ЖЭТФ, 2023, том 163, вып. 6, стр. 842–851

ИНДУЦИРОВАННЫЙ ЗАРЯД В ДИХАЛЬКОГЕНИДАХ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ

И. С. Терехов [*]

Институт ядерной физики им. Г. И. Будкера Сибирского отделения Российской академии наук
630090, Новосибирск, Россия

Поступила в редакцию 5 ноября 2022 г.,
после переработки 29 ноября 2022 г.
Принята к публикации 5 декабря 2022 г.

Исследуется асимптотика плотности заряда $\rho_{ind}(\mathbf{r})$, индуцированного азимутально-симметричной потенциальной ямой конечного радиуса R. Получено аналитическое выражение для $\rho_{ind}(\mathbf{r})$ на расстояниях $r \gg R$. Показано, что для широкой области параметров потенциала плотность индуцированного заряда может быть представлена в виде $\rho_{ind}(\mathbf{r}) = F(r)\mathcal{L}_V$, где $F(r)$ зависит только от расстояния, а $\mathcal{L}_V$ — от параметров потенциала. Также исследуется поведение плотности индуцированного заряда при глубине потенциальной ямы, близкой к критическому значению.

DOI: 10.31857/S004445102306010X
EDN: DGECBC

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что внешнее поле приводит к появлению поляризационных эффектов в материале. Так, в поле примеси возникает плотность индуцированного заряда $\rho_{ind}(\mathbf{r})$, внешнее магнитное поле индуцирует ток, а также может приводить к эффекту Бома – Ааронова. Такого типа явления описываются как эффекты поляризации вакуума, т. е. основного состояния системы. Эффекты поляризации вакуума возникают в различных системах. Так, в рамках квантовой электродинамики исследуется плотность заряда, индуцированного кулоновским полем иона [1–4]. В графене плотность заряда, индуцированного полем кулоновской примеси, исследовалась в работах [5–16]. Плотность индуцированного заряда в графене в случае локализованного потенциала подробно рассматривалась в [17].

В настоящей работе мы исследуем поведение плотности заряда, индуцированного локализованным потенциалом, в двумерных дихалькогенидах переходных металлов (ДПМ). Эти материалы относятся к так называемым графеноподобным, или дираковским материалам, поскольку движение заряженных одночастичных возбуждений электронного газа описывается $(2+1)$-мерным уравнением Дирака [18]. Отметим, что безразмерная константа взаимодействия между электронами (аналог постоянной тонкой структуры) в ДПМ не мала, поэтому в ДПМ реализуется некоторый вариант $(2+1)$-мерной квантовой электродинамики с сильной связью. Кроме того, в экспериментах можно создавать различные внешние поля, в том числе и достаточно сильные. Поэтому исследование эффектов поляризации вакуума внешними полями в ДПМ также позволяет изучать и непертурбативные эффекты, аналогичные эффектам квантовой электродинмики, например, роджение электрон-позитронных пар сильным полем и парадокс Клейна.

В двумерных дираковских материалах плотность заряда, индуцированная кулоновским полем, а также непертурбативные эффекты исследовались в работах [19, 20]. Мы рассматриваем плотность заряда $\rho_{ind}(\mathbf{r})$, индуцированного аксиально-симметричной потенциальной ямой глубины U с характерным радиусом R. Мы вычисляем функцию $\rho_{ind}(\mathbf{r})$ аналитически на расстояниях $r \gg R$ при различных значениях ширины запрещенной зоны и глубины потенциала. Для вычисления асимптотики мы используем метод функции Грина для электрона во внешнем поле, развитый в работе [21]. Мы показываем, что в широкой области изменений параметров потенциала плотность индуцированного заряда можно представить в виде $\rho_{ind}(\mathbf{r}) = F(r)\mathcal{L}_V$, где коэффициент $\mathcal{L}_V$ зависит от конкретного вида потен-

[*] E-mail: iterekhov@yandex.ru

циала и не зависит от расстояния r, а функция $F(r)$ не зависит от потенциала.

Статья имеет следующую структуру: в разд. 2 мы приводим общее выражение для плотности индуцированного заряда; в разд. 3 исследуем уравнение для функции Грина; в разд. 4 рассматриваем волновые функции и поведение уровней энергии для связанных состояний электрона в потенциальной яме; в разд. 5 вычисляем асимптотику плотности индуцированного заряда. В Заключении обсуждаем полученные результаты.

2. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

Плотность заряда, индуцированного потенциалом $V(r)$, можно представить в виде контурного интеграла от функции Грина электрона:

$$\rho_{ind}(\mathbf{r}) = -ieN \int\limits_C \frac{d\epsilon}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\{G(\mathbf{r},\mathbf{r}|\epsilon)\}, \tag{1}$$

где e — заряд электрона, коэффициент $N = 4$ связан с вырождением по спину электрона и по количеству долин в ДПМ, функция Грина $G(\mathbf{r},\mathbf{r}'|\epsilon)$ удовлетворяет следующему уравнению [18]:

$$[\epsilon - V(r) - v_F\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} - \Delta\sigma_z]\,G(\mathbf{r},\mathbf{r}'|\epsilon) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x,\sigma_y)$, σ_a — сигма-матрицы Паули, $\mathbf{p} = -i\hbar\,(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ — оператор импульса, Δ — половина ширины запрещенной зоны, v_F — постоянная размерности скорости. Сигма-матрицы отвечают псевдоспиновым степеням свободы. В уравнении (2) опущено слагаемое, отвечающее спин-орбитальному взаимодействию, поскольку констату спин-орбитального взаимодействия можно считать малой [18]. Мы рассматриваем потенциалы $V(r)$, достаточно быстро убывающие на расстояниях R, т. е. $V(r) \approx 0$ при $r \gg R$. Ниже мы полагаем $\hbar = v_F = 1$. Функция Грина электрона, находящегося в поле потенциальной ямы, имеет разрезы и полюсы, отвечающие состояниям непрерывного спектра и связанным состояниям электрона соответственно. На рис. 1 схематично изображены разрезы и полюсы. Разрезы изображены толстыми линиями, полюсы — крестиками. Разрезы расположены на действительной оси и находятся в интервалах $(-\infty,-\Delta]$ и $[\Delta,\infty)$. Полюсы лежат в интервале $(-\Delta,\Delta)$. Контур интегрирования C проходит ниже действительной оси в левой полуплоскости, пересекает действительную ось между левым разрезом функции Грина и полюсом, который отвечает связанному состоянию с минимальной энергией, затем контрур проходит выше действительной оси, см. рис. 1. Такой выбор контура интегрирования означает, что все состояния с энергиями $\epsilon \leqslant -\Delta$ заняты. Используя аналитические свойства функции Грина,

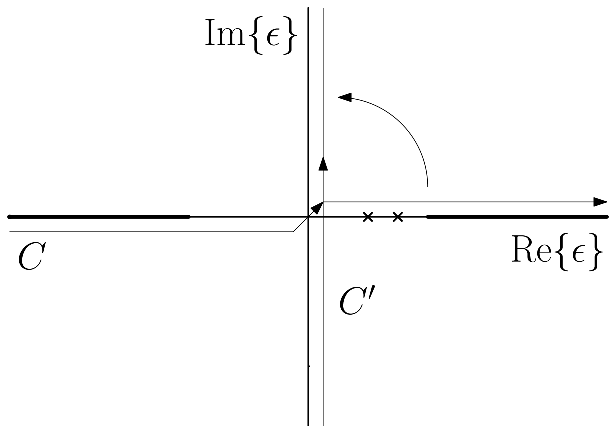

Рис. 1. Аналитические свойства функции Грина по временной ϵ и контруры интегрирования. Разрезы и полюсы изображены толстыми линиями и крестиками соответственно

мы деформируем контур интегрирования по ϵ так, чтобы от совпадал с мнимой осью, выполняем замену переменных $\epsilon \to i\epsilon$ и получаем

$$\rho_{ind}(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}(\mathbf{r}) - eN \sum_{\epsilon_n<0} |\psi_n(\mathbf{r})|^2, \tag{3}$$

где

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = eN \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi}\,\mathrm{Tr}\{G(\mathbf{r},\mathbf{r}|i\epsilon)\}, \tag{4}$$

$\psi_n(\mathbf{r})$ — волновая функция электрона, имеющего энергию $\epsilon_n < 0$. Поэтому для вычисления плотности индуцированного заряда необходимо найти функцию Грина и волновые функции связанных состояний.

Для вычисления асимптотики плотности индуцированного заряда на расстояниях $r \gg R$ удобно представить уравнение для функции Грина в следующем виде [21]:

$$\begin{aligned} G(r,r'|i\epsilon) = G^{(0)}(r,r'|i\epsilon) &+ \\ + \int d\mathbf{r}_1\,d\mathbf{r}_2\,G^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{r}_1|i\epsilon)\,[V(r_1)\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2) &+ \\ + V(r_1)G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2|i\epsilon)V(r_2)]\,G^{(0)}(\mathbf{r}_2,\mathbf{r}'|i\epsilon), \end{aligned} \tag{5}$$

где $G^{(0)}(\mathbf{r},\mathbf{r}'|i\epsilon)$ — решение уравнения (2) при $V(r) = 0$. В уравнении (5) масштабы расстояний r и R разделились, поскольку в правой части уравнения от r зависит только функция $G^{(0)}$, а аргументы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ функции G локализованы на масштабе R, т. е. $r_{1,2} \sim R$, поскольку потенциал отличен от нуля на масштабе R. Такое разделение масштабов позволяет вычислить асимптотику плотности индуцированного заряда [21].

Используя выражения (4) и (5), мы представляем функцию $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$ в виде

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{r}) + \tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}). \tag{6}$$

Здесь $\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{r})$ — линейный по потенциалу $V(r)$ вклад, $\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r})$ — вклад более высоких по потенциалу порядков:

$$\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{r}) = eN \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 \ \mathrm{Tr} \left\{ G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1|i\epsilon) V(r_1) \times \right. \\ \left. \times\ G^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}|i\epsilon) \right\}, \tag{7}$$

$$\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}) = eN \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \, \mathrm{Tr} \left\{ G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1|i\epsilon) \times \right. \\ \left. \times\ V(r_1) G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2|i\epsilon) V(r_2) G^{(0)}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}|i\epsilon) \right\}. \tag{8}$$

Таким образом, необходимо вычислить функции $G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|i\epsilon)$ и $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|i\epsilon)$.

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ

Решая уравнение (2) при нулевом потенциале, получаем

$$G^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|i\epsilon) = -\frac{i}{2\pi} \left[(\epsilon - i\sigma_z \Delta) K_0(\kappa\rho) + \right. \\ \left. + \ \kappa \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\rho}}{\rho} K_1(\kappa\rho) \right], \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\kappa = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}$, $K_a(b)$ — функция Макдональда.

Для азимутально-симметричного потенциала удобно представить функцию Грина в следующем виде:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'|\epsilon) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')} \times \\ \times \begin{pmatrix} \mathcal{A}_m^{(\Delta)}(r, r'|\epsilon) & -ie^{-i\phi'} \mathcal{B}_m^{(\Delta)}(r, r'|\epsilon) \\ ie^{i\phi} \mathcal{C}_m^{(\Delta)}(r, r'|\epsilon) & e^{i(\phi-\phi')} \mathcal{D}_m^{(\Delta)}(r, r'|\epsilon) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Подставляя данное представление в уравнение (2) и учитывая следующее представление для δ-функции:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\delta(r - r')}{2\pi\sqrt{rr'}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')}, \tag{11}$$

получаем уравнения

$$(\epsilon - V(r) - \Delta) \mathcal{A}_m^{(\Delta)} - \frac{\partial \mathcal{C}_m^{(\Delta)}}{\partial r} - \frac{m+1}{r} \mathcal{C}_m^{(\Delta)} = \frac{\delta(r - r')}{\sqrt{rr'}}, \\ (\epsilon - V(r) + \Delta) \mathcal{C}_m^{(\Delta)} + \frac{\partial \mathcal{A}_m^{(\Delta)}}{\partial r} - \frac{m}{r} \mathcal{A}_m^{(\Delta)} = 0. \tag{12}$$

Функции $\mathcal{D}_m^{(\Delta)}$ и $\mathcal{B}_m^{(\Delta)}$ выражаются через функции $\mathcal{A}_m^{(\Delta)}$ и $\mathcal{C}_m^{(\Delta)}$ следующим образом:

$$\mathcal{D}_m^{(\Delta)} = \mathcal{A}_{-m-1}^{(-\Delta)}, \quad \mathcal{B}_m^{(\Delta)} = -\mathcal{C}_{-m-1}^{(-\Delta)}. \tag{13}$$

Поэтому для вычисления функции Грина необходимо решить два уравнения (12).

4. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЕКТРОНА В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ

Для нахождения индуцированного заряда необходимо знать волновую функцию электрона $\psi_n(\mathbf{r})$ в потенциале, см. (3). Уравнение для волновой функции имеет вид [18]

$$[\epsilon - V(r) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} - \Delta\sigma_z] \, \psi(\mathbf{r}) = 0. \tag{14}$$

Явный вид волновой функции и спектр зависят от конкретного вида потенциала. Рассмотрим подробно решения в случае потенциальной ямы вида

$$V(r) = -U\theta(R - r), \tag{15}$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, R и U — радиус и глубина потенциальной ямы. Волновые функции в таком потенциале хорошо исследованы [22]. Подставляя волновую функцию в виде

$$\psi_n(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u_n(r) \\ id_n(r) e^{i\phi} \end{pmatrix} e^{im\phi} \tag{16}$$

в уравнение (14) и решая его, находим [22]

$$u_n(r) = h \begin{cases} J_{|m|}(\mu_n r), & r < R, \\ g K_{|m|}(\tilde{\mu}_n r), & r > R, \end{cases} \tag{17}$$

$$d_n(r) = h \begin{cases} \dfrac{\sigma \mu_n}{\epsilon_n + U + \Delta} J_{|m|+\sigma}(\mu_n r), & r < R, \\ \dfrac{g \tilde{\mu}_n}{\epsilon_n + \Delta} K_{|m|+\sigma}(\tilde{\mu}_n r), & r > R, \end{cases} \tag{18}$$

где $\sigma = 1$ при $m \geqslant 0$ и $\sigma = -1$ при $m < 0$, ϵ_n — энергия связанного состояния, $\mu_n = \sqrt{(\epsilon_n + U)^2 - \Delta^2}$, $\tilde{\mu}_n = \sqrt{\Delta^2 - \epsilon_n^2}$, $J_a(b)$ — функция Бесселя. Энергия ϵ_n зависит от m. Коэффициенты g и h могут быть найдены из условия непрерывности функций $u_n(r)$ и $d_n(r)$ в точке $r = R$ и условия нормировки волновой функции [22]:

$$g = \frac{J_{|m|}(\mu_n R)}{K_{|m|}(\tilde{\mu}_n R)}, \tag{19}$$

$$h^2 = \frac{\epsilon_n + U + \Delta}{2\pi U R^2} \left(\frac{\Delta J_m^2(\mu_n R)}{\Delta + \epsilon_n} + \frac{\Delta J_{m+1}^2(\mu_n R)}{\Delta - \epsilon_n} + \right. \\ + \frac{\Delta(U + 2\epsilon_n) - (2m+1)(\Delta^2 + \epsilon_n(U + \epsilon_n))}{R \mu_n \tilde{\mu}_n^2} \times \\ \left. \times J_m(\mu_n R) J_{m+1}(\mu_n R) \right)^{-1}. \tag{20}$$

Условие непрерывности функций приводит к уравнению для энергий ϵ_n связанных состояний:

$$\frac{\sigma \mu_n (\epsilon_n + \Delta)}{\tilde{\mu}_n (\epsilon_n + U + \Delta)} \frac{J_{|m|+\sigma}(\mu_n R)}{J_{|m|}(\mu_n R)} = \frac{K_{|m|+\sigma}(\tilde{\mu}_n R)}{K_{|m|}(\tilde{\mu}_n R)}. \tag{21}$$

Можно проверить, что каждый уровень энергии ϵ_n плавно уменьшается от Δ до $-\Delta$ при увеличении U от нуля до некоторого критического значения глубины потенциала U_c, при котором уровень энергии достигает значения $-\Delta$ и исчезает из дискретного спектра. При таком значении потенциала возникают процессы рождения пар электрон–дырка (аналог рождения электрон-позитронных пар в квантовой электродинамике) [22, 23]. В качестве примера на рис. 2 изображена зависимость энергии низшего связанного состояния от глубины потенциала при $R\Delta = 1$. Значение критической глубины потенциала U_c разное для разных уровней энергии. Минимальное значение U_c соответствует исчезновению низшего связанного состояния. При критическом значении потенциала возникают особенности плотности индуцированного заряда [17].

Для вычисления плотности индуцированного заряда необходимо вычислить значения глубины потенциала U_0, при которых энергии связанных состояний становятся равными нулю, см. (3). Для исследования поведения индуцированного заряда вблизи критического значения глубины потенциала необходимо также вычислить значение U_c.

Величины U_0 и U_c могут быть найдены численно для произвольных значений Δ и R. Для этого численно решается уравнение (21) при $\epsilon_n = 0$ и $\epsilon_n = -\Delta$ соответственно. Однако в случае, когда параметры R и Δ удовлетворяют соотношениям $R\Delta \ll 1$ или $R\Delta \gg 1$, значения U_0 и U_c находятся аналитически. Так, полагая $\epsilon_0 = 0$ в уравнении (21), находим решения в главном и следующем за главным порядках по параметрам малости. При $R\Delta \ll 1$ получаем

$$U_0 \approx \frac{g_c}{R} - \Delta \ln \frac{1}{R\Delta}. \tag{22}$$

При $R\Delta \gg 1$ находим

$$U_0 \approx \Delta + \frac{g_c^2}{2R^2\Delta}, \tag{23}$$

где g_c — наименьшее положительное решение уравнения $J_0(g_c) = 0$ ($g_c \approx 2.4$). Полагая $\epsilon_0 = -\Delta$ в уравнении (21), для U_c получаем выражение

$$\frac{U_c}{\Delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{g_c^2}{R^2\Delta^2}}, \tag{24}$$

которое в предельных случаях параметра $R\Delta$ принимает вид

$$U_c \approx \frac{g_c}{R} + \Delta \tag{25}$$

при $R\Delta \ll 1$ и

$$U_c \approx 2\Delta + \frac{g_c^2}{2R^2\Delta} \tag{26}$$

при $R\Delta \gg 1$. Отметим, что в случае $R\Delta \ll 1$ значения U_0 и U_c совпадают в главном приближении по малому параметру, т. е.

$$U_0 \approx U_c. \tag{27}$$

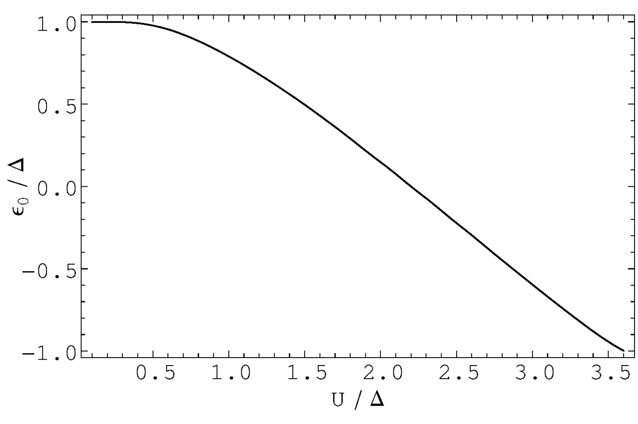

Рис. 2. Зависимость отношения ϵ_0/Δ от U/Δ при $R\Delta = 1$

5. АСИМПТОТИКА ПЛОТНОСТИ ИНДУЦИРОВАННОГО ЗАРЯДА

Асимптотика плотности индуцированного заряда зависит от соотношений между расстоянием r, характерной шириной R потенциальной ямы $V(r)$ и комптоновской длиной волны электрона $1/\Delta$. Мы рассмотрим два случая. Первый случай: $R \ll r \ll \Delta^{-1}$. Во втором случае $r \gg R$ и $r \gg \Delta^{-1}$, а соотношение между R и Δ произвольно. В первом случае ($R \ll r \ll \Delta^{-1}$) при вычислении асимптотики индуцированного заряда в интеграл по энергии ϵ основной вклад дают масштабы $\epsilon \sim 1/r$. При таких энергиях можно пренебречь величиной ширины запрещенной зоны, поскольку $r\Delta \ll 1$. Поэтому результат для асимптотики плотности индуцированного заряда $\rho_{ind}(\mathbf{r})$ будет совпадать с результатом работы [17], где исследовался индуцированный заряд в графене. Ниже мы подробно рассмотрим второй случай.

Для вычисления $\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{r})$ на расстояниях $r \gg R$, подставляем функцию Грина (9) в выражение (7) и получаем

$$\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{r}) = -\frac{eN}{2\pi^3}\int\limits_0^\infty d\epsilon \int d\mathbf{r}'\, V(r')\{\left(\epsilon^2-\Delta^2\right) K_0^2(\kappa\rho) - \\ - \kappa^2 K_1^2(\kappa\rho)\}, \quad (28)$$

где $\rho = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$. Интеграл по переменной r' сходится на масштабе локализации потенциала R. Поскольку $r \gg R$ и $r \gg \Delta^{-1}$, аргумент функции Макдональда $\kappa\rho \gg 1$. Подставляя асимптотику функции Макдональда для больших аргументов [24],

$$K_m(x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}, \quad (29)$$

в выражение (28), используя метод Лапласа, вычисляем интеграл по ϵ. Результат имеет вид

$$\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{eN}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^{3/2}\int \frac{d\mathbf{r}'}{2\pi} V(r') e^{-2\rho\Delta}. \quad (30)$$

Ниже мы предполагаем также, что выполнено следующее соотношение:

$$\frac{R^2\Delta}{r} \ll 1. \quad (31)$$

В этом случае мы интегрируем по направлению вектора $\mathbf{r}'$, и получаем

$$\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{r}) = F(r)\mathcal{L}_V^{(1)}, \quad (32)$$

где

$$F(r) = -\frac{eN\sqrt{\Delta}e^{-2r\Delta}}{2\sqrt{\pi}r^{3/2}}, \quad (33)$$

$$\mathcal{L}_V^{(1)} = -\Delta\int\limits_0^\infty dr' r'\, V(r')\, I_0(2r'\Delta), \quad (34)$$

$I_m(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода. Видно, что линейный по потенциалу вклад в плотность индуцированного заряда убывает экспоненциально на больших расстояниях.

Для вычисления асимптотики $\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r})$ подставляем функции Грина в виде (9) и (10) в выражение (8), затем полагаем $r_1 = 0$ и $r_2 = 0$ в аргументах функций $G^{(0)}$, используем асимптотику функции Макдональда (29), интегрируем по направлениям векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, учитываем условие (31), используем соотношения (13) и получаем

$$\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{eN\Delta}{2r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi}e^{-2\kappa r}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty dr_1 dr_2\, r_1 r_2 V(r_1)V(r_2) \times \\ \times \sum_{s=-1,1}\sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m(\kappa r_2)\Big\{I_m(\kappa r_1)\mathcal{A}_m^{(s\Delta)}(r_1,r_2|i\epsilon) - \\ - s\, I_{m+1}(\kappa r_1)\, \mathcal{C}_m^{(s\Delta)}(r_1,r_2|i\epsilon)\Big\}. \quad (35)$$

Здесь $\mathcal{A}_m^{(\pm\Delta)}(r_1,r_2|i\epsilon)$ и $\mathcal{C}_m^{(\pm\Delta)}(r_1,r_2|i\epsilon)$ — решения системы уравнений (12).

Следуя результатам работы [17], вводим функции

$$a_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon) = \int\limits_0^\infty dr' r' V(r')\, I_m(\kappa r')\, \mathcal{A}_m^{(\pm\Delta)}(r,r'|i\epsilon), \quad (36)$$

$$c_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon) = \int\limits_0^\infty dr' r' V(r')\, I_m(\kappa r')\, \mathcal{C}_m^{(\pm\Delta)}(r,r'|i\epsilon), \quad (37)$$

которые удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m}{r}\right) a_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon) + \\ &\quad + (i\epsilon - V(r) \pm \Delta)\, c_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon) = 0, \\ &(i\epsilon - V(r) \mp \Delta)\, a_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon) - \\ &\quad - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{m+1}{r}\right) c_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon) = V(r)\, I_m(\kappa r). \end{aligned} \quad (38)$$

Для получения этих уравнений мы умножили обе части уравнения (12) на $r'\, V(r')\, I_m(\kappa r')$ и проинтегрировали по r'. Граничные условия для функций имеют вид

$$a_m^{(\pm\Delta)}(0,i\epsilon)<\infty,\ c_m^{(\pm\Delta)}(0,i\epsilon)<\infty,$$
$$\lim_{r\to\infty} a_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon)=\lim_{r\to\infty} c_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon)=0. \tag{39}$$

Выражая $\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r})$ через $a_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon)$ и $c_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon)$, получаем

$$\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r})=\frac{eN\Delta}{2r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi}e^{-2\kappa r}\int\limits_0^{\infty}dr_1\,r_1V(r_1)\times$$
$$\times\sum_{s=-1,1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big\{I_m(\kappa r_1)a_m^{(s\Delta)}(r_1,i\epsilon)-$$
$$-sI_{m+1}(\kappa r_1)c_m^{(s\Delta)}(r_1,i\epsilon)\Big\}. \tag{40}$$

Таким образом, для вычисления функции $\rho_{ind}^{(2)}(\mathbf{r})$ необходимо найти функции $a_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$ и $c_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$.

Предположим, что функции $a_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$ и $c_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$ не имеют особенностей при малых ϵ, тогда интеграл по энергии можно вычислить, используя метод Лапласа:

$$\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r})=F(r)\mathcal{L}_V^{(2)}, \tag{41}$$

где

$$\mathcal{L}_V^{(2)}=-\frac{\Delta}{2}\sum_{s=-1,1}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}dr_1\,r_1V(r_1)\Big\{I_m(\kappa r_1)\times$$
$$\times a_m^{(s\Delta)}(r_1,0)-sI_{m+1}(\kappa r_1)c_m^{(s\Delta)}(r_1,0)\Big\}. \tag{42}$$

Видно, что зависимость от расстояний и зависимость от потенциала факторизовались. Ниже, на примере конкретного вида потенциала, мы покажем, что пренебрежение зависимостью от энергии в функциях $a_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$ и $c_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$ оправдано для широкой области изменения параметров потенциала. Однако выражение (41) не верно при значениях потенциала U, близких U_0, т. е. таких, что полюс функции Грина, отвечающий связанному состоянию, расположен близко к контуру интегрирования. В этом случае вычисление по переменной ϵ необходимо выполнять аккуратнее, поскольку функции $a_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$ и $c_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$ содержат особенность, см. ниже.

Явный вид функций $a_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$ и $c_m^{(\Delta)}(r,i\epsilon)$ зависит от вида потенциала $V(r)$, поэтому далее мы исследуем плотность заряда, индуцированного потенциалом (15). Решения уравнений (38) для потенциала (15) имеют вид

$$a_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon)=$$
$$=\begin{cases}H_m^{(\pm)}J_{|m|}(\varkappa r)-\dfrac{U\pm\Delta+i\epsilon}{U+2i\epsilon}I_m(\kappa r), & r<R,\\ G_m^{(\pm)}K_m(\kappa r), & r>R,\end{cases} \tag{43}$$

$$c_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon)=$$
$$=\begin{cases}-\dfrac{\varkappa\sigma H_m^{(\pm)}J_{|m|+\sigma}(\varkappa r)}{U\pm\Delta+i\epsilon}+\dfrac{\kappa I_{|m|+\sigma}(\kappa r)}{U+2i\epsilon}, & r<R,\\ \dfrac{\varkappa}{i\epsilon\pm\Delta}G_m^{(\pm)}K_{|m|+\sigma}(\kappa r), & r>R,\end{cases} \tag{44}$$

где $\varkappa=\sqrt{(U-i\epsilon)^2-\Delta^2}$. Коэффициенты $H_m^{(\pm)}$ и $G_m^{(\pm)}$ могут быть найдены из условий непрерывности функций $a_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon)$ и $c_m^{(\pm\Delta)}(r,i\epsilon)$ в точке $r=R$. Мы не приводим явного вида коэффициентов в силу их громоздкости.

Подставляя выражения (43) и (44) в (40), выполняя простые преобразования и интегрирование по переменной r_1, получаем следующее выражение:

$$\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r})=\frac{eNUR\Delta}{2r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi}\frac{U+i\epsilon}{(U+2i\epsilon)\kappa}e^{-2\kappa r}I_1(2\kappa R)-$$
$$-\frac{eN\Delta}{r}\sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi}\frac{e^{-2\kappa r}(M_m\gamma_m+P_m\gamma_{m+1})}{\kappa R(U+2i\epsilon)^2D_m}, \tag{45}$$

где

$$\gamma_m=yI_{m+1}(y)J_m(x)+xI_m(y)J_{m+1}(x), \tag{46}$$

$$M_m=\tilde{B}_m\Big(\kappa[(U+i\epsilon)\kappa-U\Delta]+$$
$$+Uy\big[\left(\kappa^2-i\epsilon U\right)A_m+\kappa\Delta\tilde{A}_m\big]\Big)+$$
$$+\varkappa\left(i\epsilon\kappa+Uy\left[\kappa A_m+\Delta\tilde{A}_m\right]\right)B_m, \tag{47}$$

$$P_m=B_m\Big(\kappa[(U+i\epsilon)\kappa-U\Delta]+$$
$$+Uy\big[\left(\kappa^2-i\epsilon U\right)\tilde{A}_m+\kappa\Delta A_m\big]\Big)-$$
$$-\varkappa\left(i\epsilon\kappa+Uy\left[\kappa\tilde{A}_m+\Delta A_m\right]\right)\tilde{B}_m, \tag{48}$$

$$D_m=\kappa\varkappa\left(B_m^2-\tilde{B}_m^2\right)+2B_m\tilde{B}_m\left(\kappa^2-i\epsilon U\right), \tag{49}$$

$$A_m=I_m(y)K_{m+1}(y),\quad \tilde{A}_m=I_{m+1}(y)K_m(y), \tag{50}$$

$$B_m=J_m(x)K_{m+1}(y),\quad \tilde{B}_m=J_{m+1}(x)K_m(y), \tag{51}$$

$x=\varkappa R$, $y=\kappa R$. В первом слагаемом в правой части (45) вычисляем интеграл методом Лапласа, предполагая, что $r \gg R$ и $r \gg 1/\Delta$, складываем полученный результат для $\tilde{\rho}^{(2)}(\mathbf{r})$ с функцией $\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{r})$, см. (32), вычисленной для потенциала (15), и получаем

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = -\frac{eN\Delta}{Rr}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi}\frac{e^{-2\kappa r}}{\kappa(U+2i\epsilon)^2}\times$$
$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{M_m\gamma_m + P_m\gamma_{m+1}}{D_m}. \quad (52)$$

Исследуем зависимость функции $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$ от глубины потенциальной ямы.

При $r \gg 1/\Delta$ экспонента $e^{-2\kappa r}$ изменяется на масштабе $\epsilon \sim \Delta/\sqrt{r\Delta}$, т. е. при $\epsilon \ll \Delta$. Предполагая, что величины D_m не имеют особенностей при малых ϵ, вычисляем интеграл и получаем

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = F(r)\mathcal{L}_V, \quad (53)$$

где

$$\mathcal{L}_V = \frac{U}{\Delta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{J_m(x)J_{m+1}(x)}{x\left(B_m^2-\tilde{B}_m^2\right)+2yB_m\tilde{B}_m}\Bigg|_{\epsilon=0}. \quad (54)$$

Таким образом, функция $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$ является произведением функции от r и коэффициента $\mathcal{L}_V$, который зависит от параметров потенциала и не зависит от r.

При малой глубине потенциала, т. е. при $U \ll \Delta$, получаем

$$\mathcal{L}_V = \frac{URI_1(2R\Delta)}{2}. \quad (55)$$

Этот результат согласуется с вкладом $\tilde{\rho}^{(1)}$ (34) для потенциала (15). Знаменатель в выражении (54) обращается в нуль при значениях потенциала $U = U_0$, которые удовлетворяют уравнению (21) при $\epsilon_n = 0$. Поэтому при $U = U_0$ функция $\mathcal{L}_V$ имеет особенность. Для того чтобы правильно вычислить функцию $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$ (52) при значениях U, близких к U_0, мы выделяем зависимость знаменателя D_m при малых значениях ϵ. Для этого раскладываем знаменатель D_m по энергии, удерживаем члены до линейного по ϵ порядка включительно и получаем следующее выражение:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = -\frac{eNU}{Rr}\sum_{m=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\epsilon}{2\pi}\frac{J_m(x_0)\,J_{m+1}(x_0)\,e^{-2\kappa r}}{\beta_m+i\epsilon\alpha_m}, \quad (56)$$

где $x_0 = R\sqrt{U^2-\Delta^2}$, $\beta_m = D_m|_{\epsilon=0}$,

$$\alpha_m = -\frac{2U^2R\Delta}{\sqrt{U^2-\Delta^2}}K_m(R\Delta)K_{m+1}(R\Delta)\times$$
$$\times\left(J_m^2(x_0)+J_{m+1}^2(x_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{U-(2m+1)\Delta}{x_0\Delta}J_m(x_0)J_{m+1}(x_0)\right). \quad (57)$$

Исследуем поведение одного из членов суммы выражения (56) при изменении U. Рассмотрим, например, слагаемое с $m = 0$. Для удобства обозначим его как $\tilde{\rho}_0(\mathbf{r})$. Интеграл по энергии содержит большой параметр $r\Delta$ в экспоненте, параметр β_0 в знаменателе, который при U, близких к U_0, становится малым. Из них можно построить безразмерный параметр $\lambda = r|\beta_0/\alpha_0|$. Если $\lambda \gg 1$, то в знаменателе можно положить $\epsilon = 0$, поскольку сходимость интеграла определяется экспонентой, а интеграл сходится на масштабах $\epsilon \sim \Delta/\sqrt{r\Delta}$. В этом случае ответ для данного слагаемого совпадает с полученным ранее. Если же параметр $\lambda \ll 1$, то сходимость интеграла определяется знаменателем, поэтому мы пренебрегаем зависимостью экспоненты от энергии. Вычисляя интеграл, находим

$$\tilde{\rho}_0(\mathbf{r}) = -\frac{eN}{Rr}e^{-2r\Delta}\,\frac{\operatorname{sign}(U_0-U)J_0(x_0)J_1(x_0)}{2|\alpha_0|}. \quad (58)$$

Отметим, что при $\lambda \ll 1$ зависимость функции $\tilde{\rho}_0(\mathbf{r})$ от r отличается от ее поведения при $\lambda \gg 1$. Однако при фиксированном значении U, отличном от U_0, т. е. при фиксированном β_0/α_0, всегда можно найти достаточно большую величину r, такую что справедлива асимптотика (52), которая верна при $\lambda \gg 1$. Несмотря на то, что функция $\tilde{\rho}_0(\mathbf{r})$ меняется скачком при $U = U_0$,

$$\tilde{\rho}_0(\mathbf{r})\big|_{U=U_0-0} = -\tilde{\rho}_0(\mathbf{r})\big|_{U=U_0+0},$$

плотность индуцированного заряда при $U = U_0$ никаких особенностей не имеет, поскольку в случае, когда полюс функции Грина оказывается в левой полуплоскости, мы должны прибавить вклад этого полюса к функции $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$, см. (3). Подставляя выражения (17)–(20) в (16) и полагая $m = 0$, $\epsilon_0 = 0$, получаем вклад полюса при $U = U_0 + 0$:

$$-eN|\psi_0(\mathbf{r})|^2\Big|_{\epsilon=0} = 2\tilde{\rho}(\mathbf{r})\operatorname{sign}(U_0-U). \quad (59)$$

Таким образом, плотность индуцированного заряда непрерывна при $U = U_0$.

При значениях глубины потенциала, близких к U_c, т. е. в случае, когда энергия основного состояния близка к $-\Delta$, функция $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$ убывает как $e^{-2r\Delta}/r^{3/2}$, см. (53), тогда как квадрат волновой функции убывает как $h^2g^2K_1^2(r\sqrt{\Delta^2-\epsilon^2})$, см. (17), (18). Это означает, что на больших расстояниях $r\sqrt{\delta\epsilon\Delta}\gg 1$ вклад волновой функции, отвечающей состоянию с энергией $\epsilon = -\Delta+\delta\epsilon$, в плотность индуцированного заряда является главным. Здесь $\delta\epsilon \ll \Delta$. Однако коэффициент h^2g^2 стремится к нулю при приближении уровня энергии к валентной зоне ($\delta\epsilon \to 0$). Поэтому существует область расстояний, в которой $|\tilde{\rho}(\mathbf{r})| \gg |e||\psi_0(r)|^2$. Предполагая $\delta\epsilon$ достаточно малым, получаем условие на эту область:

$$\max\left(\Delta^{-1}, R\right) \ll r \ll r_\star, \tag{60}$$

$$r_\star = \frac{1}{\Delta}\ln\left|\frac{R^3\Delta^3}{\sqrt{r\delta\epsilon}}\ln^2\Big(R\sqrt{\delta\epsilon\Delta}\Big)\right|. \tag{61}$$

На таких расстояниях плотность индуцированного заряда совпадает с функцией $\tilde{\rho}(\mathbf{r})$, т. е. $\rho_{ind}(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}(\mathbf{r})$. При $r \gtrsim r_\star$ поведение плотности индуцированного заряда определяется поведением волновой функции, поэтому $\rho_{ind}(\mathbf{r})$ убывает как $\exp\{-2r\sqrt{2\delta\epsilon\Delta}\}$. При $U=U_c$ связанное состояние исчезает из дискретного спектра. Это приводит к скачку плотности индуцированного заряда при $U=U_c$:

$$\rho_{ind}(\mathbf{r})\big|_{U=U_c+0} - \rho_{ind}(\mathbf{r})\big|_{U=U_c-0} = eN|\psi_0(\mathbf{r})|^2. \tag{62}$$

При $U=U_c+0$ происходит процесс рождения пар электрон–дырка. Электроны локализуются на масштабах, много меньших, чем r, а дырки утекают на бесконечность. Поэтому полный индуцированный заряд становится отличным от нуля и равным eN, см. [17, 23].

Рассмотрим поведение плотности индуцированного заряда в случае $R\Delta \ll 1$. При $U<\Delta$ подставляем в (54) асимптотику функции Макдональда для малых аргументов,

$$K_m(y) \approx -\ln(y)\delta_{m,0} + (1-\delta_{m,0})\frac{2^{m-1}\Gamma(m)}{y^m}, \tag{63}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, используем аналитическое продолжением функции Бесселя и получаем

$$\mathcal{L}_V \approx UR^2\Delta/2. \tag{64}$$

Основной вклад в $\mathcal{L}_V$ дает слагаемое с $m=0$, остальные слагаемые подавлены степенями параметра $R\Delta$. Подставляя (64) и (33) в (53), получаем

$$\tilde{\rho}_{ind}(\mathbf{r}) = -\frac{eNUR^2e^{-2r\Delta}}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{\Delta}{r}\right)^{3/2}. \tag{65}$$

Этот результат совпадает с выражением (32) для $\tilde{\rho}^{(1)}(\mathbf{r})$, вычисленным для потенциала (15) в случае $R\Delta \ll 1$. Поправки по параметру U могут быть легко вычислены. Для этого необходимо разложить функции Бесселя в выражении (54).

В случае $U>\Delta$ выделяем главный по параметру $R\Delta$ вклад и получаем

$$\mathcal{L}_V \approx \frac{UR\Delta}{\sqrt{U^2-\Delta^2}}\frac{J_1(R\sqrt{U^2-\Delta^2})}{J_0(R\sqrt{U^2-\Delta^2})}. \tag{66}$$

Функция $\mathcal{L}_V$ регулярна при $U=\Delta$ и равна (64). При $U\gg\Delta$ получаем

$$\mathcal{L}_V \approx R\Delta\frac{J_1(UR)}{J_0(UR)}. \tag{67}$$

Видно, что функция $\mathcal{L}_V$ имеет особенность при $U=g_c/R$. Данное значение потенциала получено в главном порядке по параметру $R\Delta$. Как описано выше, особенность возникает при $U=U_0$, однако с нашей точностью $U=U_c$, см. (27). Поскольку два значения совпали, а при $U>U_c$ связанное состояние с минимальной энергией исчезает из спектра, индуцированный заряд совпадает с функцией $\tilde{\rho}$. Таким образом, при $R\Delta\ll 1$ получаем

$$\rho_{ind}(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}(\mathbf{r}).$$

Подчеркнем, что данное выражение для плотности индуцированного заряда не справедливо при значениях потенциала, близких к U_c. Отметим также, что знак плотности индуцированного заряда изменяется скачком при $U=U_c$.

Исследуем поведение индуцированного заряда, находящегося на больших расстояниях при $R\Delta\ll 1$:

$$Q_>(r) = 2\pi\int\limits_r^\infty dr'r'\rho_{ind}(r'). \tag{68}$$

Для вычисления $Q_>(r)$ в главном приближении по $R\Delta$ мы подставляем $\tilde{\rho}(r')$, см. (56), вместо $\rho_{ind}(r')$ в (68), оставляем только слагаемое с $m=0$. Затем вычисляем β_0 и α_0 в главном приближении по параметру $R\Delta$, выполняем интегрирование по r', делаем замену переменных $\epsilon \to \epsilon/\Delta$ и получаем

$$Q_>(r) = -eNR\Delta J_0(UR)J_1(UR) \times \\ \times \int_0^\infty d\epsilon \frac{e^{-2r\Delta\sqrt{1+\epsilon^2}}}{J_0^2(UR) + 4\epsilon^2(R\Delta)^2 \ln^2(R\Delta)J_1^2(UR)}. \quad (69)$$

Если

$$|J_0(UR)| \gg \frac{R\sqrt{\Delta}|\ln(R\Delta)|}{\sqrt{r}},$$

то

$$Q_>(r) = -\frac{eN\sqrt{\pi\Delta}RJ_1(UR)}{2\sqrt{r}J_0(UR)}e^{-2r\Delta}. \quad (70)$$

Если

$$|UR - g_c| \ll \frac{R\sqrt{\Delta}|\ln(R\Delta)|}{\sqrt{r}},$$

то

$$Q_>(r) = -\frac{eN\pi\,\mathrm{sign}(g_c - UR)}{4|\ln(R\Delta)|}e^{-2r\Delta}. \quad (71)$$

Таким образом, заряд, находящийся снаружи окружности радиуса r, изменяется скачком при превышении критической глубины потенциала.

Рассмотрим поведение индуцированного заряда $Q_<(r)$, который находится внутри окружности радиуса r. При $UR < g_c$ полный индуцированный заряд $Q_{tot} = Q_<(r) + Q_>(r) = 0$. Поэтому $Q_<(r) = -Q_>(r)$. В случае, когда UR больше минимального g_c, полный индуцированный заряд $Q_{tot} = eNM$, где M — число критических значений g_c, меньших UR, т. е. число уровней, исчезнувших из дискретного спектра. Это связано с процессами, аналогичными процессам рождения электрон-позитронных пар [23]. Поэтому в случае $R\Delta \ll 1$ и при условии, что параметр UR больше минимального значения g_c, получаем $Q_<(r) = eNM + Q_>(r)$. Поскольку индуцированный заряд $Q_>(r)$ экспоненциально подавлен, имеем $Q_<(r) \approx eNM$.

Отметим, что рассматривать задачу при глубине потенциала, большей чем g_c/R, где g_c — наименьшее положительное решение уравнения $J_0(g_c) = 0$, не имеет смысла, поскольку при $U > g_c/R$ задача становится многочастичной. При U, большем минимального критического значения, поле рождает четыре электрон-дырочные пары. Дырки уходят на бесконечность, а электроны, в зависимости от величины R, локализуются либо на масштабе потенциала R, либо на масштабе комптоновской длины волны электрона в материале, $1/\Delta$, см. [23, 25]. Поэтому при вычислении индуцированного заряда при $U > U_c$ необходимо также учесть потенциал, создаваемый рожденными электронами.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы исследовали поведение плотности индуцированного заряда в поле потенциальной ямы. Мы показали, что в широкой области значения параметров локализованного потенциала плотность индуцированного заряда представляется в виде произведения функции, зависящей от расстояния, и функции, зависящей от параметров потенциала, т. е. зависимости от расстояния и потенциала факторизуются. При приближении глубины потенциала к критическому значению существует область расстояний (60), на которых плотность индуцированного заряда представляется в факторизованном виде. В случае, когда глубина потенциала превышает критическое значение, плотность индуцированного заряда изменяется скачком на величину, пропорциональную квадрату волновой функции состояния, исчезающего из дискретного спектра (62). Для потенциала (15) в случае $R\Delta \ll 1$ мы нашли аналитическое выражение для плотности индуцированного заряда (53) (см. также (33) и (66)). Мы исследовали поведение индуцированного заряда, находящегося вне окружности большого радиуса и внутри этой окружности.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. H. Wichmann and N. M. Kroll, Phys. Rev. **101**, 843 (1956).

2. L. S. Brown, R. N. Cahn, and L. D. McLerran, Phys. Rev. D **12**, 581 (1975).

3. А. И. Мильштейн, В. М. Страховенко, ЖЭТФ **84**, 1247 (1983) [Sov. Phys. JETP **57**, 722 (1983)].

4. Я. Б. Зельдович, В. С. Попов, УФН **105**, 403 (1971) [Sov. Phys. Usp. **14**, 673 (1972)].

5. D. P. DiVincenzo and E. J. Mele, Phys. Rev. B **29**, 1685 (1984).

6. K. Nomura and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **98**, 076602 (2007).

7. T. Ando, J. Phys. Soc. Jpn **75**, 074716 (2006).

8. E. H. Hwang, S. Adam, and S. Das Sarma, Phys. Rev. Lett. **98**, 186806 (2007).

9. M. I. Katsnelson, Phys. Rev. B **74**, 201401(R) (2006).

10. A. V. Shytov, M. I. Katsnelson, and L. S. Levitov, Phys. Rev. Lett. **99**, 236801 (2007).

11. V. M. Pereira, J. Nilsson, and A. H. Castro Neto, Phys. Rev. Lett. **99**, 166802 (2007).

12. R. R. Biswas, S. Sachdev, and D. T. Son, Phys. Rev. B **76** 205122 (2007)

13. M. M. Fogler, D. S. Novikov, and B. I. Shklovskii, Phys. Rev. B **76**, 233402 (2007)

14. I. S. Terekhov, A. I. Milstein, V. N. Kotov, and O. P. Sushkov, Phys. Rev. Lett. **100**, 076803 (2008).

15. V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea, and A. H. Castro Neto, Rev. Mod. Phys. **84**, 1067 (2012).

16. V. M. Pereira, V. N. Kotov, and A. H. Castro Neto, Phys. Rev. B **78**, 035119 (2008)

17. A. I. Milstein and I. S. Terekhov, Phys. Rev. B **81**, 125419 (2010).

18. D. Xiao, G.-B. Liu, W. Feng, X. Xu, and W. Yao, Phys. Rev. Lett. **108**, 196802 (2012).

19. Yu. Voronina, K. Sveshnikov, P. Grashin, and A. Davydov, Physica E **106**, 298 (2019).

20. К. А. Свешников, Ю. С. Воронина, А. С. Давыдов, П. А. Грашин, ТМФ **199**, 69 (2019).

21. R. N. Lee and A. I. Milstein, Phys. Lett. A **189**, 72 (1994).

22. А. И. Ахиейзер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва (1981).

23. Я. В. Зельдович, В. С. Попов, УФН **150** (3), 403 (1971).

24. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов сумм рядов и произведений*, Физматгиз, Москва (1963).

25. V. M. Pereira, V. N. Kotov, and A. H. Castro Neto, Phys. Rev. B **78**, 085101 (2008).