r \sim \beta q^2$ ) «сработает» раньше, и мы можем положить  $\omega_k = 1$ . Таким образом, первое слагаемое в (22) превращается в статистическую сумму PL (9). Во втором слагаемом в (22) мы можем выполнить суммирование непосредственно, а можем перейти от суммирования к интегрированию по  $k$ , поскольку главный вклад в эту сумму дают вы-



соковозбужденные уровни с большими квантовыми числами  $k$  ( $dk \sim 1 \ll k$ ):

$$\Sigma_{NNA} = \Sigma_{PL} + \int_0^\infty dk 2k^2 \left(1 + \frac{\beta Ry}{k^2}\right) \omega_k = \Sigma_{PL} + \Delta\Sigma_a. \quad (23)$$

Второе слагаемое в (23) рассчитывается аналитически [22, 28]:

$$\Delta\Sigma_a = \frac{1}{\sqrt{3\delta^3}} \left(\frac{1}{4\pi(z_e + z_i)a_0^3}\right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\beta Ry}{3\sqrt{\delta}} \left(\frac{3}{4\pi(z_e + z_i)a_0^3}\right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right), \quad (24)$$

где  $\Gamma(x)$  — гамма-функция.

### 6. УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ И ИОНИЗАЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ В МОДЕЛИ VKS. ФОРМУЛА САХА

Возвращаясь к (19), из (7), (8) получим соотношения для концентрации свободных электронов и атомов, а также для уравнения состояния:

$$n_e = z_e \left(1 + \frac{\alpha}{2} - z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta\Sigma_a\right), \quad (25)$$

$$n_a = z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA}, \quad (26)$$

$$\beta P = (z_e + z_i) \left(1 + \frac{\alpha}{3} - \frac{z_e z_i}{z_e + z_i} \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta\Sigma_a\right) + z_e z_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA}. \quad (27)$$

Заметим, что формулы (25)–(27) можно использовать и для других вариантов расчета статистической суммы. При этом точные асимптотические соотношения (7), (8) выполняются, следовательно, выполняется и правило Онзагера. Вводя обозначение  $K(\alpha) = z_i(\lambda_e^3/2)\Delta\Sigma_a$  и учитывая, что  $z_e = z_i$ , получим

$$n_a = n_e n_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Sigma_{NNA} e^{-\Delta I}, \quad (28)$$

где  $\Delta I = 2 \ln(1 + \alpha/2 - K(\alpha))$ ,

$$\beta P = (n_e + n_i)(1 - \Delta p) + n_a, \quad (29)$$

где

$$\Delta p = \frac{\alpha/6 - K(\alpha)/2}{1 + \alpha/2 - K(\alpha)}. \quad (30)$$

Величина  $K(\alpha)$  вычислена в работе [22] и равна

$$K(\alpha) = \alpha \frac{\pi\sqrt{6}}{24\sqrt{\delta^3}} + \alpha^{5/3} \frac{\sqrt{2\pi}3^{1/6}}{48\sqrt{\delta}} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right). \quad (31)$$

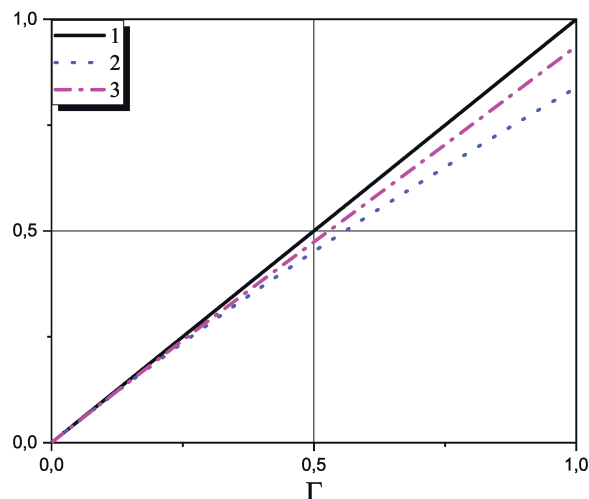


Рис. 1. Решение уравнения Ликальтера  $\alpha(\Gamma)$  для  $\delta = 2$ : 1 —  $\Gamma$ ; 2 — EL-модель, уравнение (16); 3 — VKS-модель, уравнение (32)

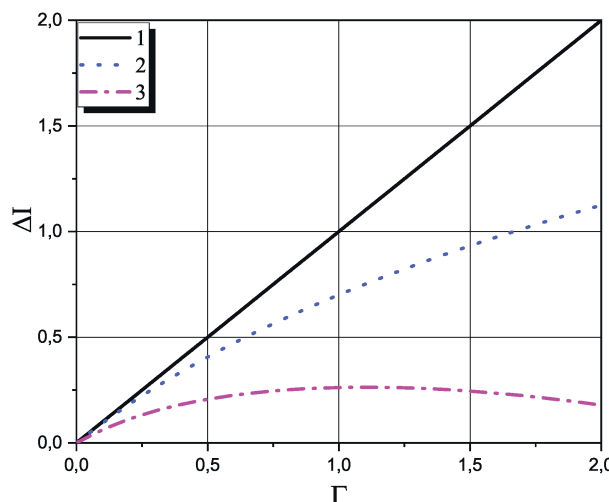


Рис. 2. Снижение потенциала ионизации  $\beta\Delta I$  в зависимости от  $\Gamma$  для  $\delta = 2$ : 1 — модель ТХМ, уравнение (6); 2 — модель EL, уравнение (15); 3 — модель VKS, уравнение (28).

Уравнение Ликальтера (16) немного модифицируется:

$$\Gamma^2 = \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} - K(\alpha)\right). \quad (32)$$

«Химическая» модель VKS определяется соотношениями (28)–(32).

На рис. 1 сравниваются решения уравнения Ликальтера для EL- и VKS-моделей атомарной плазмы с величиной  $\Gamma$ . Близость решений  $\alpha(\Gamma)$  к величине  $\Gamma$  означает близость концентраций свободных зарядов и активностей. Сразу заметим, что максимальную близость демонстрирует модель VKS.

На рис. 2, 3 показаны снижение потенциала ионизации и поправки к давлению как функции плазмен-

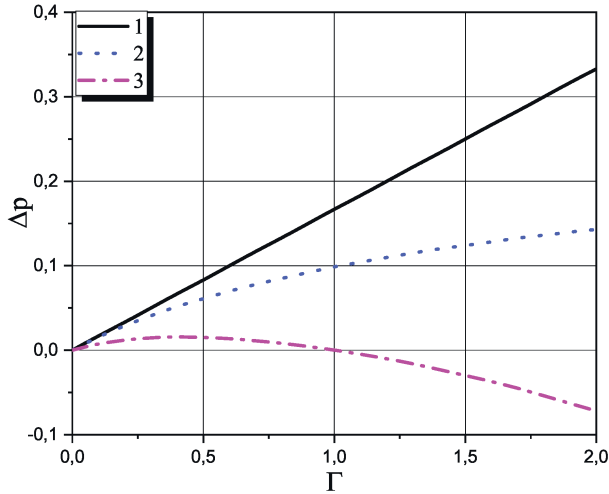


Рис. 3. Безразмерная поправка к давлению  $\Delta p$  в зависимости от  $\Gamma$  для  $\delta = 2$ : 1 — модель ТХМ, уравнение (6); 2 — модель EL, уравнение (14); 3 — модель VKS, уравнение (30)

ного параметра  $\Gamma$ .

В пределе  $\alpha \rightarrow 0$  и для  $\delta = 2$  получаем

$$\alpha \rightarrow \Gamma, \tag{33}$$

$$K(\alpha) \rightarrow \alpha \frac{\pi\sqrt{6}}{24 \cdot 2\sqrt{2}} \rightarrow \Gamma \frac{\pi\sqrt{6}}{48\sqrt{2}}, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} \Delta I \rightarrow \alpha - 2K(\alpha) &= \Gamma \left( 1 - \frac{\pi\sqrt{6}}{12 \cdot 2\sqrt{2}} \right) = \\ &= 0.773 (0.359)\Gamma, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{\alpha}{6} - \frac{K(\alpha)}{2} = \frac{\Gamma}{6} \left( 1 - \frac{\pi\sqrt{6}}{8 \cdot 2\sqrt{2}} \right) = \\ &= 0.66 (0.038) \frac{\Gamma}{6}. \end{aligned} \tag{36}$$

Величина  $K(\alpha)$  описывает влияние возбужденных атомов. Сравнивая выражения (35), (36) с (5), (6), видим, что возбужденные атомы играют существенную роль при переходе от «физической» к «химической» модели, меняя численный коэффициент при параметре неидеальности. В скобках в (35) и (36) указаны величины поправок для  $\delta = 1$ .

«Химическая» модель VKS, определяемая соотношениями (28)–(32), полностью соответствует результатам «физической» модели (7), (8) и тем самым удовлетворяет правилу Онзагера, как и «химическая» модель EL (12)–(16). Уравнения состояния для моделей EL и VKS будут совпадать, но составы будут разные.

### 7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Формулы (35), (36) описывают необычный результат «химической» модели VKS: дебаевское снижение потенциала ионизации  $\Delta I_D = \Gamma$  и поправка к давлению  $\Delta p_D = \Gamma/6$  существенно уменьшаются.

Какую же «химическую» модель выбрать. Если речь идет о расчете уравнения состояния, то модели EL и VKS идентичны и дают одинаковые результаты. При обработке экспериментов использовалась традиционная «химическая» модель (ТХМ) идеальной плазмы ( $\delta f = 0$ ) Эксперименты, особенно для плазмы паров цезия, показали явное преимущество «химической» модели идеальной плазмы. Проведенный нами анализ показывает, что максимальную «степень идеальности» демонстрирует модель VKS, что позволяет говорить о согласии с данными экспериментов [2–7] и о найденном объяснении эффекта «идеальности» неидеальной плазмы.

Рассмотрим слабонеидеальную плазму, «почти» полностью ионизованную ( $\beta R_y < 1$ ), в которой присутствуют только возбужденные атомы  $n_a^*$ , их доля невелика и описывается вторым слагаемым статистической суммы (23):

$$n_a^* = n_e n_i \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta \Sigma_a. \tag{37}$$

Считая  $n_a^* \ll n$ , ищем решение (37) в виде

$$n_e = n(1 - \theta), \tag{38}$$

$$n_a^* = n - n_e = n\theta, \tag{39}$$

$$\theta = (1 - \theta)^2 n \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta \Sigma_a. \tag{40}$$

Для  $\theta \ll 1$  получаем

$$\begin{aligned} \theta &= n \frac{\lambda_e^3}{2} \Delta \Sigma_a = \Gamma \frac{\pi\sqrt{6}}{24\sqrt{\delta^3}} + \\ &+ \Gamma^{5/3} \frac{\sqrt{2\pi} 3^{1/6}}{48\sqrt{\delta}} \Gamma \left( \frac{1}{6} \right) = K(\Gamma). \end{aligned} \tag{41}$$

Запишем выражение для давления смеси свободных электронов, ионов и возбужденных атомов, используя соотношение (30) для поправки к давлению  $\beta \Delta p = \Gamma/6 - K(\Gamma)/2$ .

Учитывая, что  $\alpha \rightarrow \Gamma$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , получим

$$\beta P = (n_e + n_i) \left( 1 - \frac{\Gamma}{6} + \frac{K(\Gamma)}{2} \right) + n_a. \tag{42}$$

Подставляя (38), (39) в (42), в линейном по  $\Gamma$  приближении ( $\theta \sim \Gamma$ ) получим

$$\beta P = 2n(1 - \theta) \left( 1 - \frac{\Gamma}{6} + \frac{\theta}{2} \right) + n\theta \cong 2n \left( 1 - \frac{\Gamma}{6} \right). \tag{43}$$

Оказывается, что уравнение состояния полностью ионизованной однокомпонентной неидеальной плазмы полностью соответствует результатам модели VKS для смеси свободных зарядов и возбужденных атомов. Так что, формально, в полностью ионизованной неидеальной плазме присутствует вклад возбужденных атомов и, следовательно, полностью ионизованной ее считать не вполне корректно.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе уравнения состояния «физической» модели плазмы выполнено исследование влияния возбужденных состояний атома на уравнение состояния и ионизационного равновесия. Сделан вывод о завышенном вкладе дебаевского притяжения в традиционной «химической» модели. Для модели VKS полученные соотношения для снижения потенциала ионизации и уравнения состояния существенно отличаются от общепринятых выражений. Полученные результаты качественно объясняют наблюдаемый в экспериментах [2–7] эффект «идеальности» без привлечения дополнительных эффектов отталкивания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Фортов, А. Г. Храпак, И. Т. Якубов, *Физика неидеальной плазмы*, Физматлит, Москва (2010).
2. В. Е. Фортов, А. А. Леонтьев, А. Н. Дремин, В. К. Грязнов, *ЖЭТФ* **71**, 225 (1976).
3. В. А. Сеченов, Э. Е. Сон, О. Е. Щекотов, *ТВТ* **15**, 411 (1977).
4. А. В. Бушман, Б. А. Ломакин, А. В. Сеченов, В. Е. Фортов, О. Е. Щекотов, И. И. Шарипджанов, *ЖЭТФ* **69**, 1624 (1975).
5. А. Т. Кунавин, А. В. Кириллин, Ю. С. Коршунов, *ТВТ* **12**, 1302 (1974).
6. И. Я. Дихтер, В. А. Зейгарник, *ТВТ* **15**, 471 (1977).
7. И. Я. Дихтер, В. А. Зейгарник, *ТВТ* **15**, 196 (1977).
8. Г. Э. Норман, А. Н. Старостин, *ТВТ* **8**, 413 (1970).
9. В. К. Грязнов, М. В. Жерноклетов, В. Н. Зубарев, И. Л. Иосилевский, В. Е. Фортов, *ЖЭТФ* **78**, 573 (1980).
10. P. Debye and E. Hückel, *Phys. Z.* **24**, 185 (1923).
11. Л. П. Кудрин, *Статистическая физика плазмы*, Атомиздат, Москва (1974).
12. L. Onsager, in *Proc. of the Conference on Electrochemistry*, Montpellier, France (1998).
13. А. А. Веденов, А. И. Ларкин, *ЖЭТФ* **36**, 1139 (1959).
14. W. Ebeling, W. D. Kraeft, and D. Kremp, *Theory of Bound States and Ionization Equilibrium in Plasmas and Solids*, Akademie-Verlag, Berlin (1976).
15. Ю. Г. Красников, *ЖЭТФ* **33**, 516 (1977).
16. А. Н. Старостин, В. К. Рерих, *ЖЭТФ* **127**, 186 (2005).
17. В. Е. Фортов, Б. Н. Ломакин, Ю. Г. Красников, *ТВТ* **9**, 869 (1971).
18. W. Ebeling and S. Hilbert, *Eur. Phys. J. D* **20**, 93 (2002).
19. W. Ebeling, S. Hilbert, and H. Krienke, *J. Mol. Liq.* **96–97**, 409 (2002).
20. O. Theimer and T. Wright, *Phys. Rev.* **180**, 308 (1969).
21. В. С. Воробьев, А. Л. Хомкин, *Физика плазмы* **3**, 885 (1977).
22. А. Л. Хомкин, И. А. Муленко, *ТВТ* **41**, 327 (2003).
23. W. Ebeling and G. P. Bartsch, *Beitr. Plasmaphys.* **5**, 393 (1971).
24. W. Ebeling and R. Sändig, *Ann. der Phys.* **28**, 269 (1973).
25. W. Ebeling, H. Reinholz, and G. Röpke, *Contrib. Plasma Phys.* **61**, e202100085 (2021).
26. А. А. Ликальтер, *ЖЭТФ* **56**, 240 (1969).
27. W. Dappen, D. Mihalas, D. G. Hummer, and B. W. Mihalas, *Astrophys. J.* **332**, 261 (1988).
28. И. А. Муленко, А. Л. Хомкин, А. С. Шумихин, *ТВТ* **42**, 835 (2004).
29. А. А. Ликальтер, *УФН* **170**, 831 (2000).